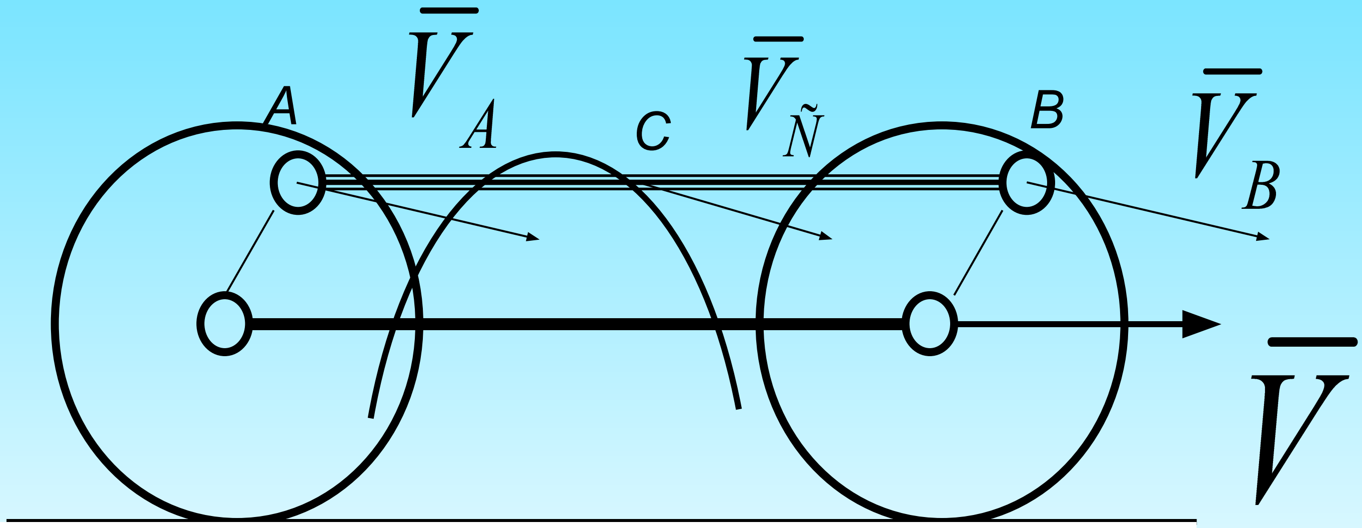
# Кинематика твердого тела

## <u>Простейшие движения твердого тела</u>

- Поступательное движение
- Вращение вокруг неподвижной оси (вращательное)

# Поступательное движение

Поступательное движение твердого тела – это такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, перемещается параллельно самой себе.



# Поступательное движение

$$\bar{V}_A = \bar{V}_c = \bar{V}_B$$

$$\bar{a}_A = \bar{a}_C = \bar{a}_B$$

При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

# Вращательное движение

***<u>Вращательное движение твердого тела</u>***

- Вращательное движение твердого тела – это такое движение, при котором две точки тела остаются неподвижными.
- Проходящая через эти точки прямая называется осью вращения.

# Вращательное движение

Положение тела при вращательном движении однозначно определяется углом поворота φ

Закон вращательного движения:

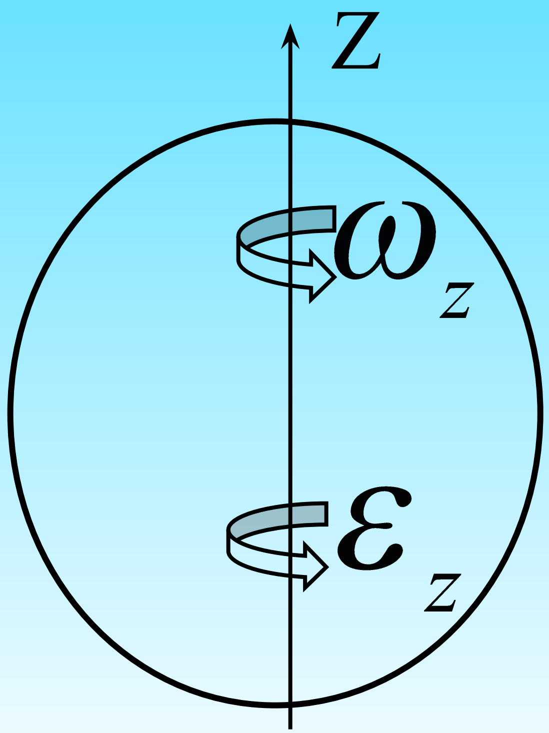
$$\varphi = \varphi(t)$$

# Вращательное движение

•Основные кинематические характеристики вращательного движения:

Угловая скорость ω [рад/с]

Угловое ускорение ε [рад/с$^2$]



# Вращательное движение

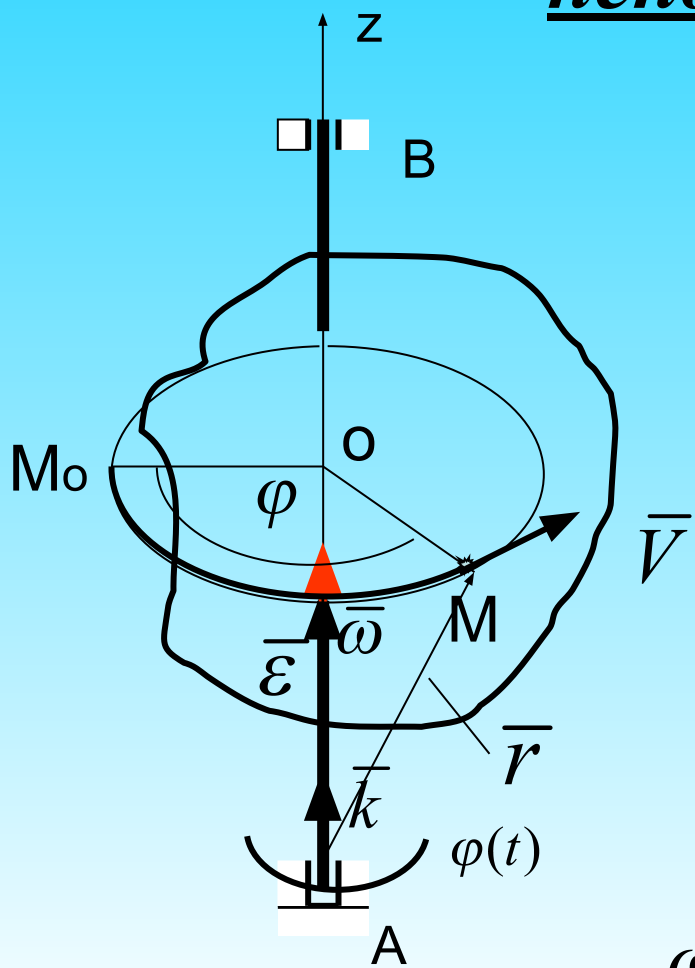
$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

Вектор угловой скорости лежит на оси вращения и направлен в сторону, откуда видно, что тело вращается против хода часовой стрелки.

# Вращательное движение

## ***Скорость точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси***



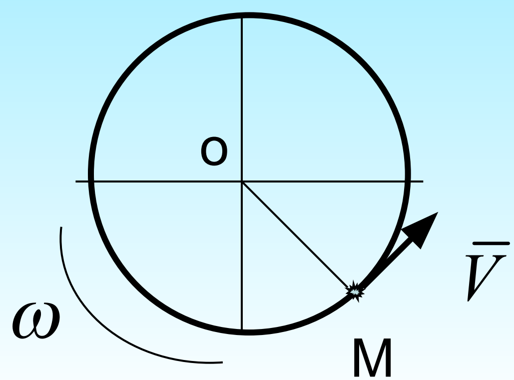

OM=h

$$M_0M = s = \varphi \cdot h$$

$$V = \dot{s} = \dot{\varphi} h = \omega h$$

$$\boxed{\overline{V} = \overline{\omega} \times \overline{r}}$$

Ф. Эйлера

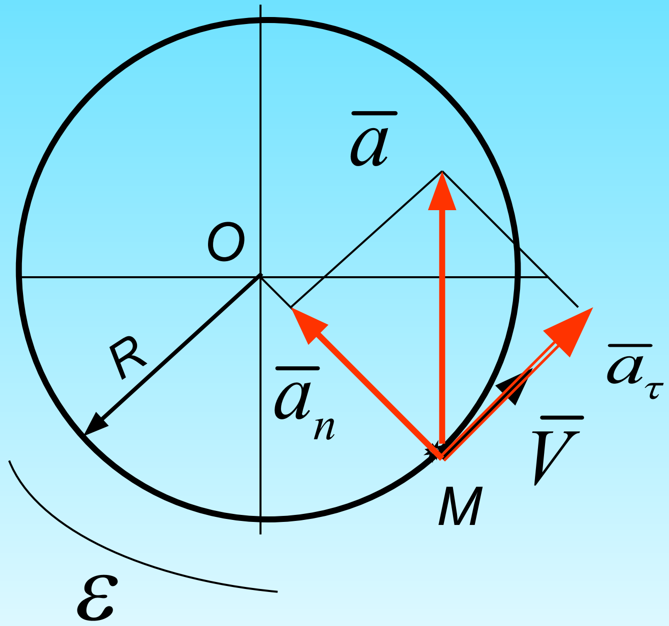



$$V = OM \cdot \omega = h \cdot \omega$$

# Вращательное движение

## Ускорение точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$$



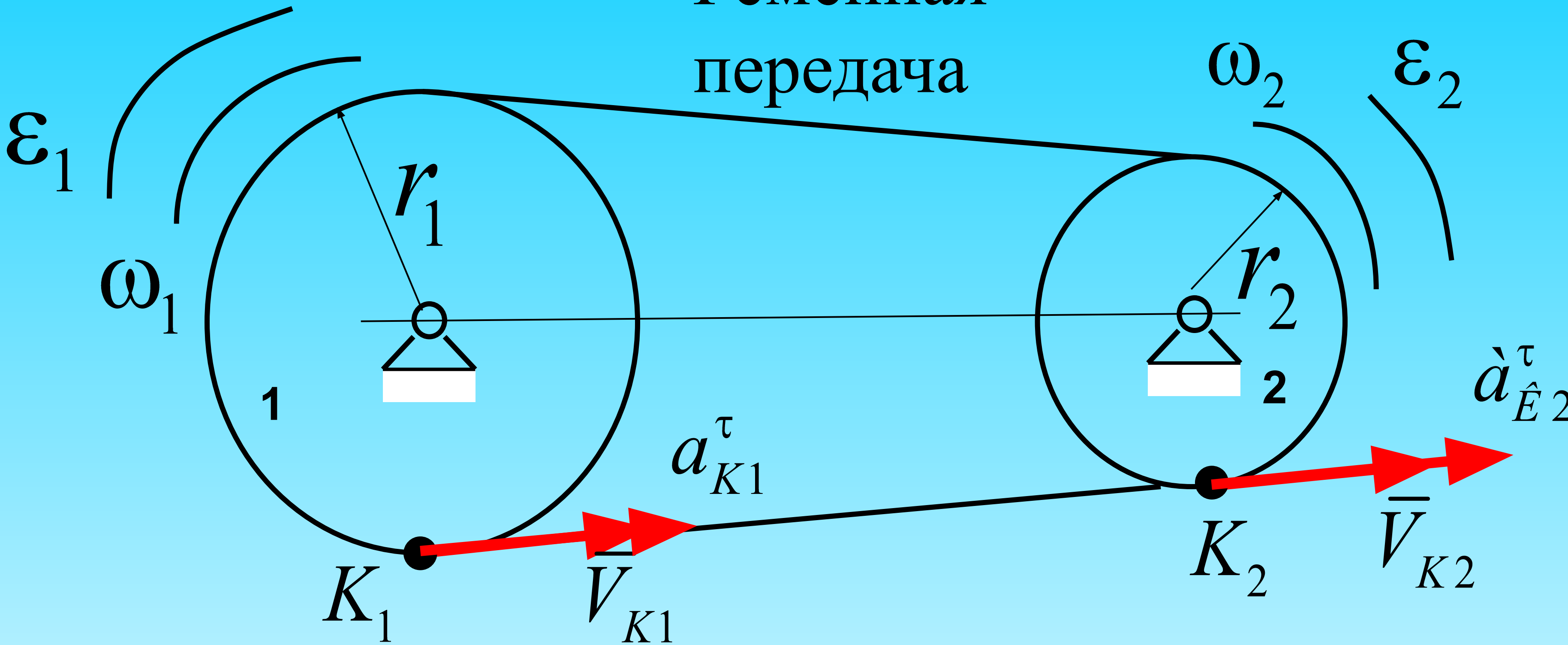

$$a_\tau = \dot{V}_\tau = \varepsilon\, R$$

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

# Преобразование вращательного движения

Ременная передача

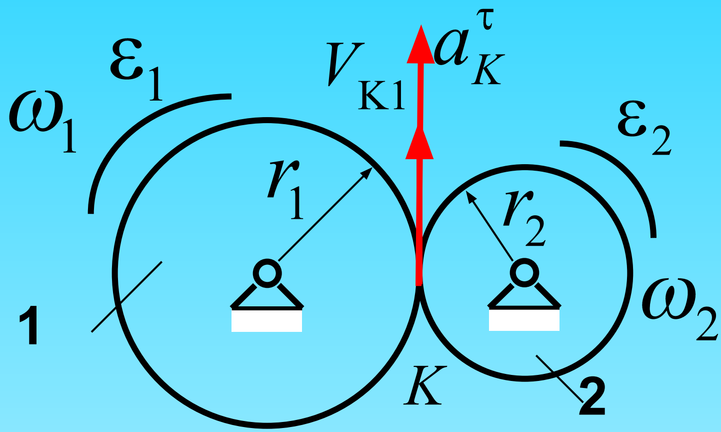



$$V_{K1} = V_{K2} \qquad \boxed{\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2} \qquad \omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2}$$

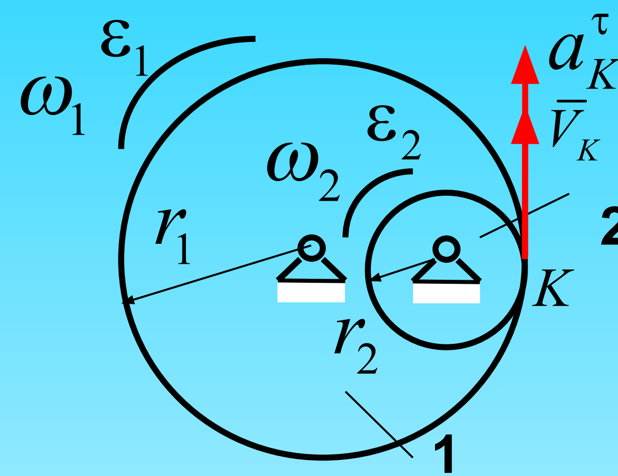
$$a^{\tau}_{K1} = a^{\tau}_{K2} \qquad \boxed{\varepsilon_1 r_1 = \varepsilon_2 r_2} \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{r_1}{r_2}$$

# Преобразование вращательного движения

## Внешнее зацепление




## Внутреннее зацепление




$$V_{K1} = V_{K2} \qquad \boxed{\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2} \qquad \omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2} = \omega_1 \frac{z_1}{z_2}$$

$$a_{K1}^\tau = a_{K2}^\tau \qquad \boxed{\varepsilon_1 r_1 = \varepsilon_2 r_2} \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_1 \frac{r_1}{r_2} = \varepsilon_1 \frac{z_1}{z_2}$$

$z_1, z_2$ - число зубьев колес

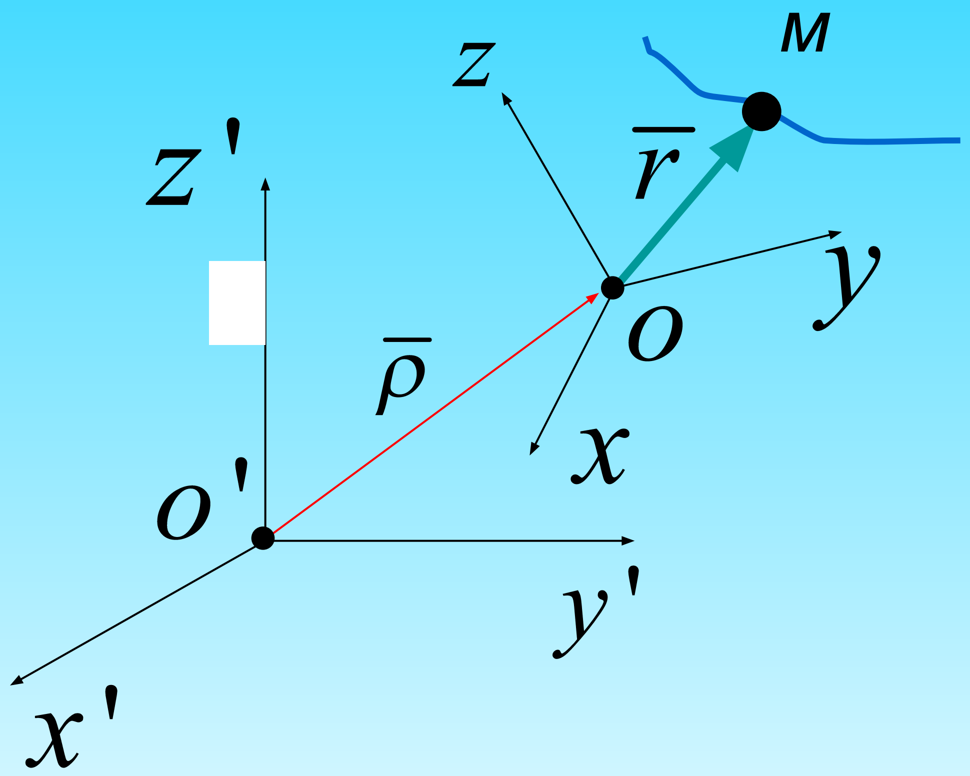
# Сложное движение точки

***Сложное движение точки***

***Сложное движение точки*** - такое движение, которое может быть составлено из двух (нескольких) простых.

Движение рассматривается в двух системах отсчета: основной (неподвижной) и движущейся.

# Сложное движение точки



# Сложное движение точки

Движение точки относительно основной (неподвижной) системы отсчета называется ***абсолютным.***

Движение точки относительно подвижной системы отсчета называется ***относительным.***

Движение подвижной системы отсчета (и неизменно связанных с ней точек пространства) называется ***переносным.***

# Сложное движение точки

***Абсолютная скорость точки*** - скорость относительно неподвижной системы отсчета.

***Относительная скорость точки*** - скорость относительно подвижной системы отсчета

Скорость неизменно связанной с подвижными осями точки, с которой в данный момент совпадает движущаяся точка, называется ***переносной скоростью.***

# Сложное движение точки

***Теорема о сложении скоростей:***

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V}_{отн} + \vec{V}_{пер}}$$

Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей

# Сложное движение точки

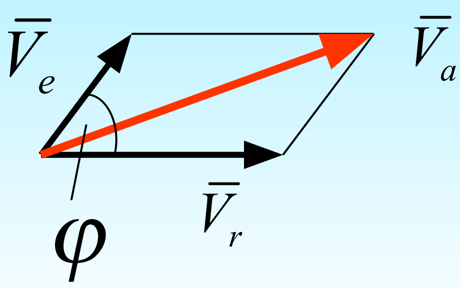
Скорости и ускорения при сложном движении обозначаются

$\bar{V}_a$, $\bar{a}_a$ - абсолютные

$\bar{V}_r$, $\bar{a}_r$ - относительные

$\bar{V}_e$, $\bar{a}_e$ - переносные

Сложение векторов скорости по теореме косинусов



$$\boxed{\bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_e}$$

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r V_e \cos\varphi}$$

# Сложное движение точки

***Теорема Кориолиса***

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_{отн} + \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{Кор}}$$

Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме переносного ускорения, относительного ускорения и ускорения Кориолиса

# Сложное движение точки

Ускорение Кориолиса характеризует изменение относительной скорости точки в переносном движении и переносной скорости точки в относительном движении.

Кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению переносной угловой скорости на относительную скорость точки

$$\boxed{\bar{a}_{Кор} = 2\bar{\omega}_{пер} \times \bar{V}_{отн}}$$

# Сложное движение точки

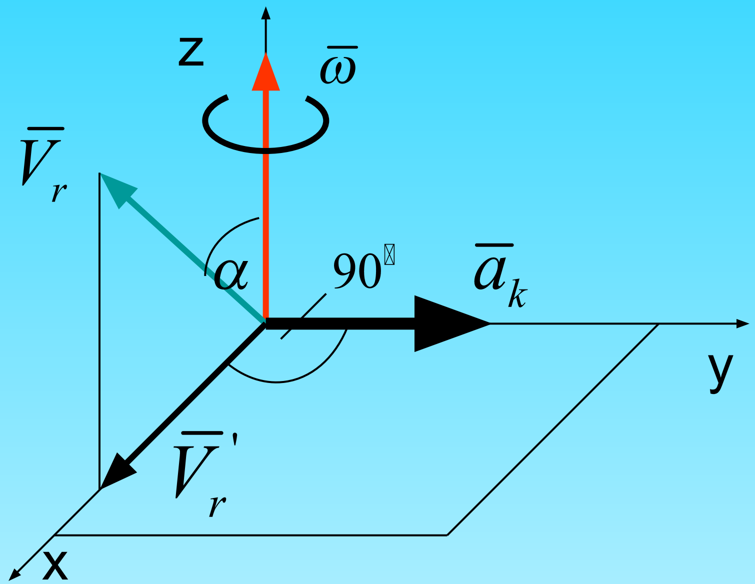
В численном виде, ускорение кориолиса равно

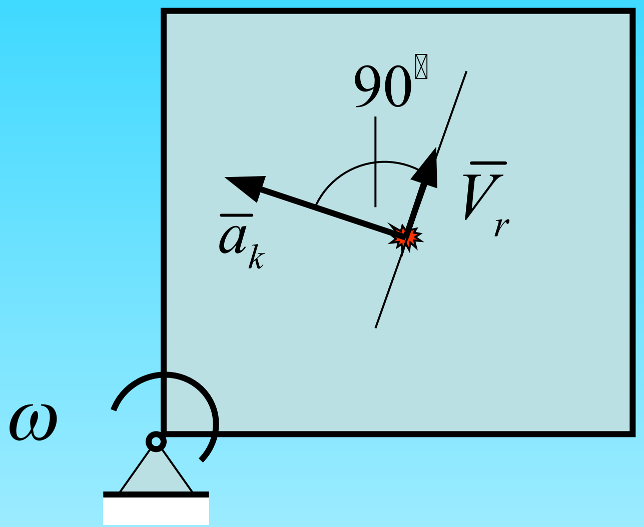
$$\boxed{a_k = 2\omega V_r \sin(\overline{\omega} \wedge \overline{V}_r)}$$

**Правило Н. Е. Жуковского**

Чтобы найти направление вектора ускорения Кориолиса, необходимо спроецировать вектор относительной скорости на плоскость, перпендикулярную , и повернуть эту проекцию на 90 в сторону переносного вращения.

# Сложное движение точки




$$a_k = 2\,\omega\, V_r \sin\alpha$$

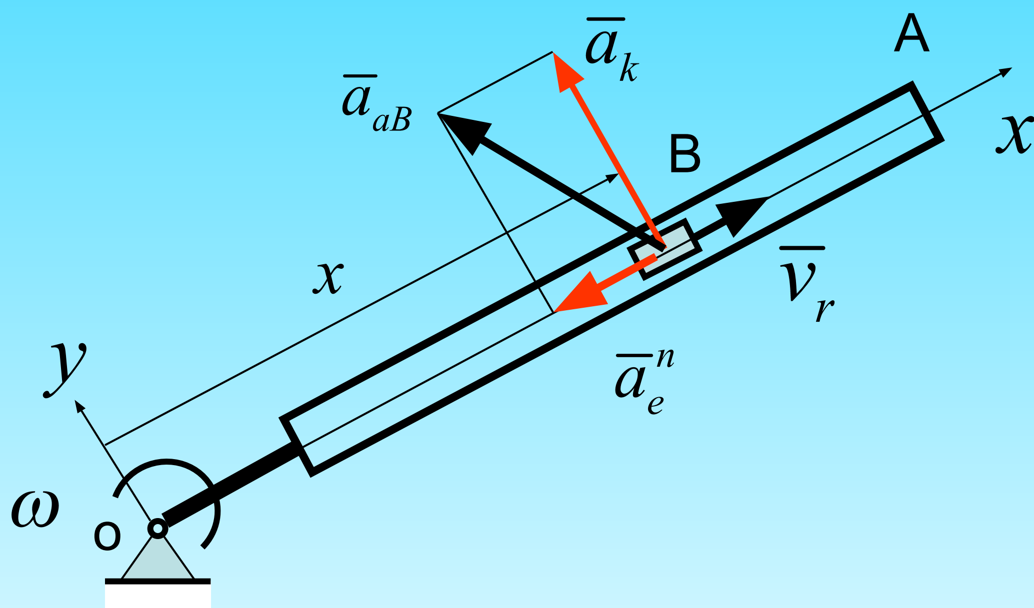
$$a_k = 2\,\omega\, V_r$$

# Сложное движение точки

Пример

$$\omega = const;$$
$$\overline{v}_r = const.$$

$$a_{aB}(x) = ?$$

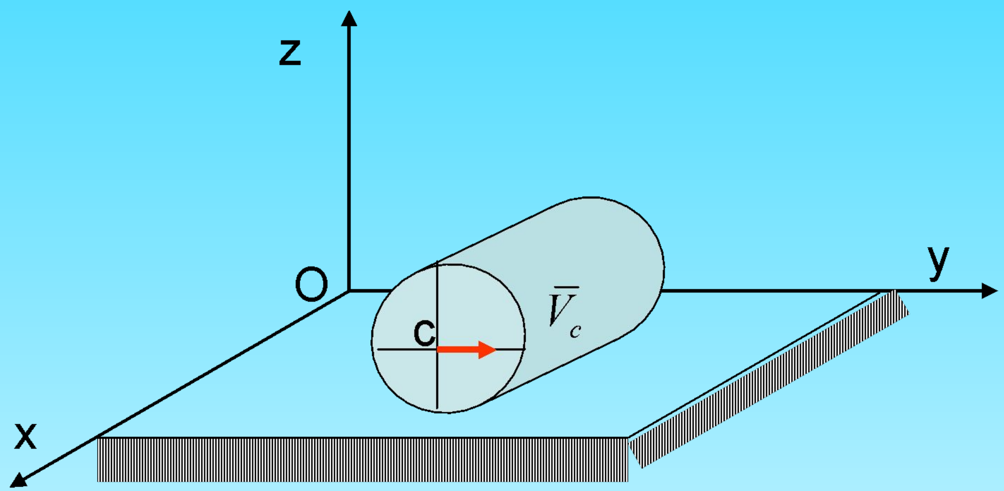


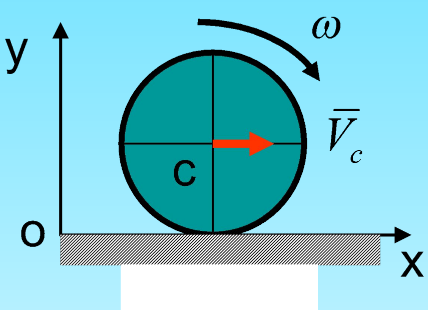

$$a_r = \dot{u} = 0;$$
$$a_e^\tau = \dot{\omega} x = 0;$$
$$a_e^n = \omega^2 x;$$
$$a_k = 2\omega v_r$$

$$a_{aB} = \sqrt{a_e^{n2} + a_k^2} = \omega\sqrt{\omega^2 x^2 + 4 v_r{}^2}.$$

# Плоское движение твердого тела

Плоскопараллельным (плоским) движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях




Плоскопараллельное движение твердого тела слагается из поступательного движения, при котором все точки тела движутся как полюс $C$ и из вращательного движения вокруг этого полюса

# Плоское движение твердого тела

## Уравнения движения плоской фигуры

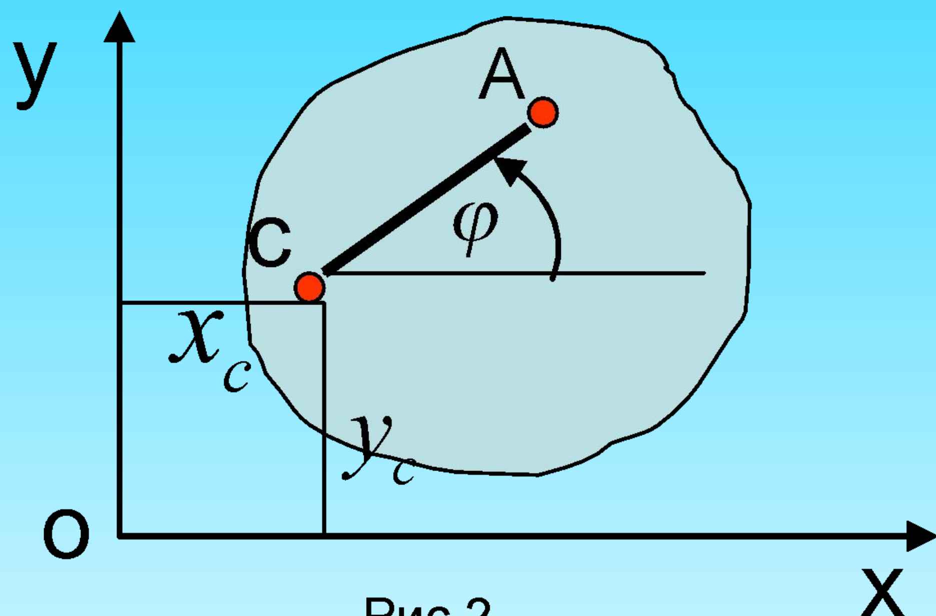
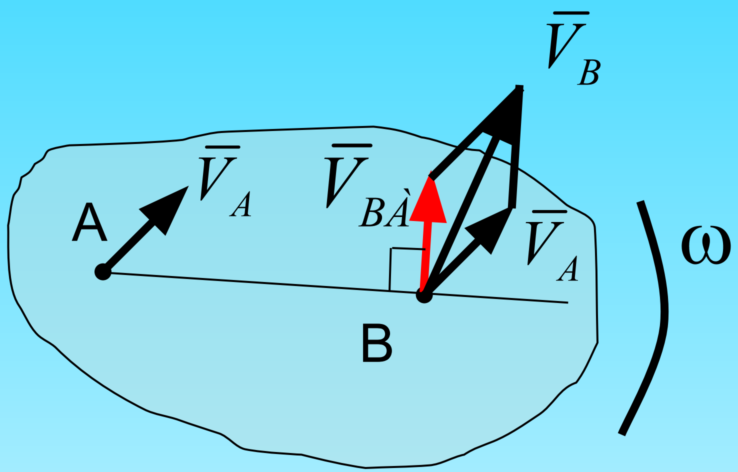



Рис.2.

$$x_c = f_1(t);$$
$$y_c = f_2(t);$$
$$\varphi = f_3(t).$$

# Плоское движение твердого тела

## Скорость точки при плоском движении тела




$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

$$V_{BA} = \omega \cdot |AB|$$

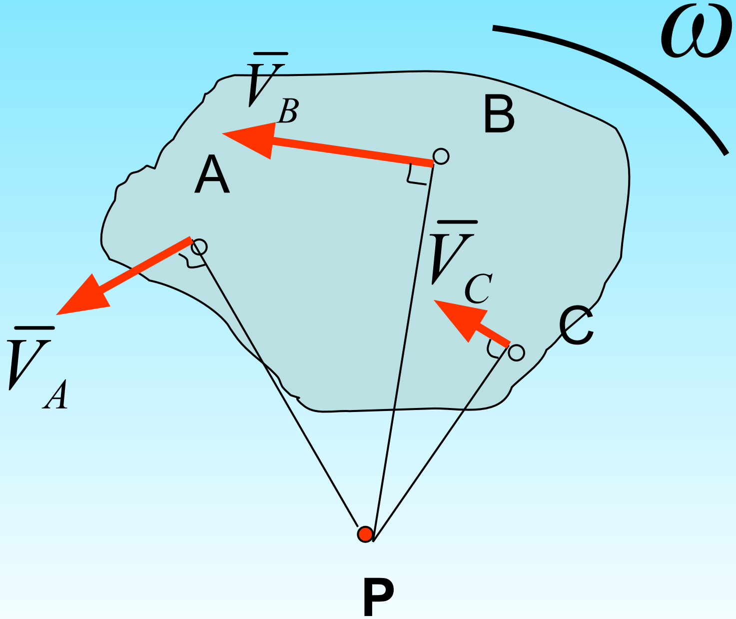
$$\vec{V}_{BA} \perp AB$$

Скорость какой-либо точки *B* плоской фигуры равна геометрической сумме скорости полюса *A* и скорости точки *B* при вращении фигуры вокруг полюса *A*.

# Плоское движение твердого тела

## Мгновенный центр скоростей

Мгновенным центром скоростей (МЦС) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент равна нулю.




$$\bar{V}_A = \underbrace{\cancel{\bar{V}_P}}_{0} + \bar{V}_{AP};$$

$$\bar{V}_A = \bar{V}_{AP} = \bar{\omega} \times \overline{PA}.$$

$$\boxed{\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP} = \omega}$$

# Плоское движение твердого тела

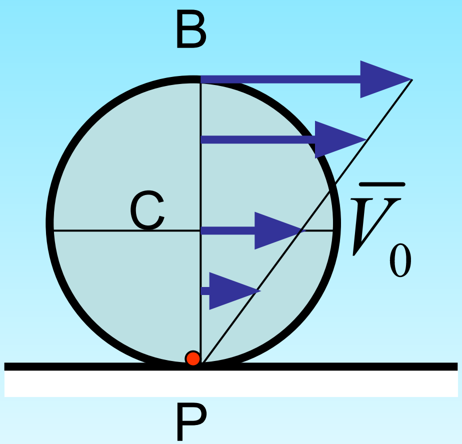
**Свойства МЦС:**

- Скорости всех точек фигуры перпендикулярны отрезкам, соединяющим эти точки с МЦС
- Модули скоростей пропорциональны расстояниям точек до МЦС
- Угловая скорость тела равна в каждый данный момент времени отношению скорости какой-нибудь точки к ее расстоянию до МЦС

# Плоское движение твердого тела

## Определение положения МЦС

- Плоскопараллельное движение осуществляется путем качения без скольжения одного цилиндрического тела по поверхности другого



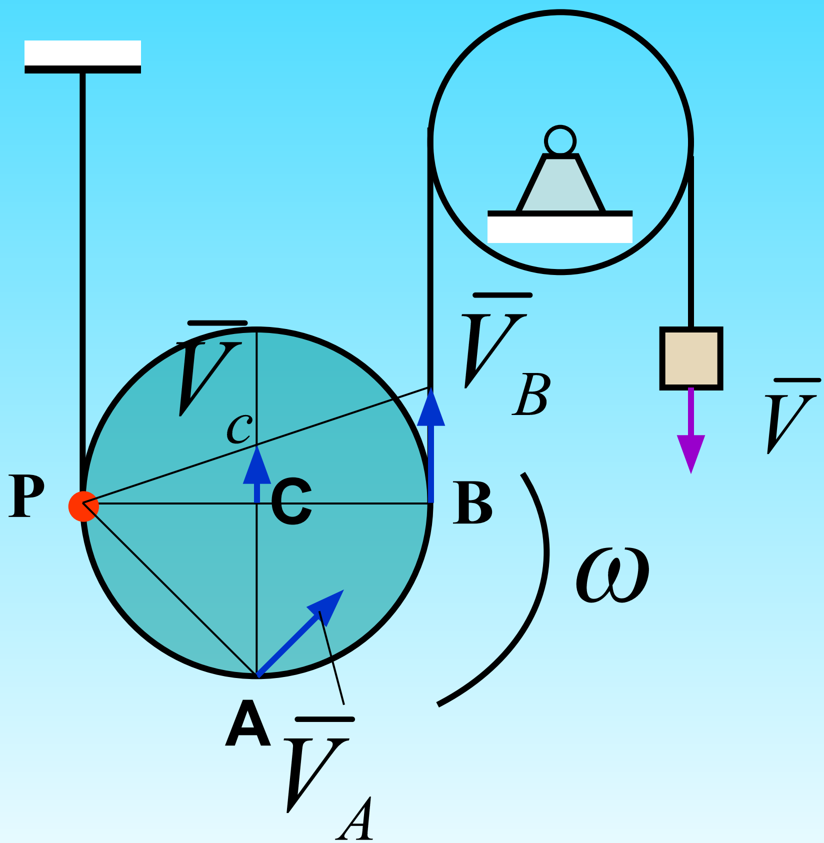

Р – М.Ц.С.

$$\omega = \frac{V_0}{R} = \frac{V_B}{2R};$$

# Плоское движение твердого тела

- Блок

$PC=CB=R;$




$$V_B = V;$$

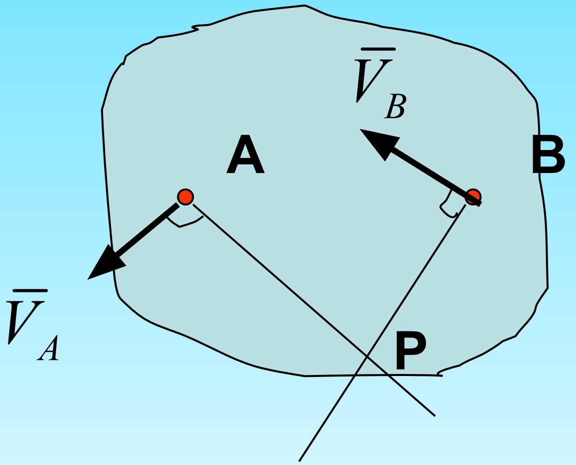
$$\omega = \frac{V_B}{PB} = \frac{V}{2R};$$

$$V_C = \omega \cdot PC = V/2;$$

$$V_A = \omega \cdot PA = \frac{\sqrt{2}}{2} V.$$

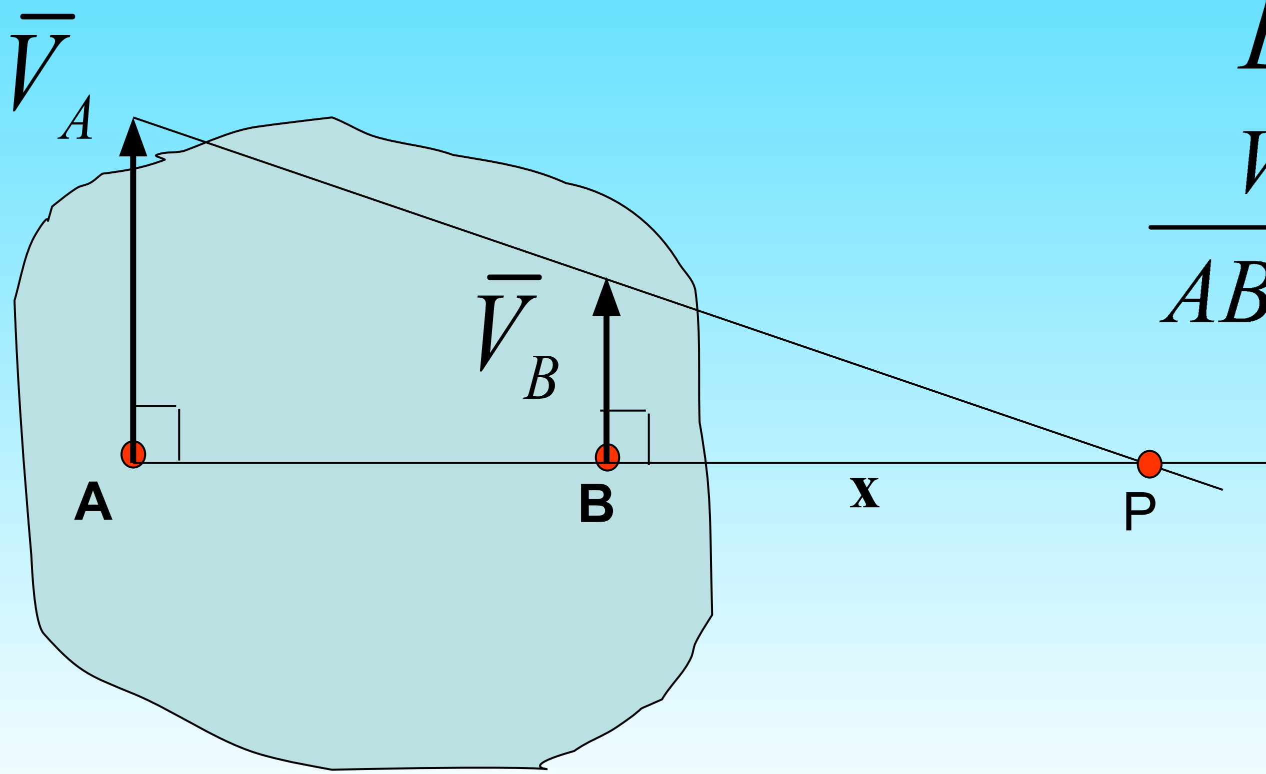
# Плоское движение твердого тела

- Известны направления скоростей 2х точек, причем скорости не параллельны



# Плоское движение твердого тела

- Скорости двух точек тела параллельны, не равны между собой и перпендикулярны прямой, соединяющей эти точки




$$BP = x$$

$$\frac{V_A}{AB + x} = \frac{V_B}{x} = \omega.$$