ВИТИ НИЯУ МИФИ

Векторный и тензорный анализ

(Курс лекций)

Лекция № 1

кафедра математики

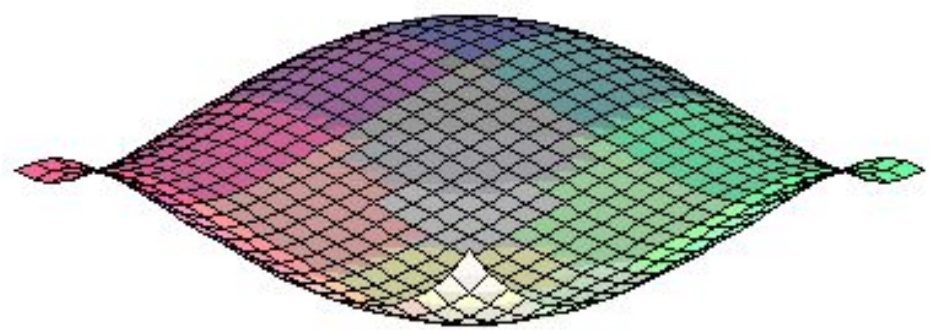
2015г.

построим график функции в евклидовом пространстве (x=-25..25,y=-25..25), сферической (x=-1..1,y=-1..1) и в цилиндрической системах координат

(x=-5..5,y=-5..5).

$$z := (x^2 + y^2)\ (x^3 + y^3)$$

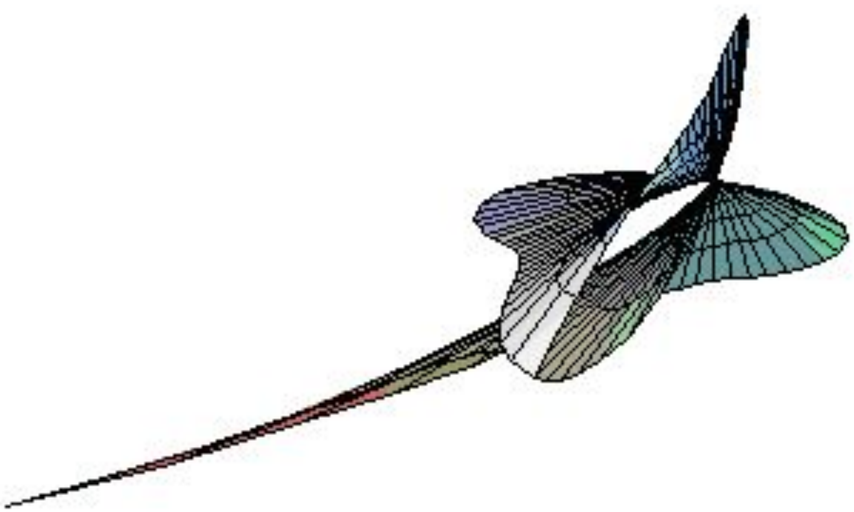
в евклидовом пространстве

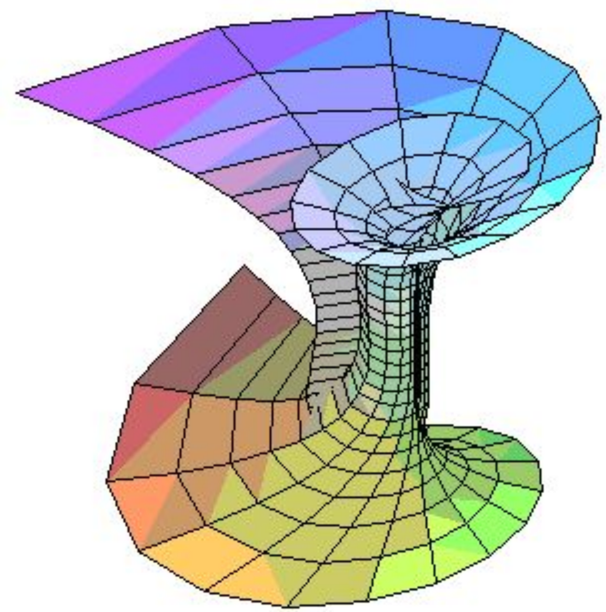


$$z := \left(x^2 + y^2\right)\left(x^3 + y^3\right)$$

в цилиндрической системе координат

В сферической системе координат

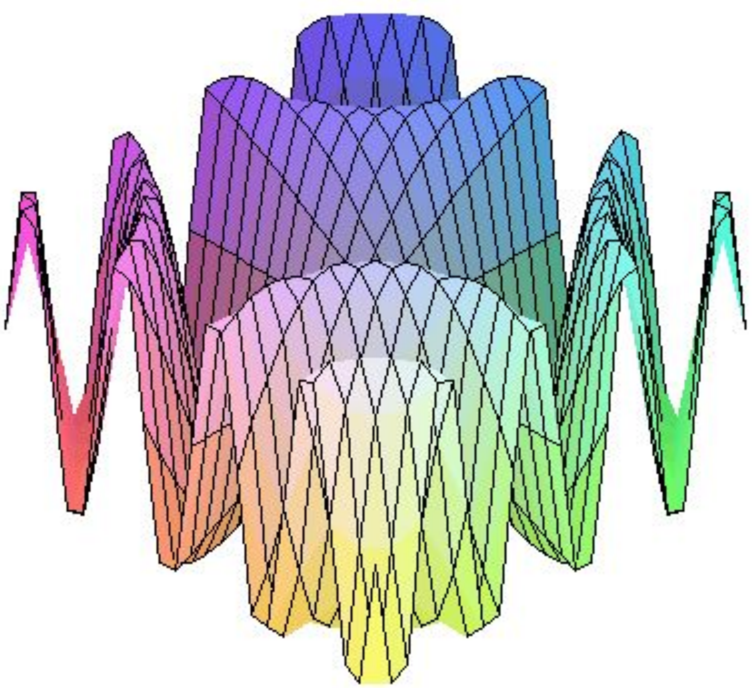




$$z := \sin\left(\frac{1}{2}\,x\,y\right)$$

построим график функции в евклидовом пространстве, сферической цилиндрической системах координат

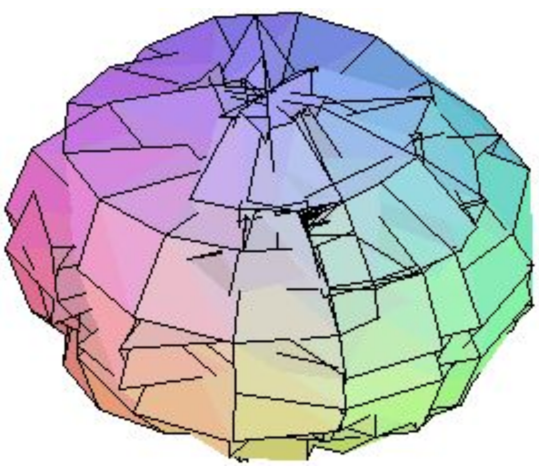
в евклидовом пространстве

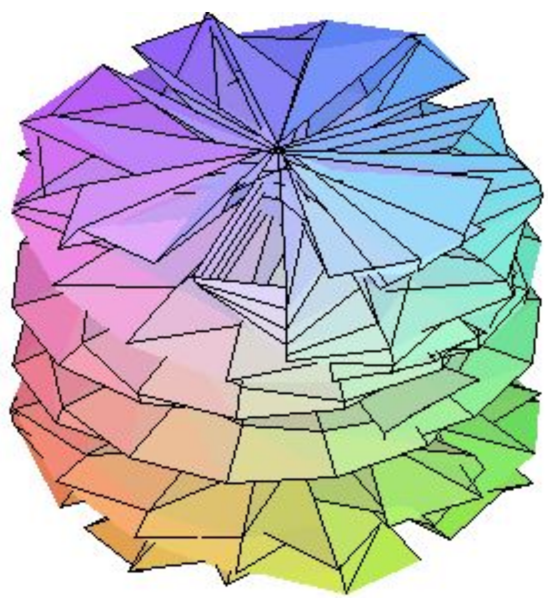


$$z := \sin\left(\frac{1}{2}\,x\,y\right)$$

в цилиндрической системе координат

В сферической системе координат





векторы

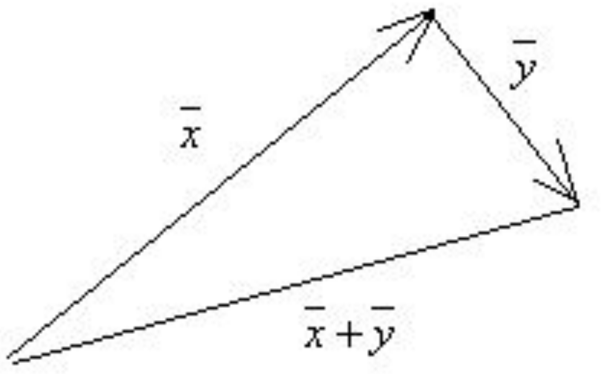
Свободный вектор - это направленный отрезок, который можно переносить в пространстве параллельно его первоначальному положению.

Обычно такие векторы обозначают буквами латинского алфавита: $a, b, \ldots, x, y, \ldots$

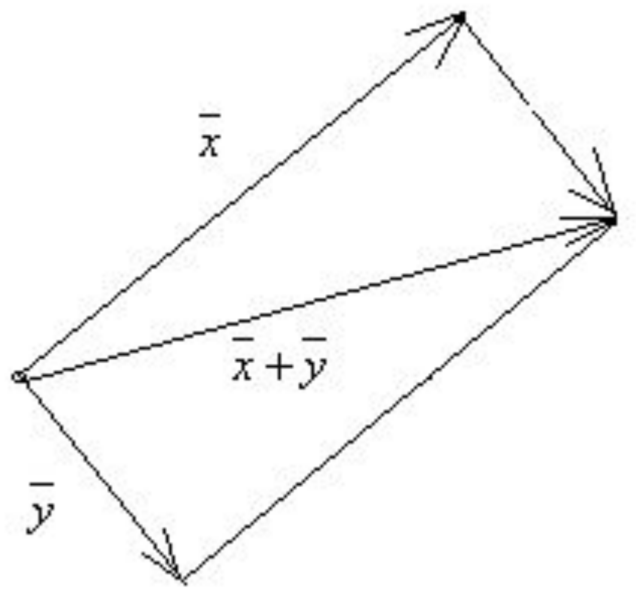
Для простоты можно считать; что все эти векторы имеют общую начальную точку; которую мы обозначим буквой *O* и назовем *началам координат*.

Сложение векторов

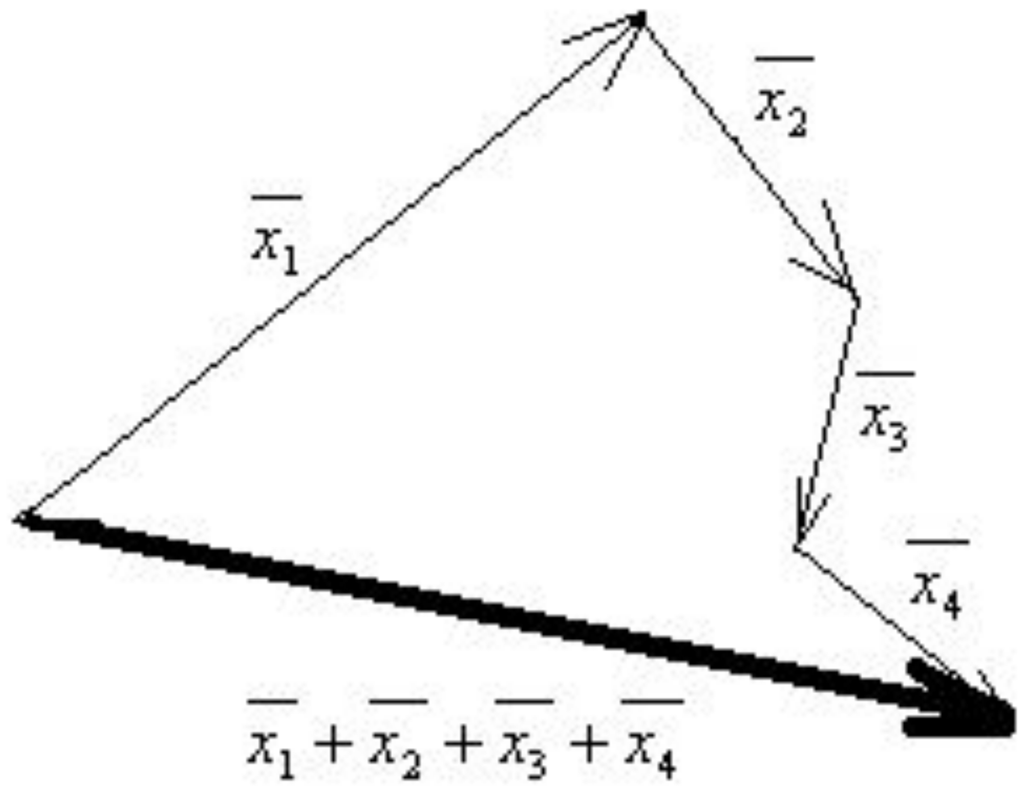
Правило треугольника



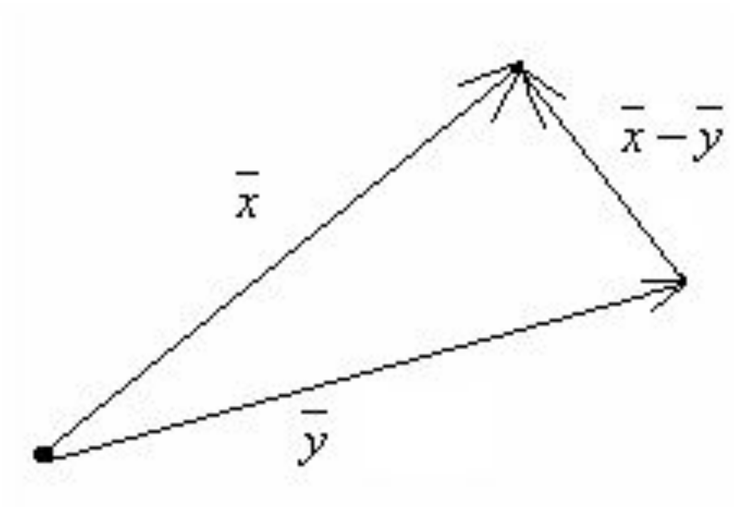
Правило параллелограмма

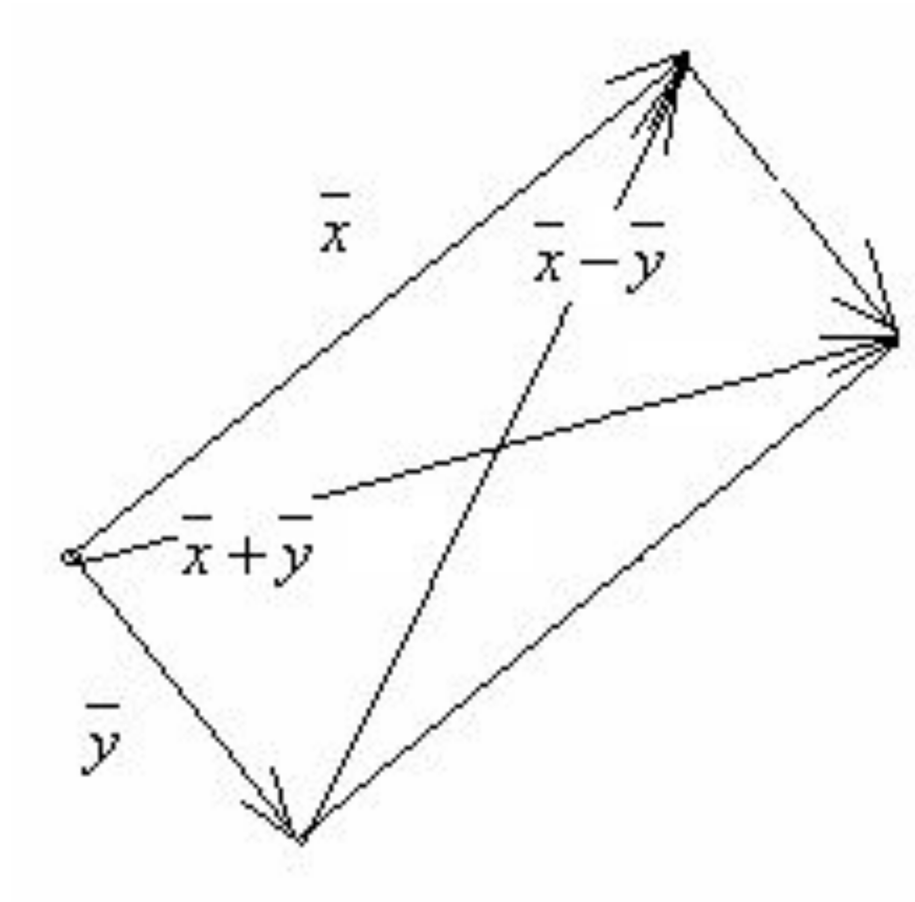


Сложение более двух векторов



Разность векторов





Умножение вектора на число

Произведением вектора Х на действительное число λ называется вектор У такой, что:

1. Его длина $|y| = |\lambda| \cdot |x|$

2. Вектор У коллинеарен вектору Х и имеет с ним одинаковое направление, если $\lambda > 0$

и противоположное, если $\lambda < 0$

Свойства операций

Сложение векторов и умножение вектора на число обладают следующими свойствами.

1. $x + y = y + x$

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$

3. Существует *нулевой* вектор **0** такой, что $x + 0 = x$

4. Для каждого вектора **x** существует противоположный вектор $y = - x$ такой, что $x + y = O.$

5. $1 \cdot x = x$

6. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

7. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda x + \mu x$

8. $\lambda(\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$

Линейные пространства

множества элементов, на которых определены эти операции будем называть *линейными* (или *векторными*) *пространствами и* обозначать их буквой **L**. Элементы таких пространств будем называть *векторами*.

Рассмотрим несколько примеров.

а) Совокупность векторов, лежащих на одной прямой, образует линейное пространство, так как сложение и умножение таких векторов на действительное число приводит нас снова к векторам, лежащим на этой пряной, и свойства 1- 8 выполняются. Обозначим такое линейное пространство через L_1

2)Совокупность векторов, лежащих в одной плоскости, также оказывается замкнутой по отношению к сложению и умножению на действительное число; свойства 1 -8 для них выполняются, и поэтому эта совокупность образует линейное пространство, которое мы обозначим через

L_2

3) Совокупность всех векторов пространства также является линейным пространством. L_1
Обозначим его через

L_3

Рассмотрим множество, элементом которого является упорядоченная совокупность действительных чисел:

$$\mathrm{x} = \{\mathrm{x}_1, x_2, \ldots x_n\}$$

Определим сложение элементов **x** и $\mathrm{y} = \{\mathrm{y}_1, y_2, \ldots y_n\}$

и умножение элемента **x** на действительное число λ

с помощью равенств $\mathrm{x} + \mathrm{y} = \{\mathrm{x}_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n\}$

$$\lambda \mathrm{x} = \{\lambda \mathrm{x}_1, \lambda x_2, \ldots \lambda x_n\}$$

Такое множество элементов образует линейное пространство, так как определенные в нем операции сложения и умножения на число обладают, всеми восемью указанными выше свойствами этих операций. Например, нулевым вектором в этом пространстве будет вектор 0 = {0,0,....0}. а вектором -x -вектор $\{-\mathrm{x}_1, -x_2, \ldots -x_n\}$

Будем обозначать это пространство через L_n

Подпространства

Подпространством линейного пространства называется непустое (т. е. содержащее хотя 6ы один вектор) подмножество L' векторов из ***L***, которые сами образуют линейное пространство относительно уже введенных в L' операций сложения и умножения на число, т. е. такое подмножество, для которого из того, что $x \in L'$, $y \in L'$

следует, что $x + y \in L'$, $\lambda x \in L'$

Простейшими подпространствами пространства являются подпространство, состоящее из одного нулевого элемента (нулевое подпространство), и все пространство . Эти подпространства называются *несобственными*.

Суммой двух линейных подпространств L'

и L'' линейного пространства L называется совокупность

$$M = L' + L''$$

всех векторов из L, каждый из которых представляется в виде

$$x = x' + x''$$

где,

$x' \in L'$ $x'' \in L''$

Пересечением двух линейных подпространств L' и L'' линейного пространства L называется $N = L' \cap L''$

совокупность

всех векторов из L, каждый из которых

принадлежит как L', так и L''

Линейная зависимость векторов

Пусть **a**, **b**, ..., **e** векторы линейного векторного пространства L, $\alpha, \beta, ..., \varepsilon$

— действительные числа.

Вектор $x = \alpha a + \beta b + ... + \varepsilon e$

называется *линейной комбинацией* векторов **a**, **b**, ..., **e**, а числа - *коэффициентами* этой линейной комбинации.

Если $\alpha = \beta = ... = \varepsilon = 0$, то x = O.

Но может быть и так, что существует линейная комбинация векторов **a**, **b**, ..., **e**, у которой не все коэффициенты равны нулю, но которая тем не менее равна нулю. В этом случае векторы **a**, **b**, ..., **e** называются *линейно зависимыми*. Иначе говоря, эти векторы будут линейно зависимыми, если найдутся такие действительные числа $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$

$$\alpha a + \beta b + \ldots + \varepsilon e = 0$$

не все равные нулю, что

Если же это равенство выполняется только тогда, когда все числа $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ равны нулю, то векторы **a**, **b**, ..., **e** называются *линейно независимыми*.

свойства линейно зависимых векторов

а) *Если векторы линейно зависимы, то один из них может быть представлен в виде линейной комбинации остальных, и, обратно, если один из векторов есть линейная комбинация остальных, то векторы линейно зависимы.*

б) Если некоторые из векторов **a**, **b**, **c**, ..., **e** *линейно зависимы, то и вся эта система векторов линейно зависима.*

в*) Если среди векторов* ***a***, ***b***, ***c***, ..., ***e*** *имеется хотя бы один нулевой, то эти векторы линейно зависимы.*

Пусть, например, **a = O**. Тогда

$$\alpha a + 0 \cdot b + ... + 0 \cdot e = 0, \quad \alpha \neq 0$$

примеры линейно зависимых и линейно независимых векторов пространства L_3

а) Нулевой вектор **0** является линейно зависимым, так как $\alpha \cdot 0 = 0$ при любом $\alpha \neq 0$

б) Любой вектор $a \neq 0$ будет линейно независимым, так как $\alpha a = 0$ только при а=0

в) Два коллинеарных вектора **a** и **b** линейно зависимы**.**

г) Два неколлинеарных вектора линейно независимы.

д) Три компланарных вектора линейно зависимы.

е) Три некомпланарных вектора всегда линейно независимы.

ж) Любые четыре вектора пространства линейно зависимы.

Размерность и базис линейного пространства

Размерностью линейного пространства называется наибольшее число имеющихся в нем линейно независимых векторов.

Например, на прямой существует один линейно независимый вектор, а любые два вектора линейно зависимы. Следовательно, прямая представляет собой одномерное линейное пространство. Мы обозначили его L_1. Здесь нижний индекс как раз означает размерность пространства.

- На плоскости существуют два линейно независимых вектора, но любые три вектора линейно зависимы. Поэтому плоскость является двумерным пространством и обозначается через L_2
- В пространстве существуют три линейно независимых вектора, а любые четыре вектора линейно зависимы. Поэтому размерность пространства равна трем, и мы обозначили его через L_3

В линейном пространстве, элементами которого являются векторы $x = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

n линейно независимых векторов $e_1, e_2, ..., e_n$

Но любые n + 1 векторов этого пространства будут линейно зависимыми. Следовательно, размерность этого пространства равна n, и обозначается оно поэтому через L_n

Любой вектор х может быть, и притом единственным образом, представлен в виде линейной комбинации линейно независимых векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$

Совокупность этих векторов называется базисом n-мерного линейного пространства, а числа - *координатами вектора* х в этом базисе. Л*юбые n линейно независимых векторов могут быть приняты за базис пространства* L_n

В частности, на прямой любой вектор **x** может быть представлен в виде $x = x_1 e_1$

где e_1 - произвольный отличный от нуля вектор этой прямой.

На плоскости вектор **x** может быть представлен в виде

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

где e_1 и e_2 — любые два неколлинеарных вектора этой плоскости.

В трехмерном пространстве любой вектор **x** может быть представлен в виде

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

где e_1 e_2 e_3 -любые три некомпланарных вектора пространства.

Разложение вектора x в n-мерном пространстве кратко может быть записано в виде

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$$