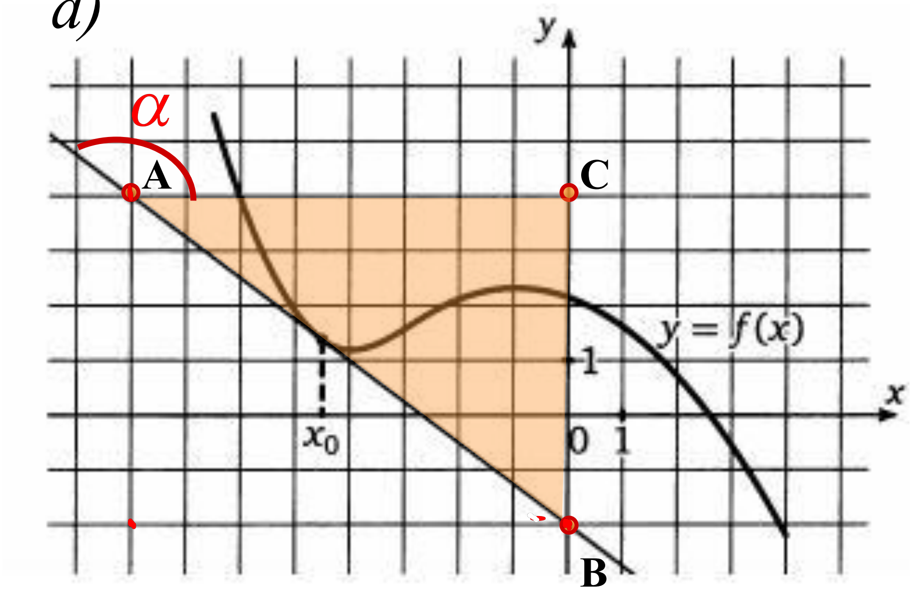
В помощь

дорогому студенту.

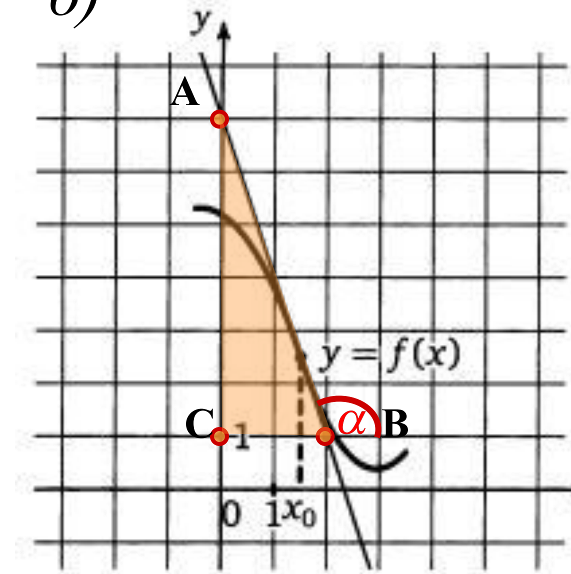
Проверь себя.

Задача 1.3. На рисунке изображен график функции *y = f (x)*, и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции *y = f (x)* в точке x_0.

а)



б)



Решение.

$$f'(x_0) = k = tg\alpha,$$

$$tg(180^\circ - \alpha) = -\frac{BC}{AC} = -\frac{6}{8} = -0,75.$$

Ответ: - 0,75 .

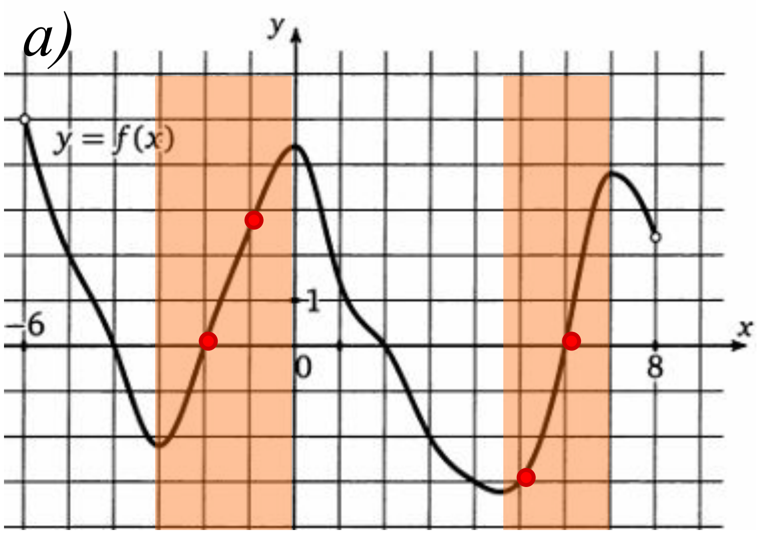
$$f'(x_0) = k = tg\alpha,$$

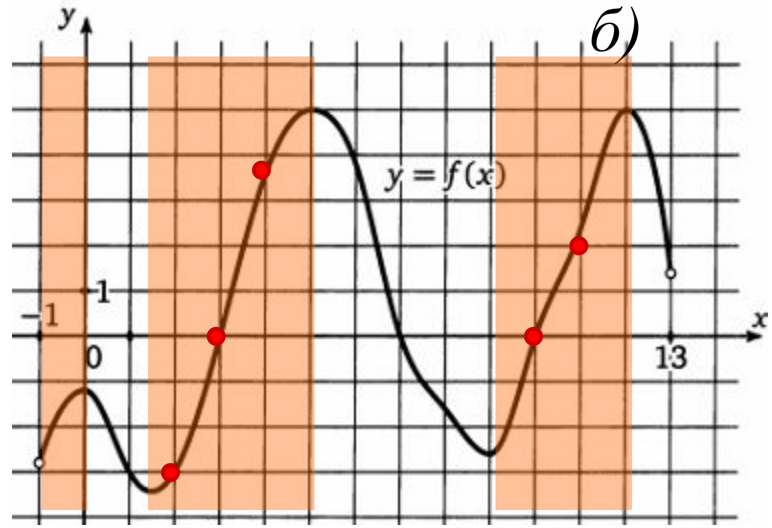
$$tg(180^\circ - \alpha) = -\frac{AC}{BC} = -\frac{6}{2} = -3.$$

Ответ: - 3 .

Задача 3.3. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(a;b)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.

Решите самостоятельно!





Решение.

$f'(x) > 0$, если $f(x)$ возрастает.

Целые решения при :

x=-2; x=-1; x=5; x=6.

Их количество равно 4.

Ответ: 4.

Целые решения при :

x=2; x=3; x=4; x=10; x=11.

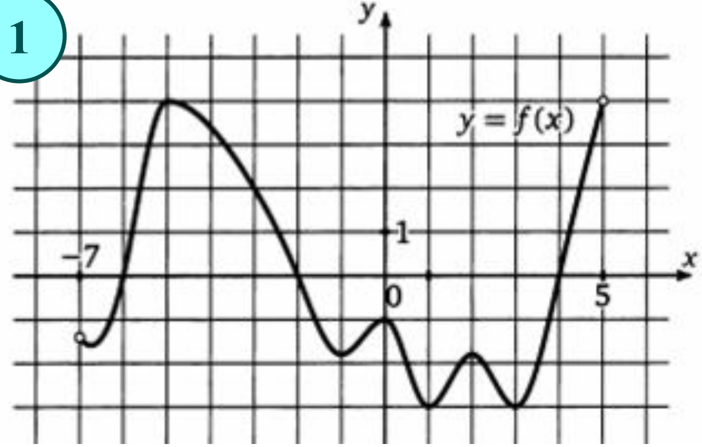
Их количество равно 5.

Ответ: 5.

Задача 4.2. **На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(a; b)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $y = f(x)$ равна 0.**

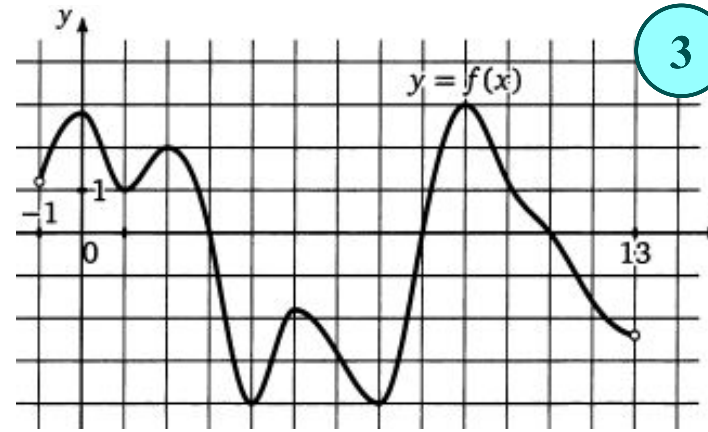
Решите устно!

1



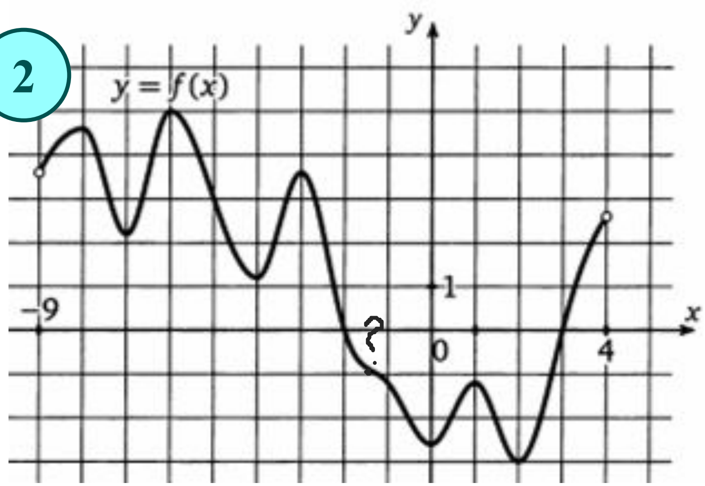
Ответ: 7.

3



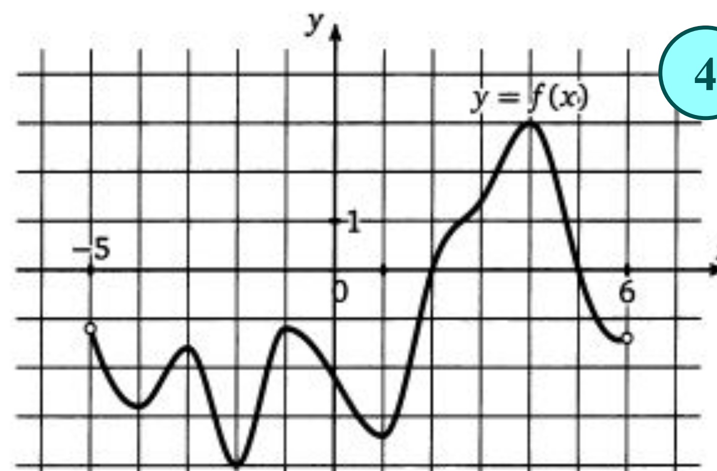
Ответ: 7.

2



Ответ: 8. ?

4

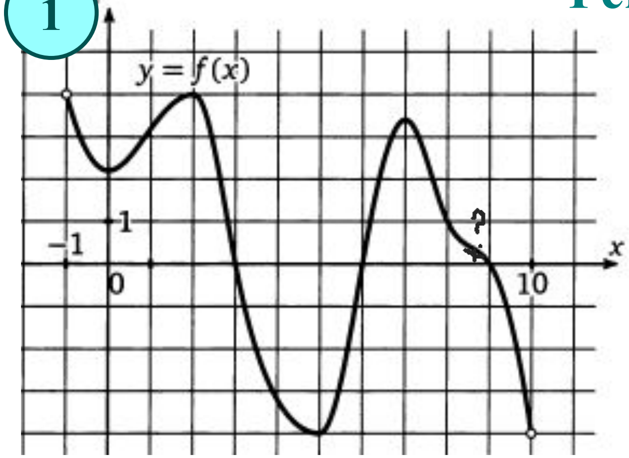


Ответ: 6.

Задача 5.2. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(a; b)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = c$.

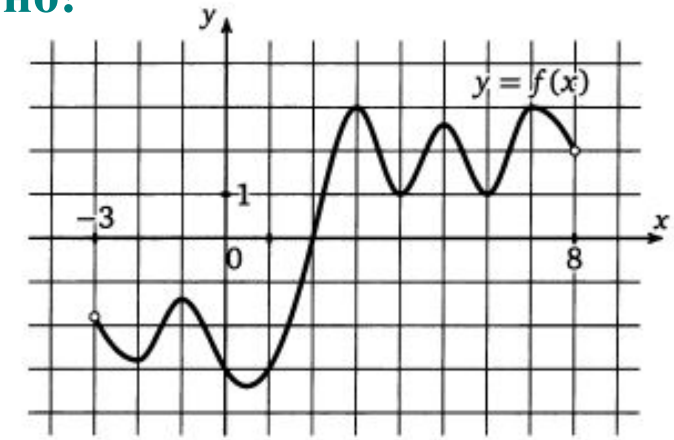
Решите устно!

1



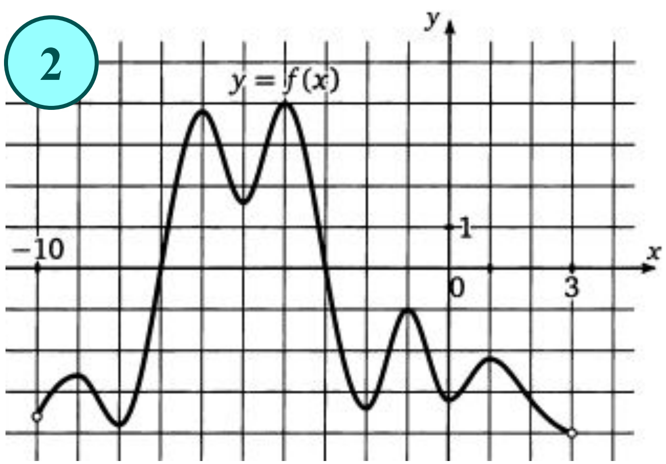
Ответ: 4.?

3



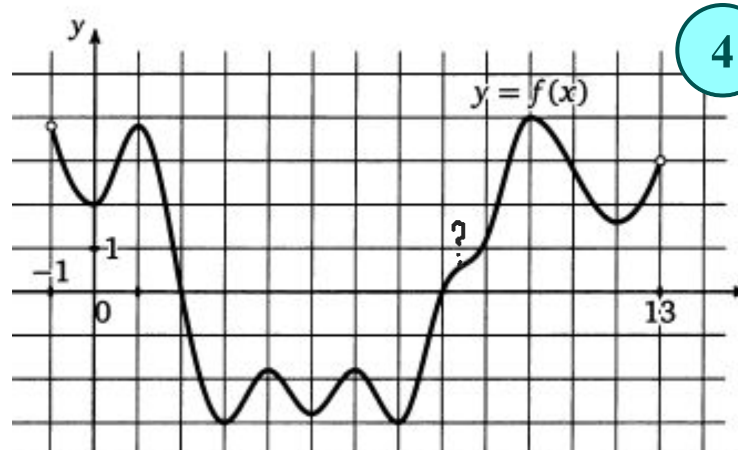
Ответ: 8.

2



Ответ: 9.

4

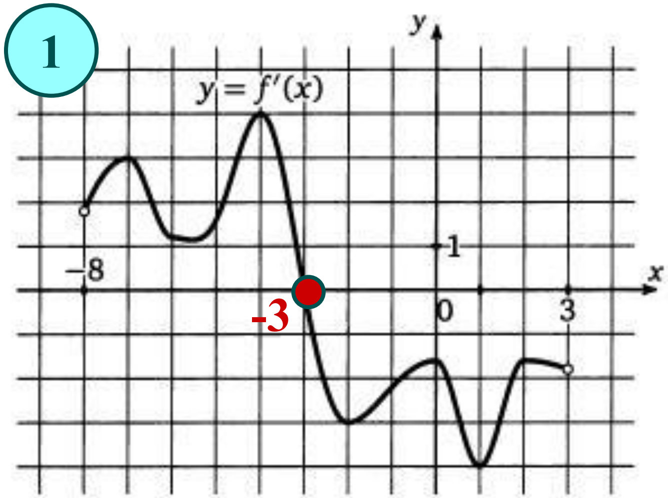


Ответ: 9.?

Задача 6.2. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(a; b)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$.

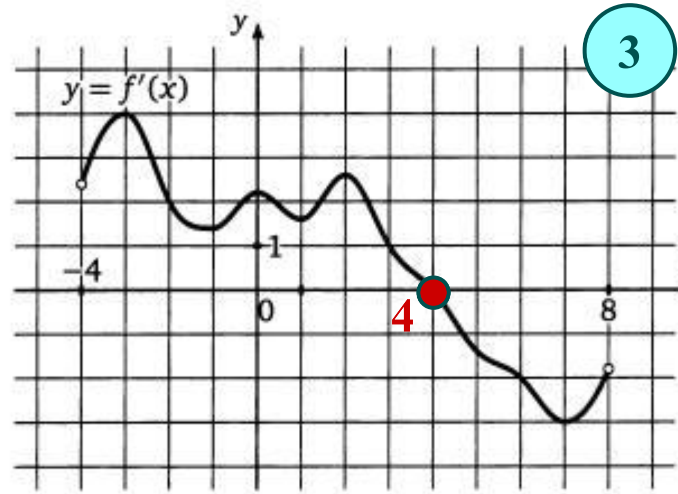
Решите устно!

1



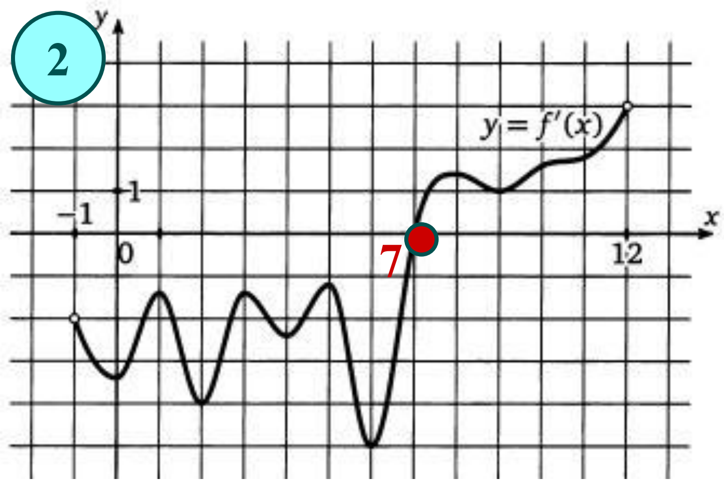
Ответ: -3.

3



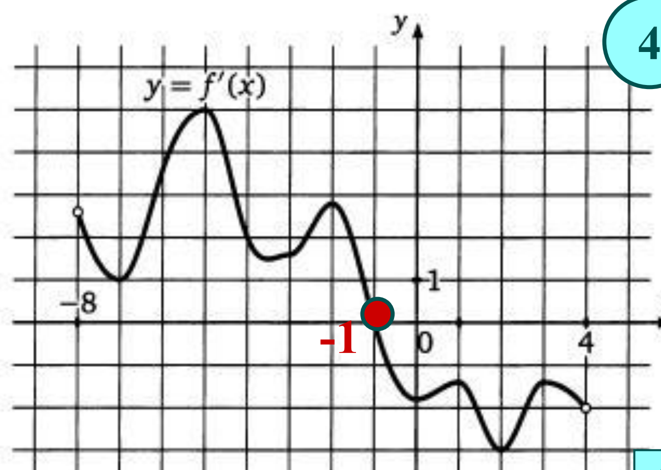
Ответ: 4.

2



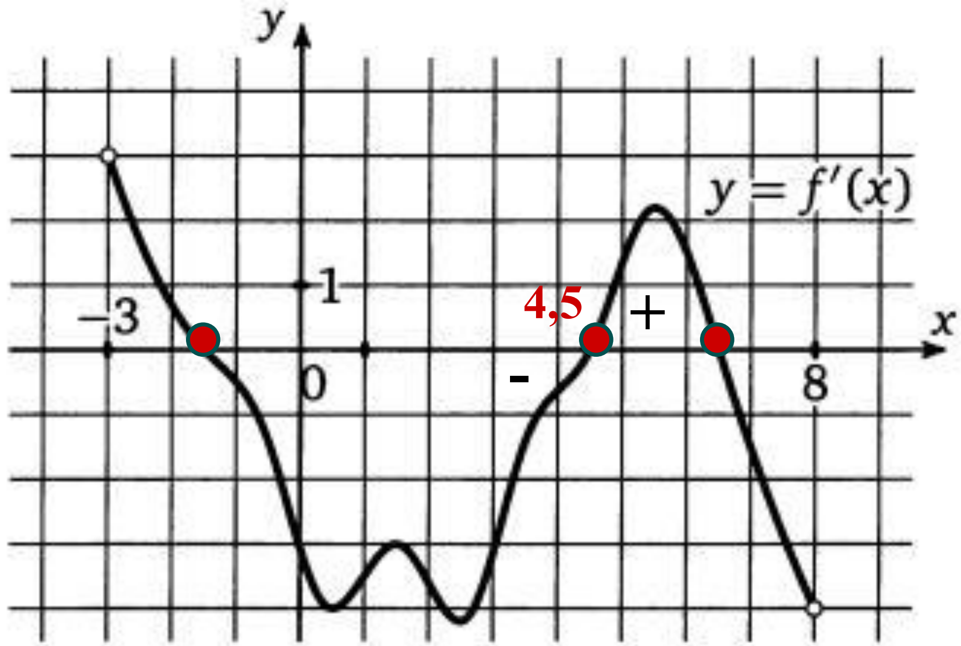
Ответ: 7.

4



Ответ: -1.

Задача 7.1. **На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале (-3; 8). Найдите количество точек минимума функции $y = f(x)$ на отрезке [-2; 7].**

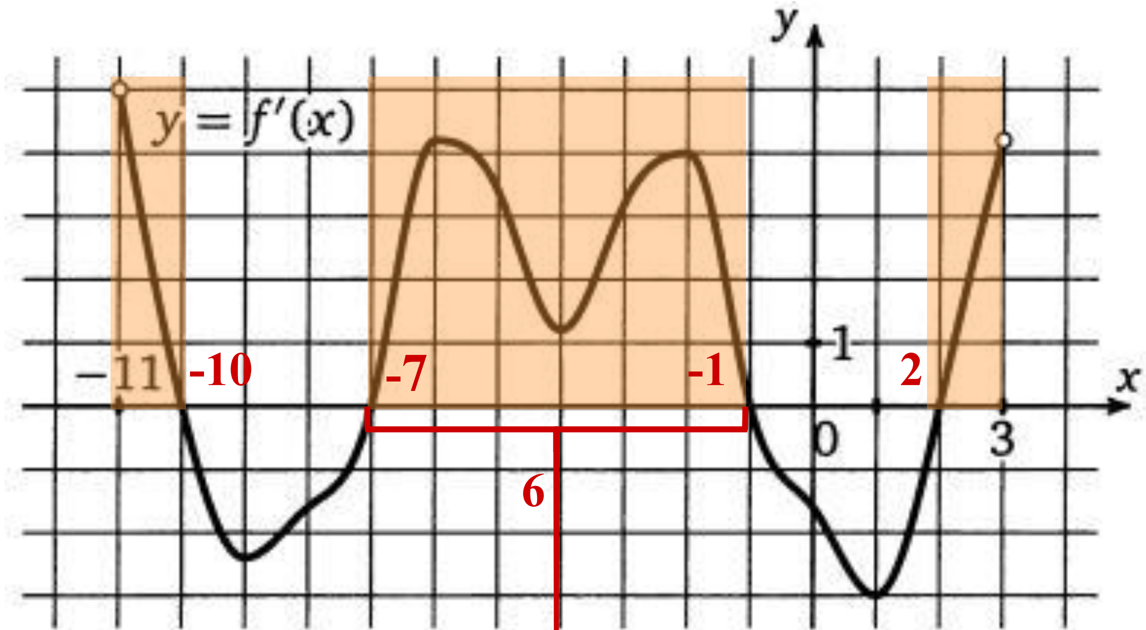


Решение.

В точке минимума производная функции равна нулю либо не существует. Видно, что таких точек на отрезке [-2; 7] три: —1,5; 4,5; 6,5. При этом в точке 4,5 производная слева отрицательна, а справа положительна, значит, это точка минимума. В точках -1,5 и 6,5 производная меняет знак с «+» на «—» это точки максимума.

Ответ: 1 .

Задача 8.1. **На рисунке изображен график производной функции *y = f (x)*, определенной на интервале (-11; 3). Найдите промежутки возрастания функции *f(x)*. В ответе укажите длину наибольшего из них.**



Решение.

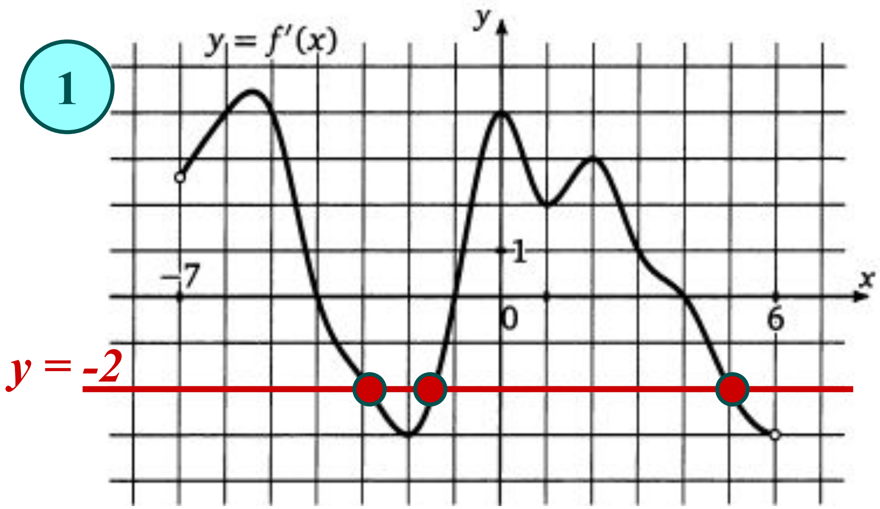
В этой задаче необходимо сначала найти промежутки возрастания функции, т. е. промежутки на которых $f'(x) > 0$.

В нашем случае их три: (-11; -10), (-7; -1) и (2; 3), наибольшую длину из них, очевидно, имеет промежуток (-7; -1), его длина равна:
-1-(-7) = 6.

Ответ: 6 .

Задача 9.2. **На рисунке изображен график производной функции *f(x)*, определенной на интервале (x_1; x_2). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции *f(x)* параллельна прямой $y = -2x + 7$ или совпадает с ней.**

1



Решение.

Касательная к графику функции *f(x)* параллельна прямой $y = -2x+7$ или совпадает с ней, то ее угловой коэффициент равен -2.

Найдем количество точек, в которых $f'(x) = -2$.

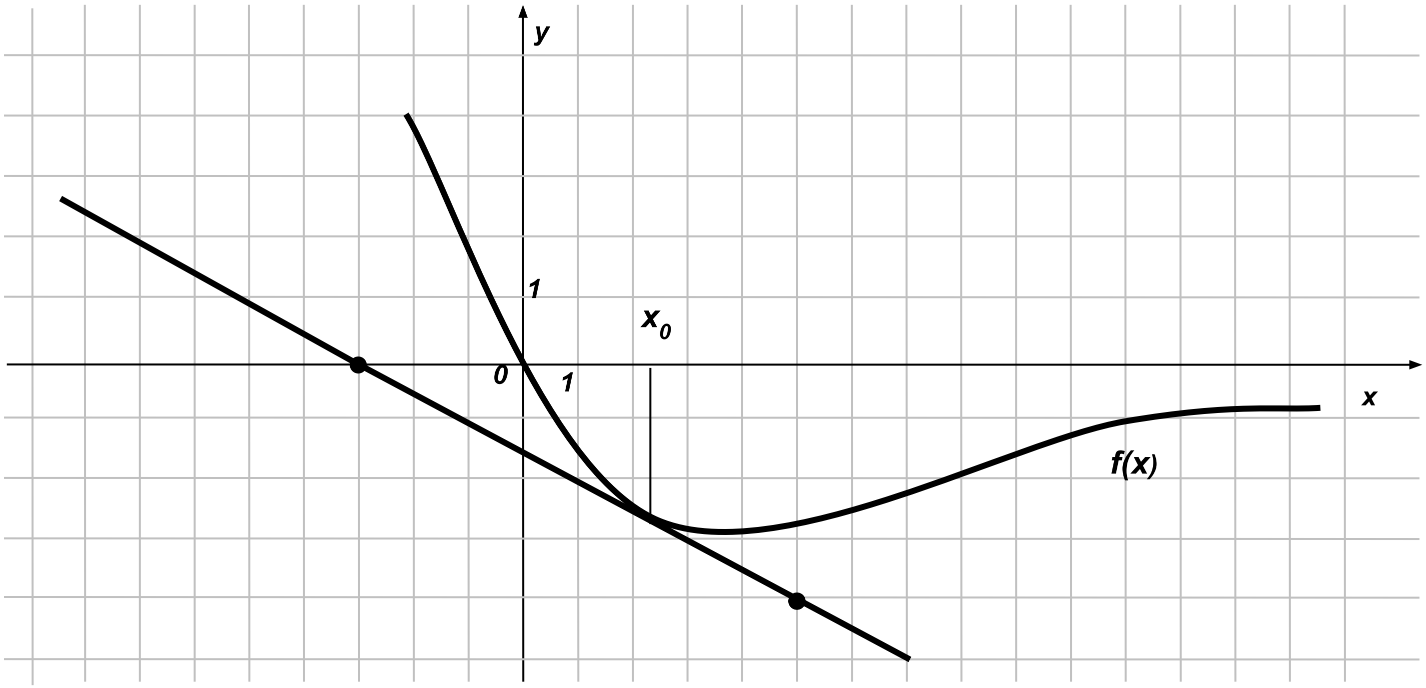
Ответ: 3 .

2

1.

Вариант 1

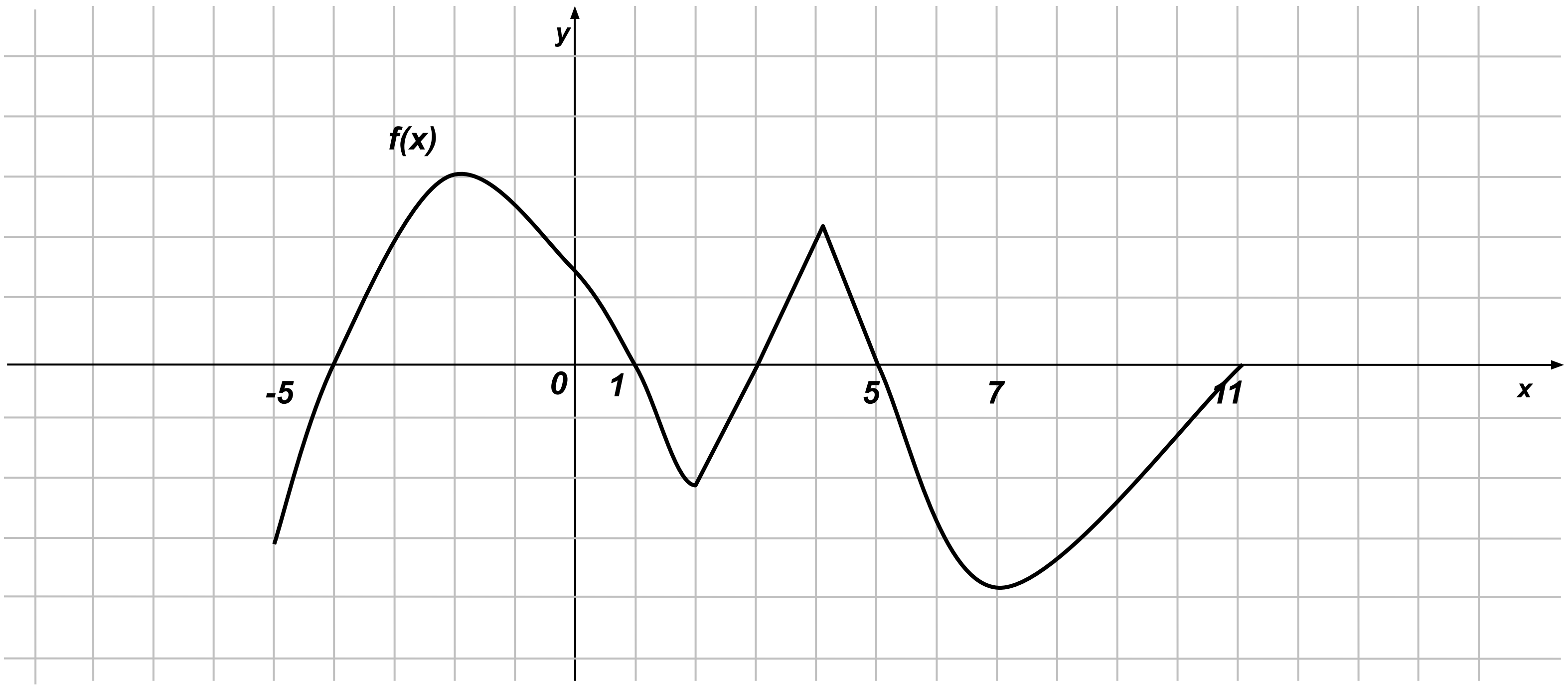
Найдите значение производной функции в точке x_0 по рисунку с изображенным графиком функции $y=f(x)$ и касательной к нему в точке с абсциссой x_0



Вариант 1

2.

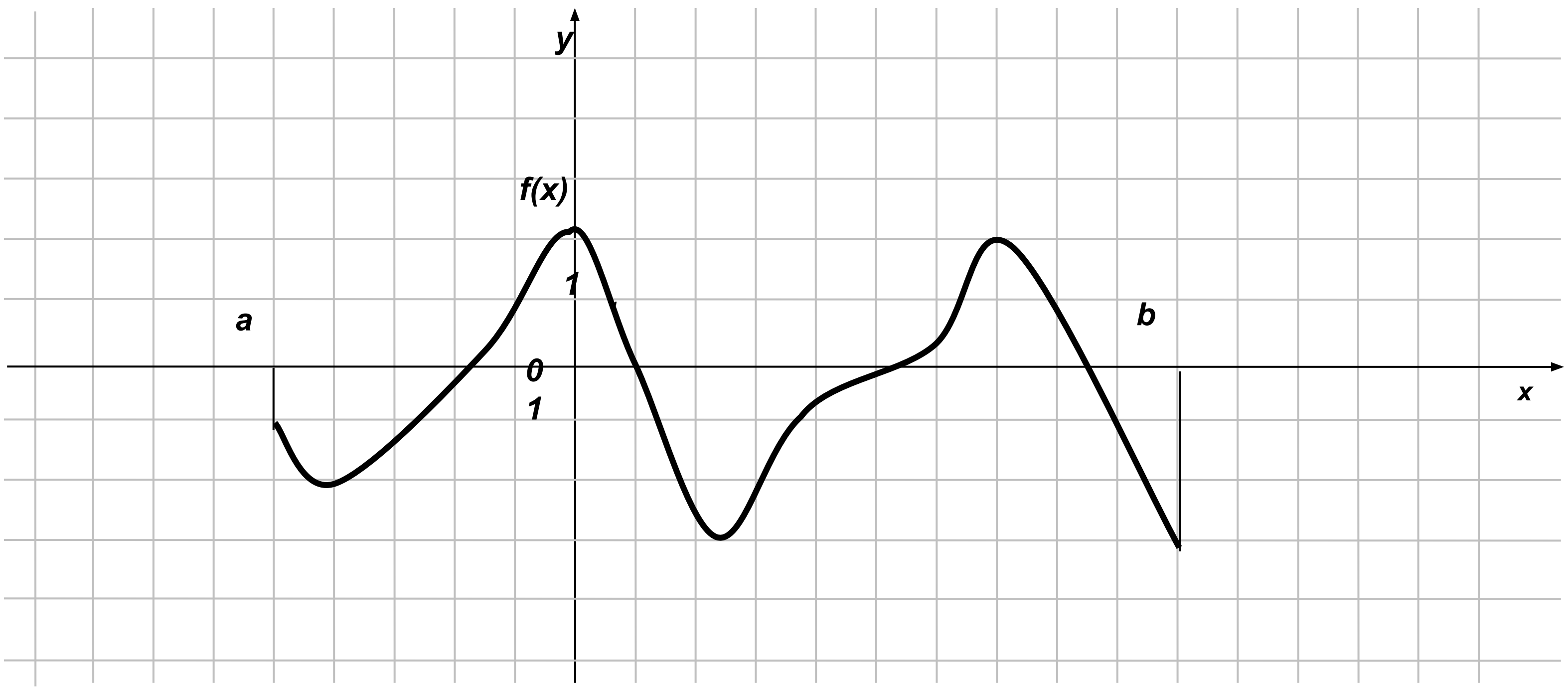
На рисунке изображен график функции y=f(x) определенный на [-5;11]. Определите количество целых значений x, в которых f′(x) < 0



3.

Вариант 1

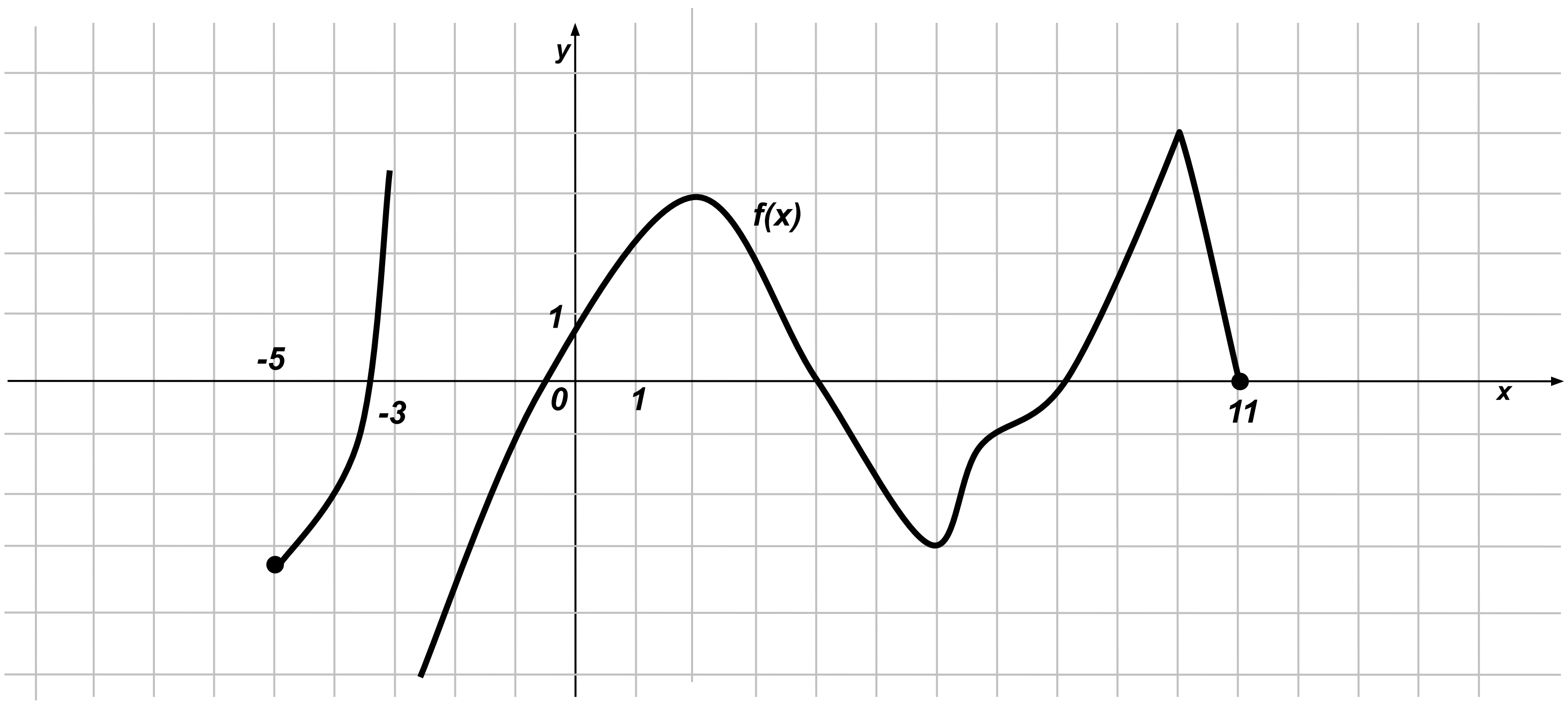
На рисунке изображен график функции y=f(x) на [a;b]. Найдите количество точек, в которых f'(x) =0



4.

Вариант 1

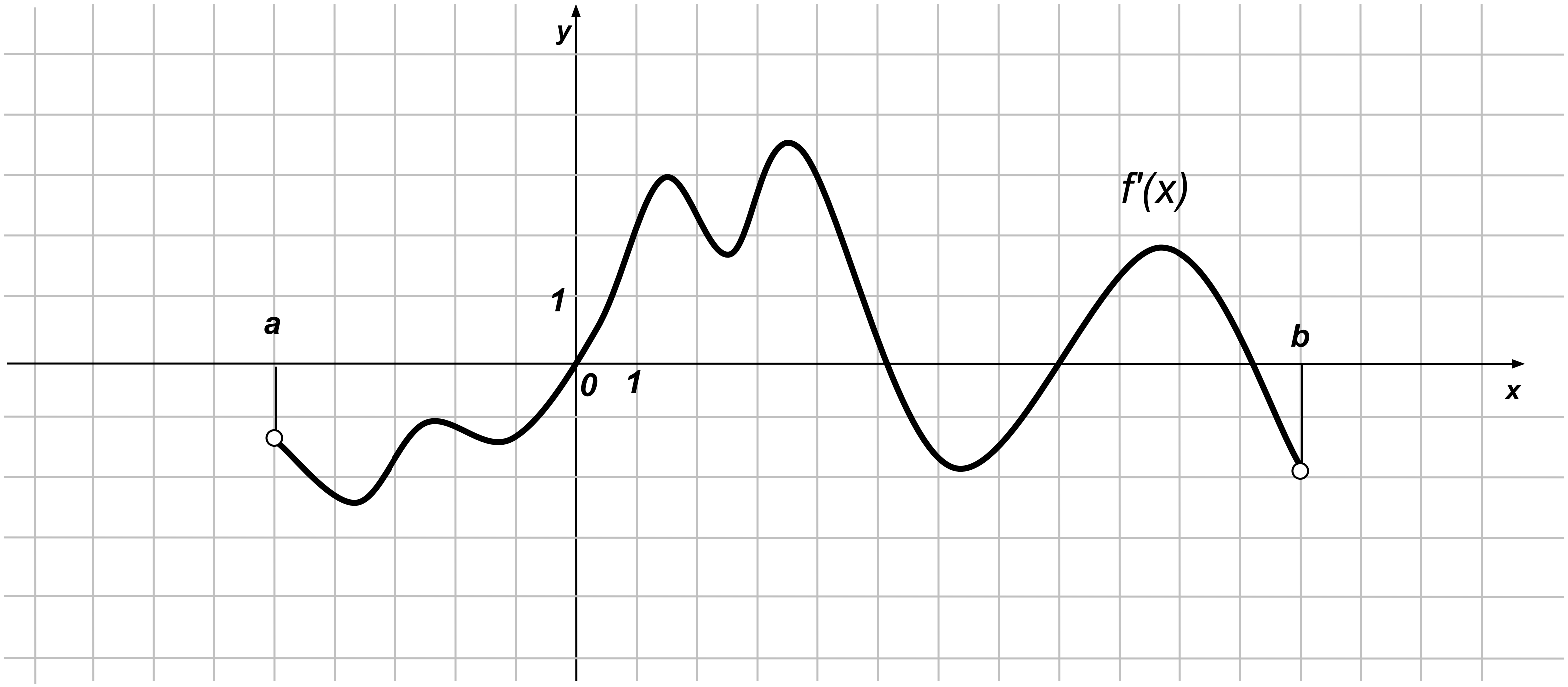
На рисунке изображен график функции y=f(x) на [-5;-3)U(-3;11]. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y=C.



5

Вариант 1

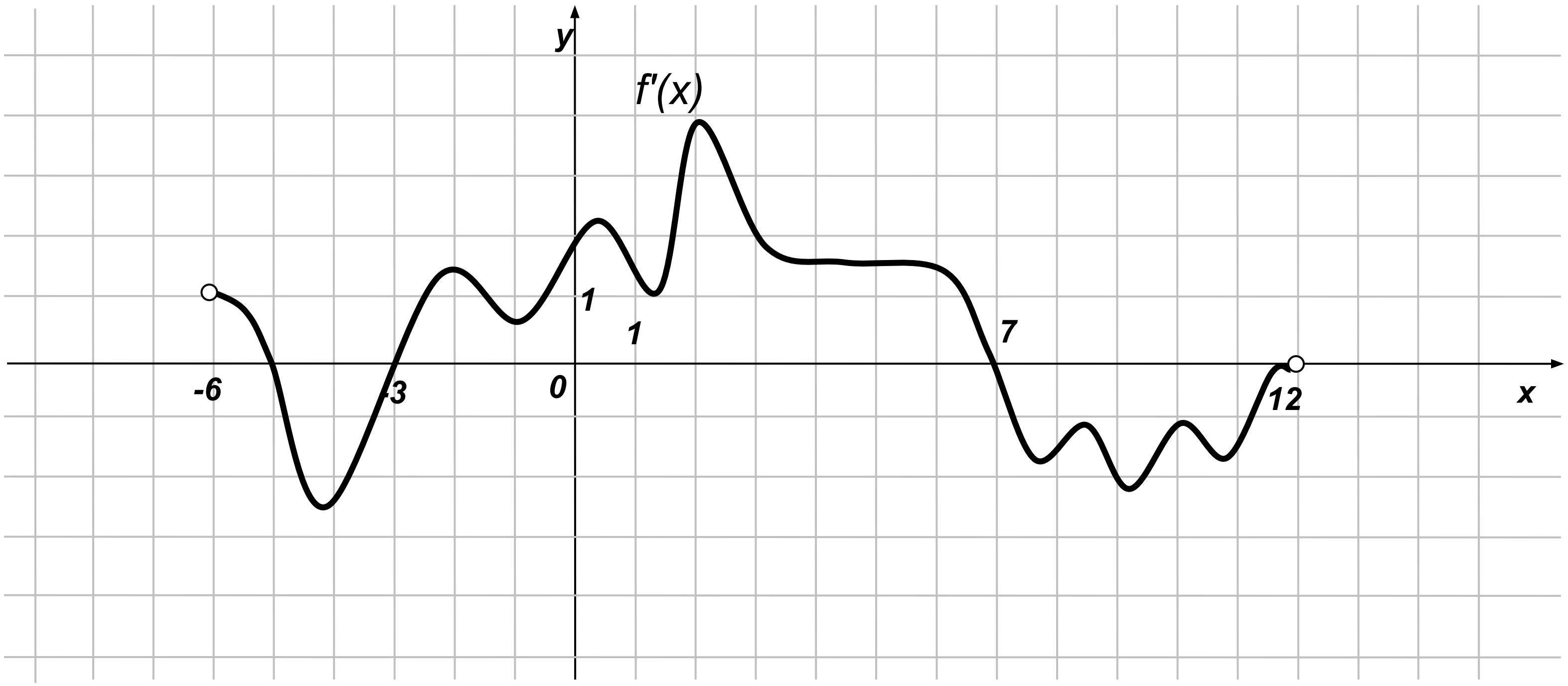
На рисунке изображен график производной функции $y=f'(x)$ на $(a;b)$. Найдите количество точек максимума.



6

Вариант 1

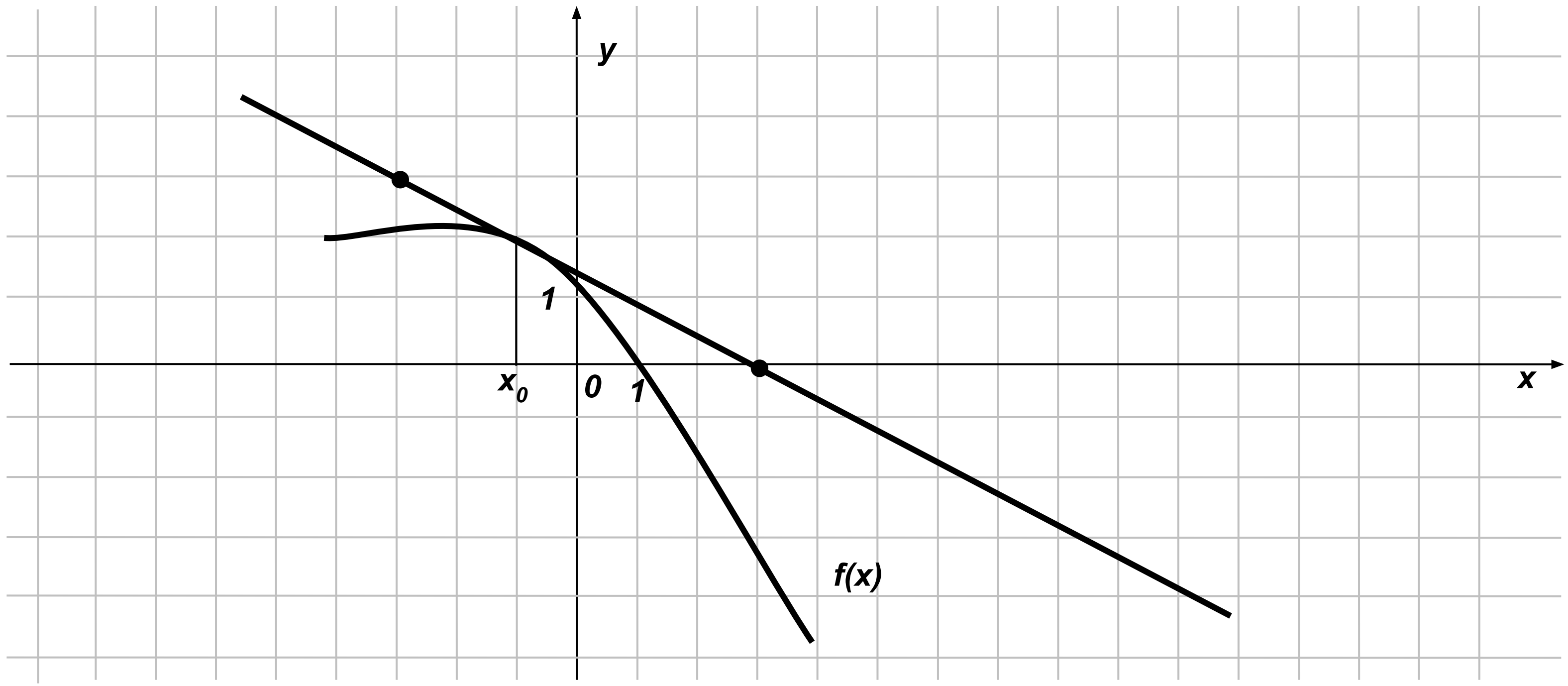
Функция определена на отрезке [-6;12]. На рисунке изображен график ее производной. Укажите длину наибольшего из промежутков возрастания функции.



1.

Вариант 2

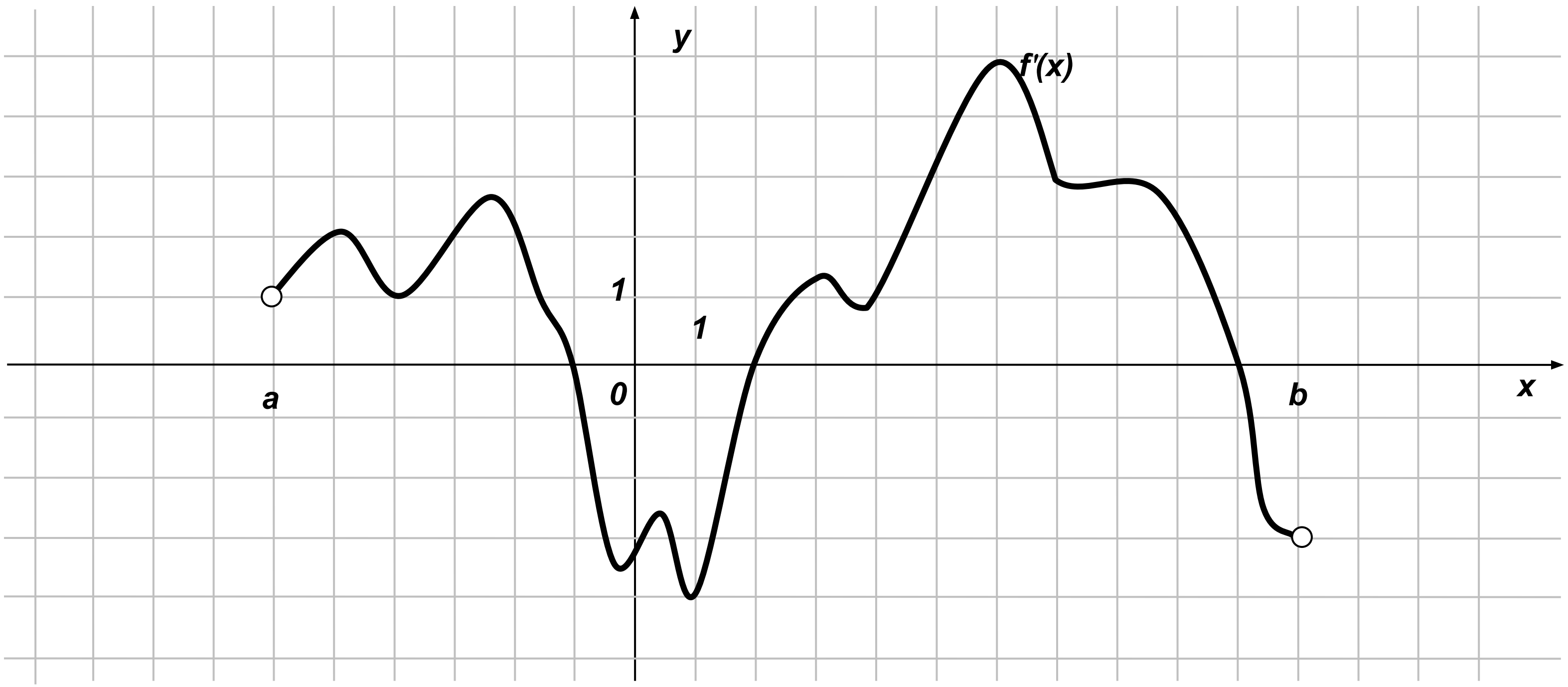
На рисунке изображен график функции и касательная к этому графику, проведенная в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



5.

Вариант 2

На рисунке изображен график производной функции y=f'(x) на (a;b). Найдите количество точек минимума.



$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

1

Найдите наибольшее значение функции
$y = \ln(x+5)^5 - 5x$ на отрезке [-4,5; 0]

1. Найти f $'$(x)

y = 5ln(x+5) – 5x

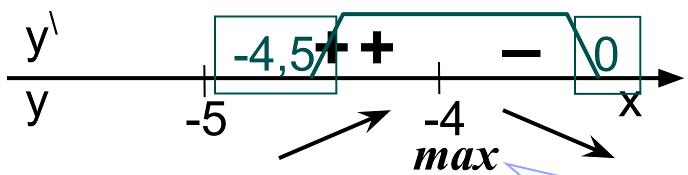
$$y' = 5\cdot\frac{1}{x+5} - 5 = \frac{5}{x+5} - 5 = \frac{-5x-20}{x+5} = $$

Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде

$$= \frac{5(x+4)}{x+5}$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

x = -4 $\in$ [-4,5; 0]



Можно рассуждать иначе

3. Вычислить значения функции в критических точках
~~и на концах отрезка.~~

0

$$y(-4) = \ln 1^5 - 5\cdot(-4) =$$
$$= 0 + 20 = 20$$

~~4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее или наибольшее.~~

Наибольшее значение функция будет принимать в точке максимума. Можно сэкономить на вычислениях значений функции в концах отрезка.

Ответ: 20

$$(cosx)^{/} = -\ sinx$$

2

Найдите наибольшее значение функции
y = 7cosx +16x – 2 на отрезке [-3π/;0]

1. Найти f $^{/}$(x)

$$y^{/} = -7\sin x + 16$$

Функция на всей области определения возрастает. Нетрудно догадаться, что y $^{/}$ > 0.
Тогда наибольшее значение функция будет иметь в правом конце отрезка, т.е. в точке x=0.

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$-7\sin x + 16 = 0$$

$$\sin x = \frac{16}{7}$$

$$\varnothing \quad т.к. \quad \sin x \in [-1;1]$$

0

$$y\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 7\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 16\cdot\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - 2 = -24\pi - 2$$

$$y(0) = 7\cos 0 + 16\cdot 0 - 2 = 7 - 2 = 5$$

Если вы не догадались, то вычислите значения функции в каждом конце отрезка и выберите наибольшее.

Ответ: 5

Практическое применение производной

Российский математик X1X века П.Л.Чебышев говорил: «Особую важность имеют те методы науки, которые позволяют решать практические задачи».

С такими задачами в наше время приходится иметь дело представителям самых разных специальностей:

1) инженеры-технологи стараются так организовать производство, чтобы выпускалось как можно больше продукции;
2) конструкторы пытаются разработать прибор для космического корабля так, чтобы масса прибора была наименьшей;
3) экономисты стараются спланировать связи завода с источниками сырья так, чтобы транспортные расходы оказались минимальными и т.д.

Задачи подобного рода носят общее название – задачи на оптимизацию.

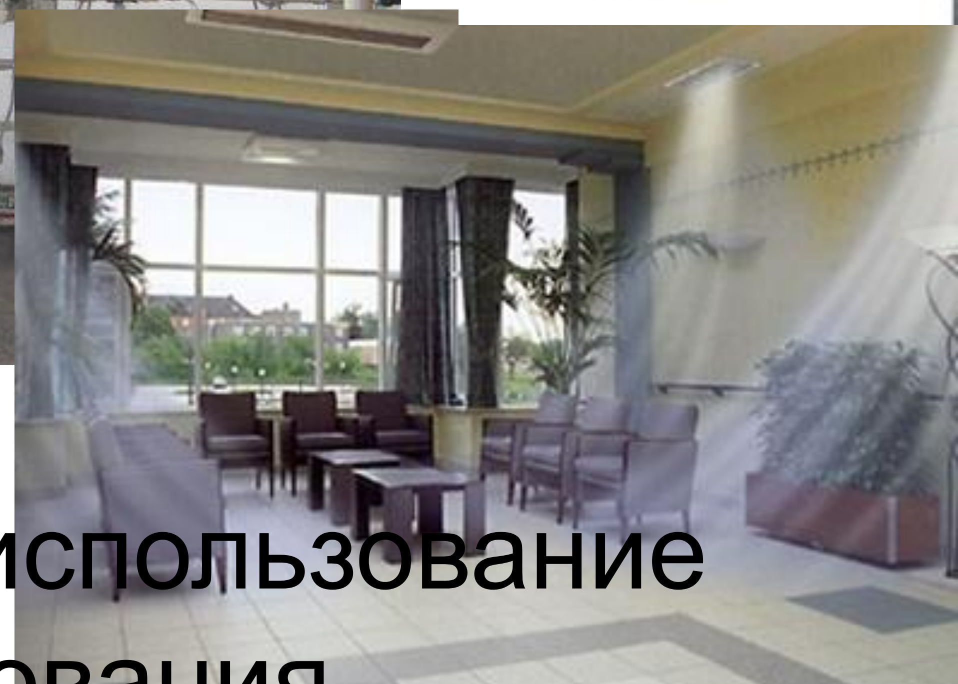
Перевезти дешевле

Получить максимальную энергию солнечных батарей

максимально увеличить полезную площадь

выполнить
объем работ
в кратчайший срок

Экономия пресной воды



эффективное использование
оборудования

Задача. (№46)

Нужно огородить участок прямоугольной формы забором длиной 200 м. Каковы должны быть размеры этого прямоугольника, чтобы площадь была наибольшей?

Дано: Прямоугольник
$P=200$м
$S=S_{наиб}$
Найти: a, b

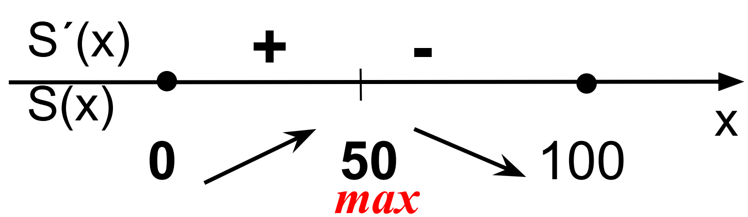
Решение: Пусть a = x м, тогда b= (100-x) м
$S=a*b$ $S=x(x-100)$ $S=x^2-100x$

Найдем, при каких значениях x, функция $S=S(x) = x^2-100x$ принимает наибольшее значение при x принадлежащем [0;100]

$S'=2x-100$

$2x-100>0$

X=50 – точка максимума



Т.О. a=50м b=50м Значит, искомый прямоугольник – квадрат