# Числовые последовательности

# Предел числовой последовательности

*Рассмотрим числовую последовательность, общий член которой приближается к некоторому числу $a$ при увеличении порядкового номера $n$.*
*В этом случае говорят, что числовая последовательность имеет предел. Это понятие имеет более строгое определение.*

*Число $a$ называется пределом числовой последовательности $\{u_n\}$ если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N = N(\varepsilon)$, зависящее от $\varepsilon$, что $|u_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = a}$$

# Предел числовой последовательности

*Это определение означает, что $a$ есть предел числовой последовательности, если её общий член неограниченно приближается к $a$ при возрастании $n$. Геометрически это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $N$, что начиная с $n > N$ все члены последовательности расположены внутри интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.*

*Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся; в противном случае – расходящейся.*

# Рассмотрим последовательность:

$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \ldots;\ \frac{1}{n};\ \ldots$ – *гармонический ряд* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0}$

*Если* $m\in N,\ k\in R$, *то* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n^m}=0}$

*Если* $|q|<1$, *то* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0}$

*Если* $|q|>1$, *то последовательность* $y_n=q^n$ *расходится*

# Свойства пределов

*Если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b, \qquad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = c,$ *то*

1. *предел суммы равен сумме пределов:*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = b + c}$$

2. *предел произведения равен произведению пределов:*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = bc}$$

3. *предел частного равен частному пределов:*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{b}{c}}$$

4. *постоянный множитель можно вынести за знак предела:*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} (kx_n) = kb}$$

# Примеры:

1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot 0=0$$

2) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}+3\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}+\lim_{n\to\infty}3=0-0+3=3$$

3) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\ldots\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0\cdot\ldots\cdot 0=0$$

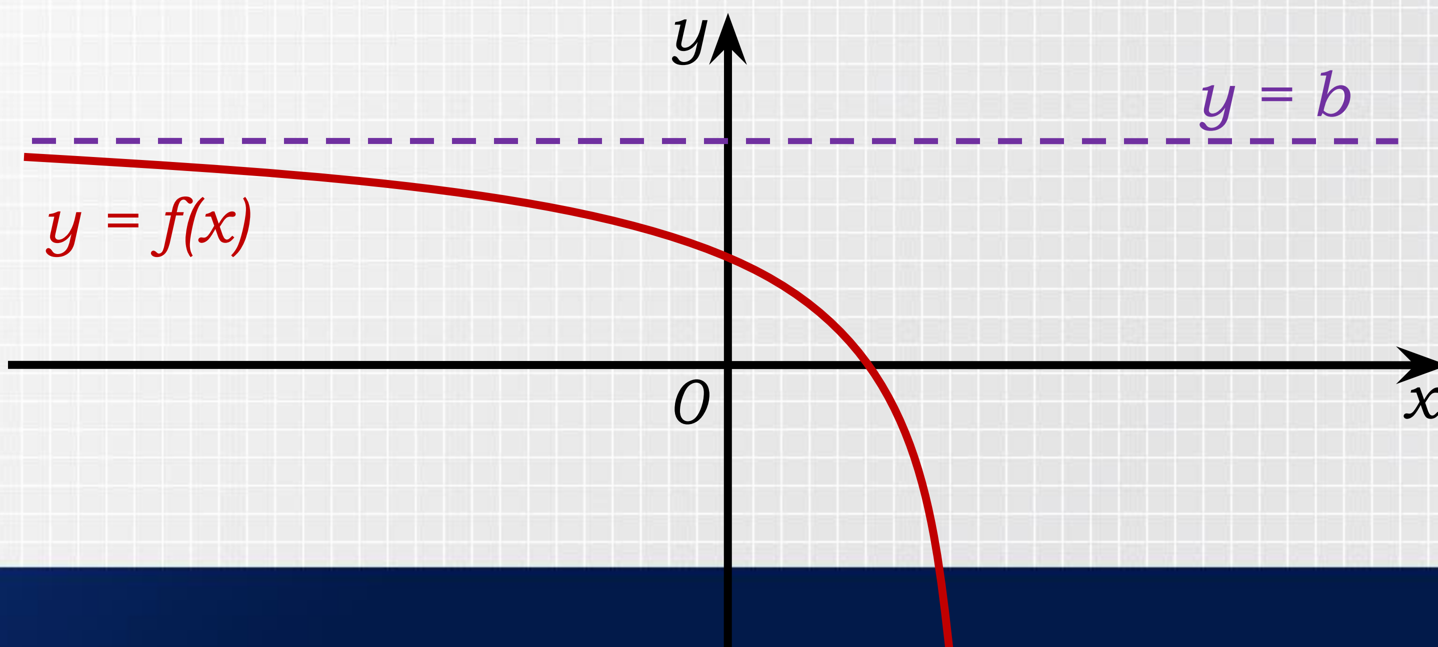
4) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+3}{n^2+4}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2n^2}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{4}{n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{4}{n^2}}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)}=\frac{2+0}{1+0}=2$$

# Горизонтальная асимптота графика функции

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} f(n) = b}$$

*Это равенство означает, что прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика последовательности $y_n = f(n)$, то есть графика функции $y = f(x)$, $x \in N$*



# Сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$S=\frac{b_1}{1-q}$$

*Дано:* $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + \ldots = 9;$
$(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2 + (b_4)^2 + \ldots + (b_n)^2 + \ldots = 40{,}5.$
*Найти:* $b_5$.
*Решение:*

$$\begin{cases}\dfrac{b_1}{1-q}=9,\\ \dfrac{b_1^2}{1-q^2}=40{,}5;\end{cases}\quad \begin{cases}b_1=9(1-q),\\ \dfrac{9^2(1-q)^2}{1-q^2}=40{,}5;\end{cases}\quad \begin{cases}b_1=9(1-q),\\ \dfrac{1-q}{1+q}=\dfrac{1}{2};\end{cases}\quad \begin{cases}b_1=6,\\ q=\dfrac{1}{3}.\end{cases}$$

$$b_5=6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{2}{27}.$$

*Ответ:* $\dfrac{2}{27}$.