Метод резолюций в исчислении предикатов

Пусть дизъюнкты D_1, D_2 из множеств S не имеют общих переменных и L_1, L_2 – литеры в D_1 и D_2 соответственно.

Если множество формул $W = \{L_1, \neg L_2\}$ имеет унификатор θ, то дизъюнкт, получаемый из дизъюнкта $\theta(D_1) \vee \theta(D_2)$ вычеркиванием литер $\theta(L_1)$ и $\theta(L_2)$, называется *бинарной резольвентой* дизъюнктов D_1 и D_2 и обозначается символом $\mathrm{res}(D_1, D_2)$. При этом литеры L_1 и L_2 называются *отрезаемыми литерами.*

Если $\theta(D_1) = \theta(L_1)$ и $\theta(D_2) = \theta(L_2)$, то бинарную резольвенту дизъюнктов D_1 и D_2 полагаем равной 0.

Если дизъюнкты D_1, D_2 имеют общие переменные, то, заменив в формуле D_2 эти общие переменные на переменные, не встречающиеся в D_1 и D_2, получим дизъюнкт D_2', который не имеет общих переменных с дизъюнктом D_1.

Бинарной резольвентой дизъюнктов D_1 и D_2 называется бинарная резольвента дизъюнктов D_1 и D_2'.

__Пример.__ Найдем бинарную резольвенту дизъюнктов $D_1 = P_1(x) \vee P_2(x)$ и $D_2 = \neg P_1(c) \vee P_3(x)$

Так как D_1, D_2 имеют общую переменную x, то заменим в формуле D_2 переменную x на новую переменную y: $D_2' = \neg P_1(c) \vee P_3(y)$.

Выбираем в D_1 и D_2' литеры $L_1 = P_1(x)$ и $L_2 = \neg P_1(c)$, соответственно. Так как $\neg L_2 = L_2' = P_1(c)$ и формулы L_1, L_2' имеют унификатор $\sigma = \begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix}$, то бинарная резольвента формул D_1 и D_2' получается из $\sigma(D_1) \vee \sigma(D_2') = P_1(c) \vee P_2(c) \vee \neg P_1(c) \vee P_3(y)$ вычеркиванием литер $P_1(c)$ и $\neg P_1(c)$.

Резолютивный вывод формулы Ф из множества дизъюнктов S есть такая конечная последовательность дизъюнктов $\Phi_1,\ldots,\Phi_k$, что:

1) $\Phi_k = \Phi$,

2) каждый дизъюнкт Φ_i или принадлежит множеству S, или является резольвентой некоторых дизъюнктов, предшествующих Φ_i.

Резолютивный вывод из множества дизъюнктов S сохраняет выполнимость формул.

Правило 3. (Теорема о полноте метода резолюций).

Множество дизъюнктов S противоречиво тогда и только тогда, когда существует резолютивный вывод нуля 0 из S.

<u>Пример.</u> Докажем противоречивость множества дизъюнктов $W = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_6\}$, где

$$\Phi_1 = P_1(a, f(b), f(c)),$$

$$\Phi_2 = P_2(a),$$

$$\Phi_3 = P_1(x, x, f(x)),$$

$$\Phi_4 = \neg P_1(x, y, z) \vee P_3(x, z),$$

$$\Phi_5 = \neg P_2(x) \vee \neg P_1(y, z, u) \vee \neg P_3(x, u) \vee P_3(x, y) \vee P_3(x, z),$$

$$\Phi_6 = \neg P_3(a, c).$$

$$\Phi_7 = \mathrm{res}(\Phi_2, \Phi_5) = \mathrm{res}(\Phi_2, \begin{pmatrix} x & y \\ a & z \end{pmatrix}(\Phi_5)) = \neg P_1(z, z, u) \vee \neg P_3(a, u) \vee P_3(a, z);$$

$$\Phi_8 = \mathrm{res}(\Phi_3, \Phi_7) = \mathrm{res}(\Phi_3, \begin{pmatrix} z & u \\ x & f(x) \end{pmatrix}(\Phi_7)) = \neg P_3(a, f(x)) \vee P_3(a, x);$$

$$\Phi_9 = \mathrm{res}(\Phi_6, \Phi_8) = \mathrm{res}(\Phi_6, \begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix}(\Phi_8)) = \neg P_3(a, f(c));$$

$$\Phi_{10} = \mathrm{res}(\Phi_4, \Phi_9) = \mathrm{res}(\begin{pmatrix} x & z \\ a & f(c) \end{pmatrix}(\Phi_4), \Phi_9) = \neg P_1(a, y, f(c));$$

$$\Phi_{11} = \mathrm{res}(\Phi_1, \Phi_{10}) = \mathrm{res}(\Phi_1, \begin{pmatrix} y \\ f(b) \end{pmatrix}(\Phi_{10})) = 0.$$

Применения метода резолюций исчисления предикатов

Следующие задачи равносильны:

а) проверка тождественной истинности формул;

б) проверка логического следования формул;

в) проверка тождественной ложности формул;

г) проверка противоречивости множества формул;

д) проверка противоречивости множества дизъюнктов.

Пример.

Методом резолюций доказать общезначимость формулы

$$\Phi = \big((\exists x)P(x) \Rightarrow (\forall x)R(x)\big) \Rightarrow (\forall x)(P(x) \Rightarrow R(x)).$$

Резолютивный вывод как средство вычисления

Метод резолюций используется для решения следующей задачи:

Будет ли верно утверждение ψ, если известно, что верны утверждения $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$.

Здесь база знаний $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$.

Предложение ψ - запрос к базе знаний.

Задача (неформальная): выяснить, является ли предложение ψ следствием утверждений базы знаний Γ.

Задача (формальная): проверить, что ψ выводится из Γ по законам формальной логики.

Аксиоматический метод

Было определено множество формул алгебры высказываний F_{AB}

Затем было выделено подмножество этого множества $T_{\mathrm{AB}} \subset F_{\mathrm{AB}}$, состоящие из специальных формул – тавтологий.

При этом в основе определения тавтологии лежит понятие интерпретации формул, т.е. придание некоторого конкретного содержательного смысла входящих в них переменных. Такой подход к логическим формулам носит теоретико-множественный характер и называется *семантическим*.

Альтернативой семантического подхода является *синтаксический* подход, при котором логические формулы выводятся из первоначально выделенного множества формул – аксиом по определенным правилам преобразования формул логического языка без привлечения вспомогательных теоретико-множественных понятий.

.

Построение математических теорий в виде аксиоматических теорий соответствующих формальных исчислений составляет суть *аксиоматического метода* в математике.

Простейшей аксиоматической теорией является *аксиоматическая логика высказываний*, которая строится на основе соответствующего формального исчисления, называемого *исчислением высказываний* (сокращенно, ИВ).

Исчисление высказываний

Множество аксиом Ax(ИВ) исчисления высказываний описывается следующими тремя *схемами аксиом*:

(A_1) $\left(\Phi \Rightarrow \left(\Psi \Rightarrow \Phi\right)\right)$,

(A_2) $\left(\left(\Phi_1 \Rightarrow \left(\Phi_2 \Rightarrow \Phi_3\right)\right) \Rightarrow \left(\left(\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2\right) \Rightarrow \left(\Phi_1 \Rightarrow \Phi_3\right)\right)\right)$,

(A_3) $\left(\left(\neg\Phi \Rightarrow \neg\Psi\right) \Rightarrow \left(\left(\neg\Phi \Rightarrow \Psi\right) \Rightarrow \Phi\right)\right)$,

где Φ, Ψ, Φ_i $\left(i = 1,2,3\right)$ – произвольные формулы исчисления высказываний.

Исчисление высказываний имеет единственное *правило вывода,* которое называется *правилом заключения* или правилом *modus ponens* (сокращенно *MP*) и которое для произвольных формул исчисления высказываний Φ, Ψ определяется по формуле $MP(\Phi \Rightarrow \Psi, \Phi) = \Psi$.

Символически это правило вывода записывается следующей схемой:

$$MP: \ \frac{\Phi \Rightarrow \Psi, \Phi}{\Psi}.$$

В основе алгоритма вывода *теорем* исчисления высказываний лежит следующее понятие.

Определение. Формула Ф называется *теоремой исчисления высказываний*, если найдется такая конечная последовательность формул $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$, в которой:

1) $\Phi_n = \Phi$;
2) каждая формула $\Phi_i \left(1 \le i \le n\right)$ либо является аксиомой, либо получается из некоторых двух предыдущих формул $\Phi_j, \Phi_k \left(1 \le j, k < i\right)$ по правилу вывода *MP*.

Последовательность формул $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$ называется *выводом* или *доказательством* формулы Ф.

Вывод формулы Ф сокращенно обозначают символом $|\!-$Ф и говорят, что «Ф есть теорема». Множество всех таких теорем обозначается символом Th(ИВ) и называется *теорией исчисления высказываний*.

Главной целью построения исчисления высказываний является определение такой теории Th(ИВ), которая совпадает с множеством тавтологий $\boldsymbol{T}_{\text{АВ}}$.

Лемма.

Справедливы следующие утверждения:

1)всякая аксиома ИВ является тавтологией;

2)результат применения правила вывода MP к любым тавтологиям $\Phi \Rightarrow \Psi, \Phi$ дает тавтологию Ψ;

3)всякая теорема ИВ является тавтологией, т.е. выполняется $Th(\text{ИВ}) \subset T_{\text{АВ}}$.

Теорема полноты ИВ.

Всякая тавтология является теоремой ИВ, т.е. выполняется $T_{\text{АВ}} \subset Th(\text{ИВ})$ и, следовательно, $T_{\text{АВ}} = Th(\text{ИВ})$.

Следствия теоремы полноты ИВ.

Теорема о непротиворечивости ИВ.

В исчислении высказываний невозможно доказать никакую формулу Ф вместе с ее отрицанием $\neg$Ф.

Теорема о разрешимости ИВ.

Существует универсальная эффективная процедура (алгоритм), которая для любой формулы определяет, является ли эта формула теоремой ИВ.