

Шестёркина Елена  
Сергеевна

# Элементы математической ЛОГИКИ

Введение

# Периоды развития математики

В истории цивилизации можно выделить три крупных периода:

- **сельскохозяйственный, или аграрный** — до XVII в.;
- **индустриальный** — с XVII по XX в.;
- **информационный** — с XX в.

Эти периоды определялись научно-техническими революциями и, следовательно, характером тех систем и явлений природы, которые вовлекались в сферу главных производственных интересов и потребностей людей. В каждый период создавались новые технологии производства, новая картина реального мира, новые системы знаний (науки) и, в частности, новая математика.

# Периоды развития математики



# Новый период развития математики

Дискретной математикой называют совокупность математических дисциплин, изучающих свойства абстрактных дискретных объектов.

Фундаментом дискретной математики являются:

- Теория множеств;
- Математическая логика;
- Теория графов;
- Теория кодирования;
- Теория автоматов.

# Новый период развития математики

Стимулы развития дискретной математики:

- растущий поток информации и проблемы ее передачи, обработки и хранения привели к возникновению и развитию **теории кодирования**;
- различные экономические задачи, задачи электротехники стимулировали создание и развитие **теории графов**;
- связь релейно-контактных схем с формулами алгебры логики и их использование для описания функционирования автоматов дали начало развитию и применению **математической логики и теории автоматов**.

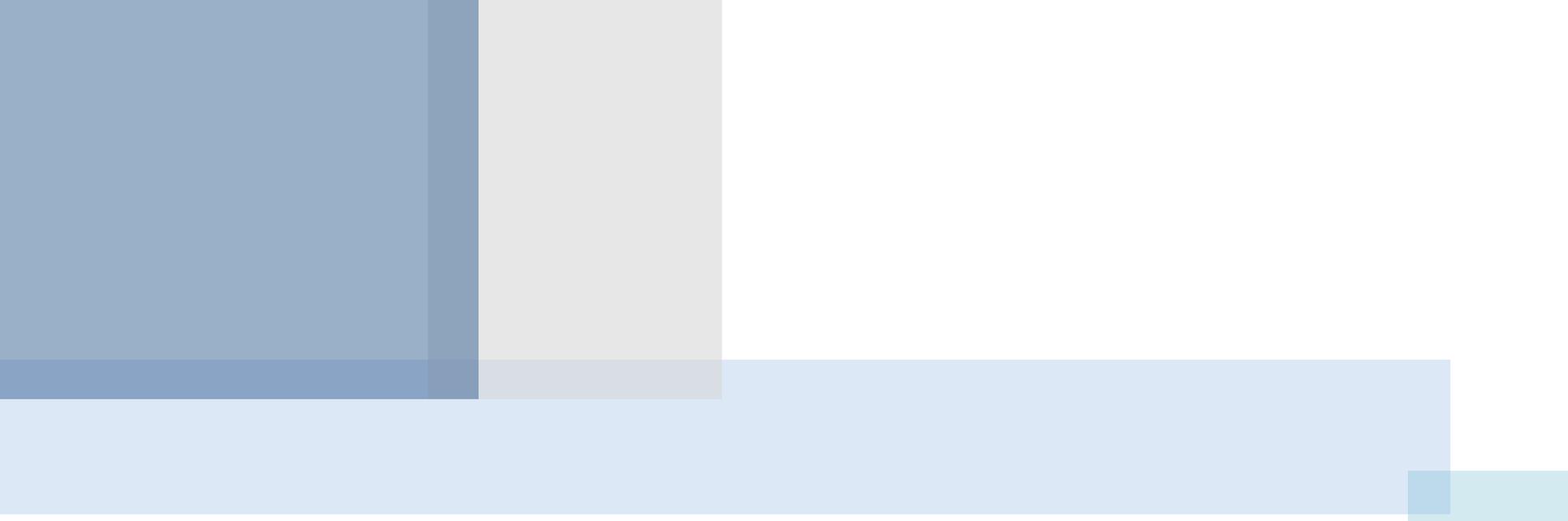
# Обозначения

Кванторы:

- Квантор общности:  $\forall$  - «любой», «всякий», «каждый»;
- Квантор существования:  $\exists$  - «существует», «найдется», «можно найти»;
- $\Leftrightarrow$  «тогда и только тогда», «необходимо и достаточно»;
- $\Rightarrow$  «следует», «выполняется»;
- $:$  или  $|$  «такой, что»
  
- Пример:

$$(\forall x \in M) (\exists y \in N: y < x)$$

«для любого  $x$  из множества  $M$  существует  $y$  из множества  $N$  такой что  $y$  меньше, чем  $x$ »



# **Математическая ЛОГИКА**

**Этапы развития логики как  
науки**

# Понятие логики

Логика (др.-греч. λογική — «наука о рассуждении», «искусство рассуждения» от λόγος — «речь», «рассуждение») — наука о формах, методах и законах интеллектуальной познавательной деятельности, формализуемых с помощью логического языка.

Поскольку это знание получено разумом, логика также определяется как наука о правильном мышлении.

# Понятие логики

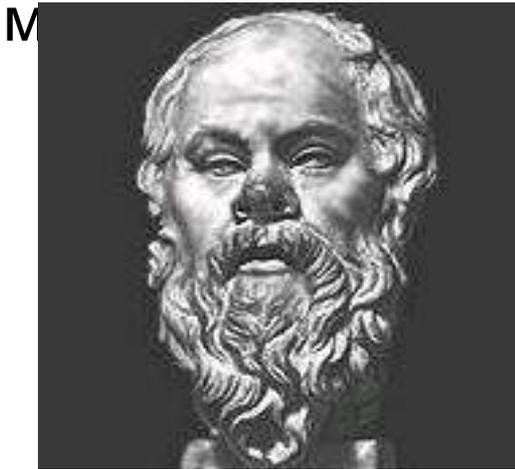
Логика как наука изучает способы достижения истины в процессе познания опосредованным путём, не из чувственного опыта, а из знаний, полученных ранее, поэтому её также можно определить как науку о способах получения выводного знания.

Одна из главных задач логики — определить, как прийти к выводу из предпосылок (правильное рассуждение) и получить истинное знание о предмете размышления.

Логика служит одним из инструментов почти любой науки.

# История

Первые учения о формах и способах рассуждений возникли в странах Древнего Востока (Китай, Индия), но в основе современной логики лежат учения, созданные в 4 веке до нашей эры древнегреческими



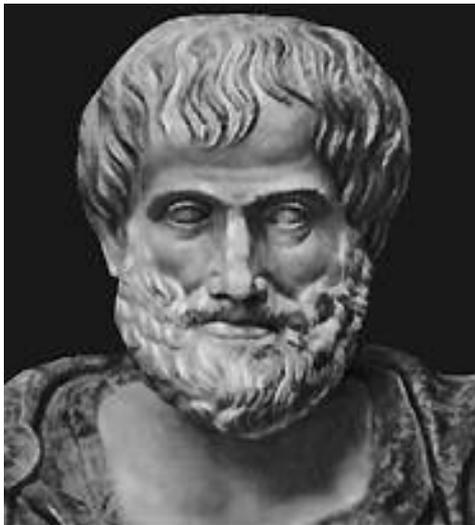
Основателем логики, как науки, считают **Сократа** (469-399г до н.э.). На первый план он выдвинул проблему метода, посредством которого можно получить истинное знание.

*Сократ:*

*"Я знаю, что я ничего не знаю."*

# Классическая логика

## 1 этап «Классическая логика»



**АРИСТОТЕЛЬ**  
(384-322 до н. э.)

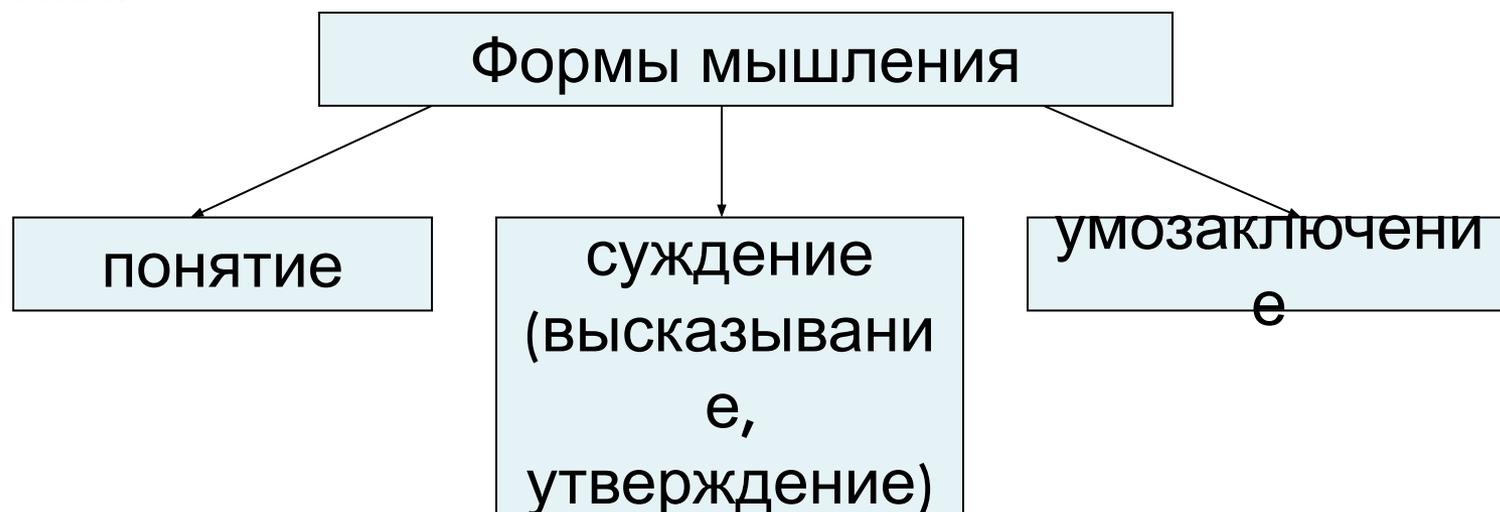
Основы формальной логики заложил Аристотель, который впервые отделил логические формы речи от ее содержания.

Он исследовал терминологию логики, подробно разобрал теорию умозаключений и доказательств, описал ряд логических операций, сформулировал основные законы мышления.

Заслуга ученого состоит в том, что он отделил форму мышления от содержания.

# Формы мышления

Объектами изучения классической логики являются различные **формы мышления** – понятия, суждения, умозаключения, их виды и операции над ними, доказательства, опровержения, гипотезы, законы логики.



# Понятие

**Понятие** – это форма мышления, фиксирующая основные, существенные признаки объекта.

Понятия – это наши знания о некоторых предметах и явлениях окружающего мира.

В структуре каждого понятия нужно различать логические характеристики: **содержание и объем**.

# Понятие

Содержание понятия составляет совокупность существенных признаков предмета.

## **Пример.**

Понятие: «квадрат».

Содержание понятия: «быть прямоугольником и иметь равные стороны» или «быть ромбом и иметь прямые углы».

Чтобы раскрыть содержание понятия, следует выделить признаки, необходимые и достаточные для выделения данного предмета по отношению к другим предметам.

# Понятие

**Объем** понятия определяется совокупностью предметов, на которые оно распространяется.

## **Пример.**

Понятие: «столица государства».

Объем понятия: Москва, Париж, Пекин, Лондон и т.д.

Объем понятия может быть представлен в форме множества, состоящего из объектов, на которое данное понятие распространяется.

# Понятие

Понятие: «Персональный компьютер».

Содержание понятия: «Персональный компьютер — это универсальное электронное устройство для автоматической обработки информации, предназначенное для одного пользователя».

Объем понятия: совокупность (сотни миллионов) существующих в настоящее время в мире персональных компьютеров.

# Суждение

Для выявления отношений между понятиями мы используем суждения.

**Суждением** называется форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о существовании предмета, связях между предметом и его свойствами или об отношениях между предметами.

Суждения выражают наши знания о связях между понятиями.

Пример суждения: «Знание математической логики необходимо любому специалисту».

# Суждение

“Многогранник – это такое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников”.

Понятия: “многогранник”, “тело”, “поверхность”, “число”, “многоугольник”.

Суждения: “Многогранник – это тело”, “Поверхность состоит из конечного числа плоских многоугольников”.

# Умозаключение

**Умозаключение** — процесс рассуждения, в ходе которого осуществляется переход от некоторых исходных суждений (предпосылок) к новым суждениям — заключениям.

## Пример.

«Если число делится на 6, то оно четное»;

«Число 18 делится на 6»,

«Число 18 четное».

} предпосылк  
и  
← заключени  
я

Это верное  
умозаключение.

# Умозаключение

Все металлы - простые вещества.

Литий – металл.

---

Литий - простое вещество.

~~«Некоторые выпуклые фигуры — круги»,  
«Некоторые многоугольники — выпуклые  
фигуры»~~

~~«Некоторые многоугольники — круги».~~

~~«Некоторые французы — блондины»,  
«Некоторые курящие — французы»,  
«Некоторые курящие — блондины».~~

# Классическая логика

Значительный вклад в развитие классической логики внесли также английский философ и естествоиспытатель Фрэнсис Бэкон и французский философ и математик Рене Декарт.



Фрэнсис Бэкон  
22.01.1561 – 09.04.1626



Рене Декарт  
31.03.1596 –  
11.02.1650

# Математическая логика

## 2 этап «Математическая (символьная) логика»



Лейбниц  
Готфрид Вильгельм  
(01.07.1646 —  
14.11.1716)

Этот период развития логики как науки связан с работами немецкого физика, математика, и философа Готфрида Вильгельма Лейбница, целью которого было применение логики для теоретического обоснования математики.

С другой стороны, у Лейбница возникла идея придать рассуждениям вид вычислений.

# Математическая логика

Мечты Лейбница частично удалось воплотить в жизнь ирландскому математику и логика Джорджу Булю, который создал алгебру логики (булеву алгебру).



Джордж Буль  
(2.11.1815  
—8.12.1864)

Алгебра логики изучает строение суждений (высказываний) и способы установления их истинности с помощью алгебраических методов. Применяется как математический аппарат для работы с информацией в двоичном коде.

# Математическая логика

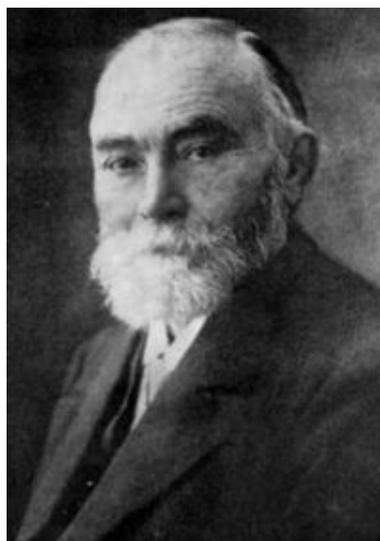
Всесторонне обобщил и развил достижения Дж. Буля русский астроном и математик Порецкий Платон Сергеевич (03.10.1846 - 09.08.1907). Его важнейшие работы: "Об основах математической логики" и "О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики".

Огромный вклад в развитие символической логики внесли такие учёные, как Огастес де Морган - шотландский математик и логик; Фридрих Людвиг Готлоб Фреге - немецкий логик, математик и философ; Чарльз Сандерс Пирс - американский философ, логик, математик.

# Математическая логика



Огастес де Морган  
27.06.1806—8.03.1871



Фридрих Людвиг  
Готлоб Фреге  
8.11.1848—26.07.192



Чарльз Сандерс  
Пирс  
10.09.1839—19.04.1914

# Математическая логика

В математической логике изучаются способы (правила) формального представления суждений (высказываний), построения новых высказываний из уже имеющихся с помощью логических преобразований, а так же способы (методы) установления истинности или ложности высказываний.

Математическая логика служит для создания алгоритмов логического вывода.

# Математическая логика

В состав математической логики входят логика высказываний и охватывающая ее логика предикатов, для построения которых существуют два подхода (языка), образующих два варианта формальной логики: алгебру логики и логические исчисления)



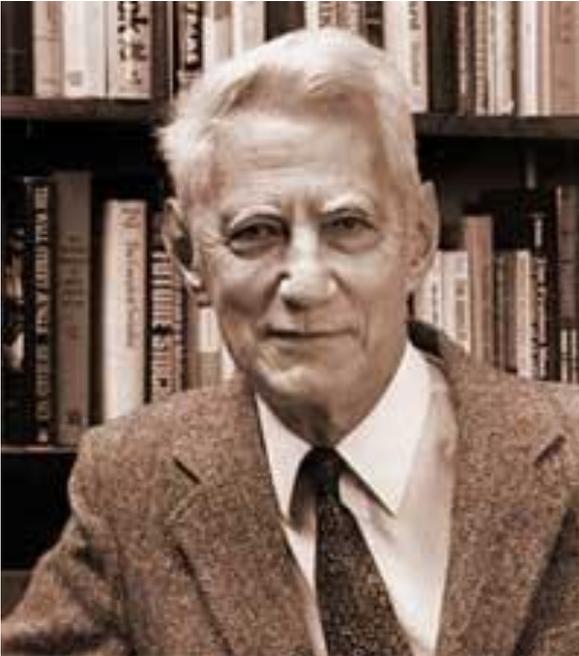
# Современный период

## 3 этап «Современный период»

Через некоторое время стало понятно, что система Буля хорошо подходит для описания электрических переключателей схем. Ток в цепи может либо протекать, либо отсутствовать, подобно тому как утверждение может быть либо истинным, либо ложным.

А еще несколько десятилетий спустя, уже в XX столетии, ученые объединили созданный Джорджем Булем математический аппарат с двоичной системой счисления, заложив тем самым основы для разработки цифрового электронного компьютера.

# Современный период



Клод Шеннон  
(1916-2001г)

В 1936 году американский математик Клод Шеннон, которому был тогда 21 год, сумел ликвидировать разрыв между алгебраической теорией логики и ее практическим применением.

Постепенно у Шеннона стали вырисовываться контуры устройства компьютера. Если построить электрические цепи в соответствии с принципами булевой алгебры, то они могли бы выражать логические отношения, определять истинность

# Современный период



Джон фон Нейман  
1903-1957

В 1944 году фон Нейман был направлен в качестве консультанта по математическим вопросам в группу разработчиков первой ЭВМ ENIAC.

После окончания строительства ENIAC фон Нейман опубликовал отчет **"Предварительное обсуждение логической конструкции электронной вычислительной машины"**. Этот отчет стал исходным пунктом в конструировании новых машин.

# Современный период

В середине XX века развитие вычислительной техники привело к появлению логических элементов, логических блоков и устройств вычислительной техники, что было связано с дополнительной разработкой таких областей логики, как проблемы логического синтеза, логическое проектирование и логического моделирования логических устройств и средств вычислительной техники.

# Современный период

В 80-х годах XX века начались исследования в области искусственного интеллекта на базе языков и систем логического программирования. Началось и создание экспертных систем с использованием и развитием автоматического доказательства теорем, а также методов доказательного программирования для верификации алгоритмов и программ для ЭВМ.