ОГЭ 2016
Геометрия 9

Решение задач с развернутым ответом

Открытые банки заданий ОГЭ по математике

Каталог по заданиям, каталог по умениям, каталог по содержанию - http://mathgia.ru

каталог по содержанию - http://opengia.ru/subjects/mathematics-9/topics/1

ОЦЕНИВАНИЕ

Максимальный балл за работу - 32

предмет «Геометрия»

Модуль «Геометрия»						
Максимальное количество баллов за одно задание				*Максимальное количество баллов*		
Часть 1	Часть 2			За часть 1	За часть 2	За модуль в целом
№ 9–13	№ 24	№ 25	№ 26			
1	2	2	2	5	6	11

Задания с развернутым ответом

24. ДЕЙСТВИЯ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ФИГУРАМИ, КООРДИТНАТАМИ, ВЕКТОРАМИ

25. ПРОВЕДЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬНЫХ РАССУЖДЕНИЙ

26. ДЕЙСТВИЯ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ФИГУРАМИ, КООРДИНАТАМИ, ВЕКТОРАМИ

Задания части 2 экзаменационной работы направлены на проверку таких качеств геометрической подготовки выпускников, как:

- умение решить планиметрическую задачу, применяя различные теоретические знания курса геометрии;
- умение математически грамотно и ясно записать решение, приводя при этом необходимые пояснения и обоснования;
- владение широким спектром приемов и способов рассуждений.

Таблица 12. Планируемый процент выполнения заданий частей 2

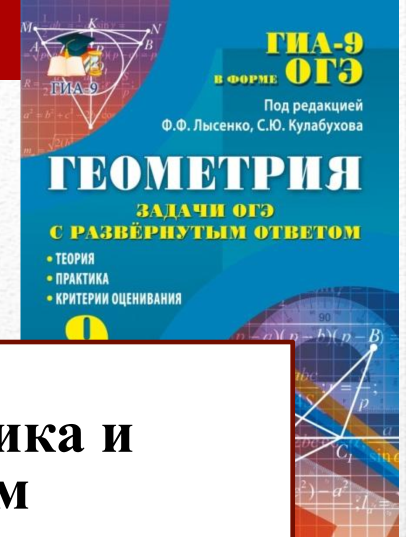
Модуль	Геометрия		
Номер задания	24	25	26
Уровень сложности	П	П	В
Ожидаемый процент выполнения	30–50	15–30	3–15

Самообучение, обучение, тренировка, контроль
Повышенный и высокий уровень

В условиях достаточного времени на подготовку

В условиях ограниченного времени на подготовку

Требования к записи решения



- **Должен быть понятен ход рассуждений выпускника и решение должно быть математически грамотным**
- **Нужно нацеливать учащихся на лаконичность** и не требовать подробных комментариев и формулировок теорем, при этом в решении должны быть ссылки на теоремы, чтобы показать, что ученик владеет теоретическим материалом.
- **Если в решении допущена ошибка непринципиального характера** (вычислительная, погрешность в терминологии или символике и др.), не влияющая на правильность общего хода решения (даже при неверном ответе) и позволяющая, несмотря на ее наличие, сделать вывод о владении материалом, то учащемуся **засчитывается балл, на 1 меньший максимального**.
- (из рекомендаций ФИПИ Учебно-методические материалы для председателей и членов ПК по проверке заданий с развернутым ответом ГИА IX классов ОУ 2015 г.)

Модель тренировки

Группы задач по используемым теоремам и объектам

1.1. Базовые понятия и свойства фигур . . . .
1.2. Прямоугольный треугольник и его свойства .
1.3. Окружность и её свойства . . . .

План работы в рамках обобщающего повторения

А) Повторение *теории вообще*

1. Вспомнить основные понятия и определения
2. Вспомнить основные геометрические фигуры и их свойства
3. Вспомнить формулы, связанные с площадью

Б) Задачи по разделу «базовые понятия и свойства фигур»

4. Повторение тех теорем, которые понадобятся в пункте 1.1
5. Разбор решений: правильного и решений учеников, которые оценивали эксперты, с разъяснениями, за что снизили баллы

Решение задач с развернутым ответом

№24-26

Задача повышенного уровня сложности (24).

2-3 ходовая задача на вычисление

Ненамного превышает обязательный уровень

Проверяет знание основных терминов и теорем, умение их применять

Проверяет умение записать решение и аргументировать свое мнение

Баллы	Критерии оценивания выполнения заданий
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но не даны объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным выше критериям
2	Максимальный балл

1.1 Базовые понятия и свойства фигур
Теория

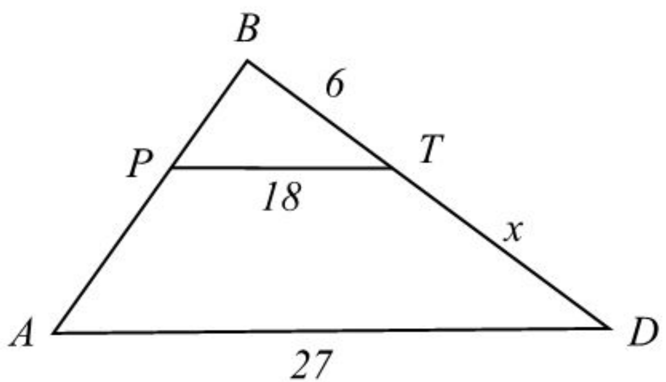
Параллельные прямые и их свойства
Треугольник:
- Теорема о сумме углов
- Определения: медиана, биссектриса, высота
- Средняя линия и ее свойства

Признаки и свойства подобных треугольников
Параллелограмм, его признаки и свойства

Задача

Прямая, параллельная стороне AD треугольника ADB, пересекает стороны AB и BD в точках P и T соответственно. Найдите DT, если $PT = 18$, $AD = 27$, $TB = 6$.

Решение.



Докажем, что треугольники ABD и PBT подобны. $\angle B$ общий, $\angle BAD = \angle BPT$ как соответственные углы при параллельных прямых AD и PT и секущей BA. Значит, $\triangle PBT \sim \triangle ABD$ и $BT : BD = PT : AD$. Обозначим $DT = x$, тогда $BD = 6 + x$.

Получаем уравнение $18 : 27 = 6 : (6 + x)$, откуда $x = 3$, $DT = 3$.

Ответ: 3.

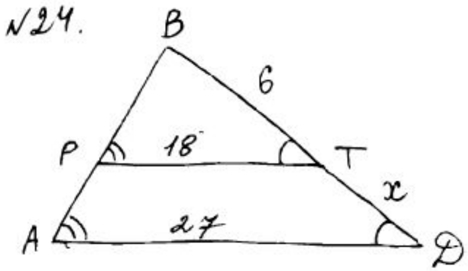
Нужно обсудить вопросы:

Как в этом решении показано, что его автор знает теорию?

Как дополнить решение ссылкой на признак подобия треугольников?

Примеры выполнения задачи учащимися

Пример 1.



$\angle P = \angle A,\ \angle T = \angle D \Rightarrow$

$\Delta PBT \sim \Delta ABD \Rightarrow$

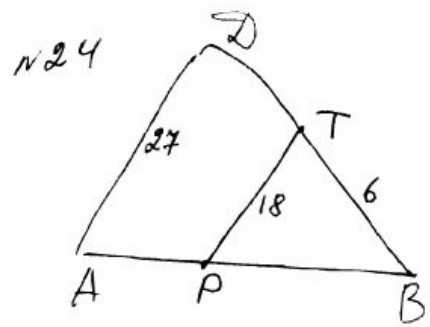
$\frac{18}{27} = \frac{\cancel{6+x}}{6+x};\quad \frac{2}{3} = \frac{6}{6+x}$

$2(6+x) = 18,\ x = 3$

Ответ: 3

Комментарий. За выполненное решение выставляется 1 балл, так как отсутствуют объяснения и ссылки на используемые теоремы. Ответ получен правильный.

Пример 2.



$\angle BTP = \angle BDA$ (соответственные углы, $TP \parallel AD$)

$\angle B$ общий $\Rightarrow \Delta PBT \sim \Delta ABD$ по двум углам $\Rightarrow$

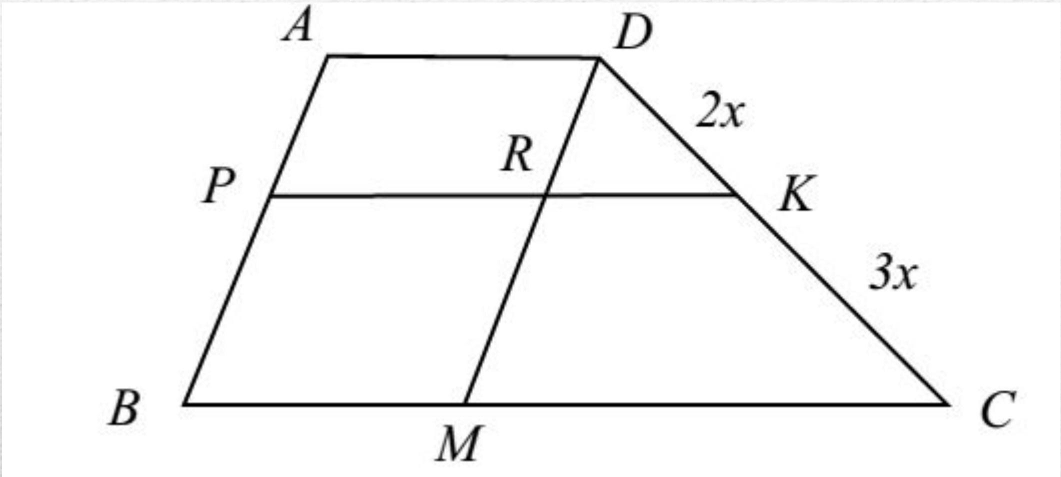
$\frac{AD}{PT} = \frac{BD}{TB},\quad \frac{27}{18} = \frac{BD}{6},\quad BD = \frac{27 \cdot 6}{18}$

$BD = 8,\ DT = 8 - 6 = 2.$

Ответ: 2

Комментарий. За выполненное решение выставляется 1 балл, так как даны необходимые объяснения и ссылки на используемые теоремы, но допущена вычислительная ошибка, не носящая принципиального характера. Ответ получен, но он неправильный.

7. Прямая, параллельная основаниям трапеции $ABCD$, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках P и K соответственно. Найдите длину отрезка PK, если $AD = 15$, $BC = 48$, $DK : KC = 2 : 3$.



Проведём прямую DM параллельно AB, она пересекает отрезки PK и BC в точках R и M соответственно.

Четырёхугольник $ABMD$ — параллелограмм, потому что его стороны попарно параллельны. Тогда $AD = BM = 15$ (противоположные стороны параллелограмма равны). Аналогично $PR = AD$. Найдём длину отрезка MC.

$$MC = BC - BM = 48 - 15 = 33.$$

Рассмотрим треугольники RDK и MDC. Угол D у них общий, $\angle DRK = \angle DMC$ как соответственные углы при параллельных прямых RK и MC и секущей DM, значит, треугольники подобны по двум углам. В подобных треугольниках против равных углов лежат пропорциональные стороны.

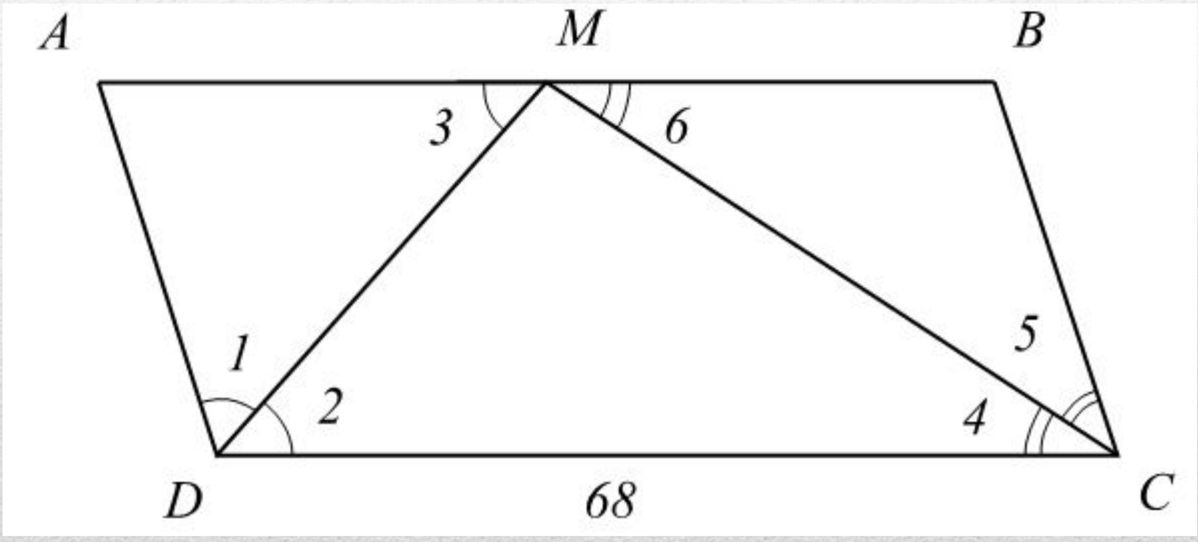
Запишем пропорцию $RK : MC = DK : DC$.

Обозначим $DK = 2x, KC = 3x$, тогда $DC = DK + KC = 5x$.

$RK : 33 = 2x : 5x, RK = 13,2,$

$PK = PR + RK = AD + PK = 15 + 13{,}2 = 28{,}2.$

9. Биссектрисы углов C и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, лежащей на стороне AB. Найдите AD, если $DC = 68$.



DM — биссектриса угла ADC, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. $\angle 2 = \angle 3$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и CD и секущей DM.

Получаем $\angle 1 = \angle 3$, значит, $\triangle\ ADM$ равнобедренный и $AD = AM$.

Аналогично CM — биссектриса угла BCD, следовательно, $\angle 4 = \angle 5$. $\angle 4 = \angle 6$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых AB и CD и секущей CM. Получаем $\angle 5 = \angle 6$, значит, $\triangle\ BCM$ равнобедренный и $BC = BM$.

$AD = AM$, $BC = BM$. Противоположные стороны параллелограмма равны, так $DC = AB = 68$ и $BC = AD \Rightarrow AM = BM = AB : 2 = 34$. Получаем $AD = 34$.

1.2 Прямоугольный треугольник и его свойства
Теория

Свойства прямоугольного треугольника:

две формулы площади

свойство медианы, проведенной из вершины прямого угла

высота делит на подобные треугольники

Теорема Пифагора

Треугольник с углами 30^o, 60^o, 90^o

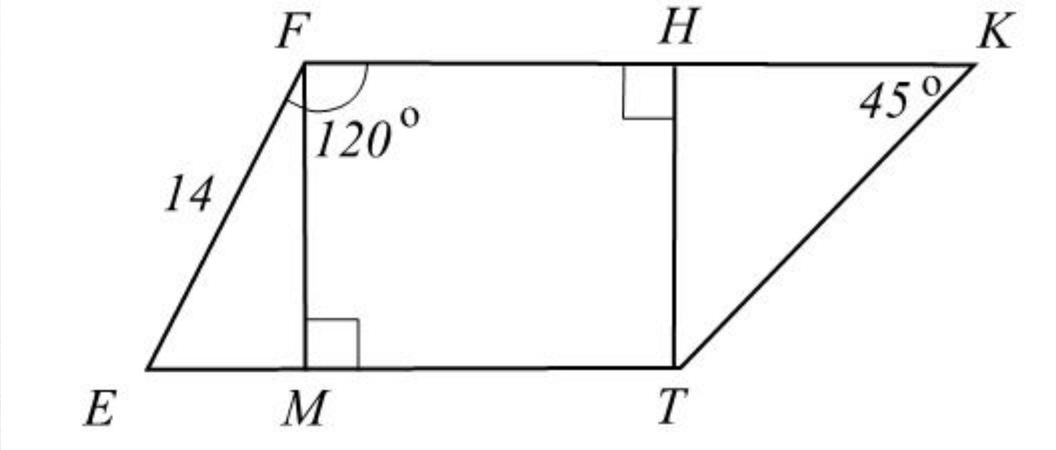
Синус, косинус, тангенс острого угла

Свойства ромба

Свойства трапеции (ее высот и углов)

Задача.

Найдите боковую сторону TK трапеции $EFKT$, если $FE = 14$, а углы FKT и EFK равны соответственно 45° и 120°.



Решение.

Проведём высоты трапеции TH и FM из вершин T и F соответственно. Основания трапеции параллельны, расстояние между параллельными прямыми одинаково, значит, $HT = FM$.

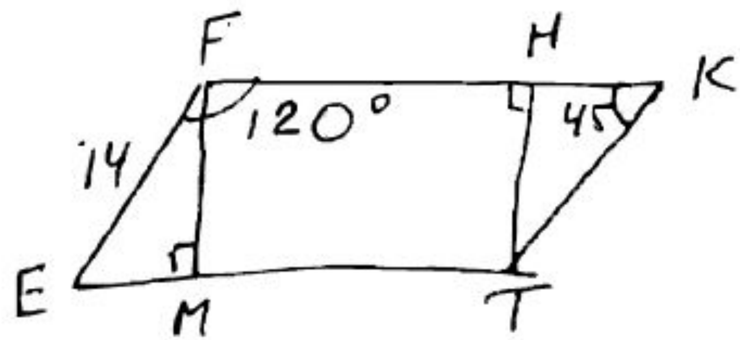
Треугольник EFM прямоугольный, $\angle EFM = 120° - 90° = 30°$. В прямоугольном треугольнике против угла $30°$ лежит катет, равный половине гипотенузы. $EM = EF : 2 = 14 : 2 = 7$. По теореме Пифагора $EF^2 = FM^2 + EM^2$, $FM^2 = 14^2 - 7^2 = 147$, $FM = \sqrt{147} = 7\sqrt{3}$.

$HT = FM = 7\sqrt{3}$. Треугольник THK прямоугольный, $\angle HKT = 45°$.

$\sin\angle HKT = HT : TK$, $TK = HT : \sin 45° = 7\sqrt{3} : \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{6}$.

Пример 1.

24



$\angle FEM = 180^\circ - \angle EFK = 60^\circ$
т.к $ET \parallel FK$, свойства односторонних углов.

$FM = EF \cdot \sin FEM = \frac{14\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$

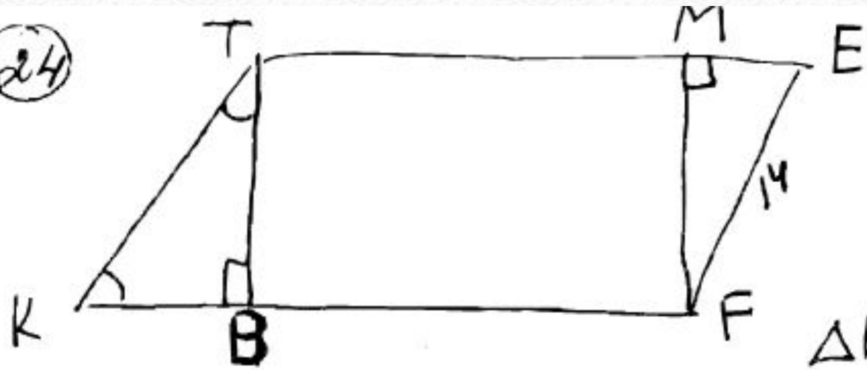
$HT = FM$, т.к $MFHT$ – прямоугольник

$KT = \frac{HT}{\sin 45^\circ} = \frac{7\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{6}$.

Ответ: $7\sqrt{6}$.

Комментарий. Ученик не написал явно, что TH и FM — высоты, но прямые углы отмечены на рисунке. Решение верное, выставляется 2 балла.

24



$TB \perp KF$, $FM \perp TE$, $TE \parallel KF \Rightarrow$

$\Rightarrow TB \parallel FM$, $TBFM$ – паралл-м

$\Downarrow$

$TB = FM$.

ΔKTB, $\angle B = 90^\circ$, $\angle T = 180^\circ - \angle K - \angle B = 45^\circ \Rightarrow \angle K = \angle T$

ΔKTB – равнобедренный, $BK = BT$, $KT^2 \xrightarrow{\text{т. Пифагора}} = KB^2 + BT^2 = 2BT^2$,

$KT = \sqrt{2}\,BT$

ΔMFE – прямоугольный, $\angle F = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$, $\frac{FE}{2} = ME = 7$,

$MF = \sqrt{14^2 - 7^2} = \sqrt{145} \Rightarrow TB = \sqrt{145}$.

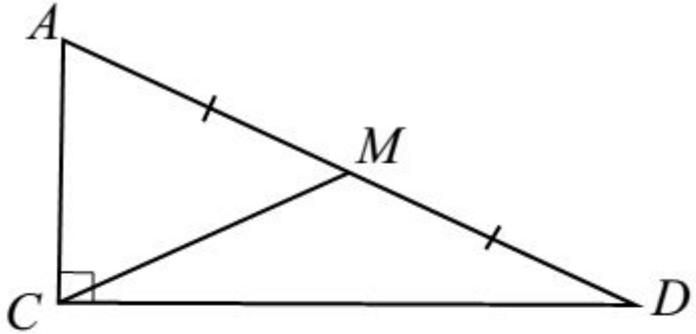
$KT = \sqrt{2}\,BT = \sqrt{2}\cdot\sqrt{145} = \sqrt{290}$.

Ответ: $\sqrt{290}$

Комментарий. За выполненное решение выставляется 1 балл, так как даны необходимые объяснения и ссылки на используемые теоремы, но допущена вычислительная ошибка, не носящая принципиального характера.

13. В прямоугольном треугольнике ADC с прямым углом C известны катеты: $AC = 9$, $DC = 40$. Найдите медиану CM этого треугольника.

Решение.

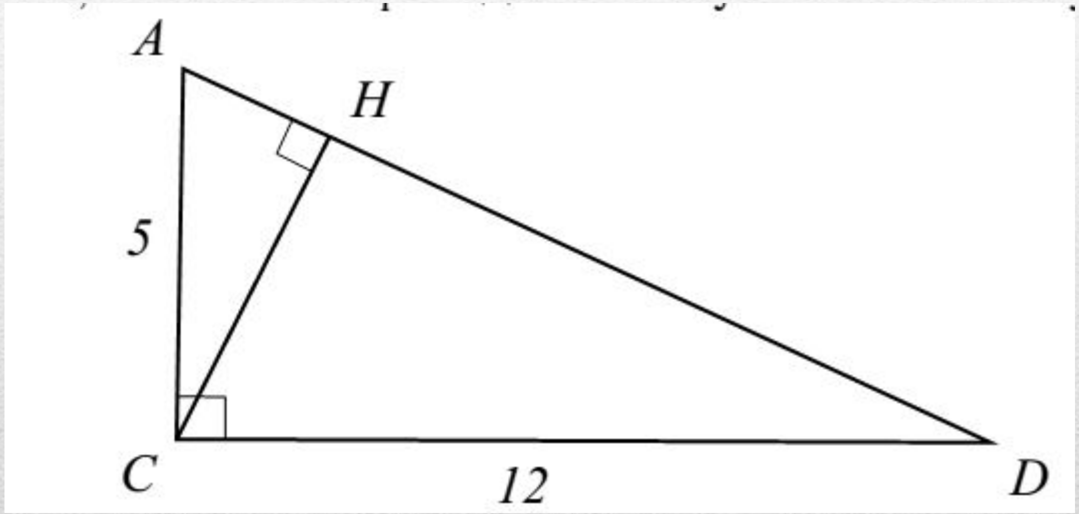


Найдём гипотенузу треугольника ADC по теореме Пифагора.

$AD^2 = AC^2 + DC^2 = 9^2 + 40^2 = 41^2$, $AD = 41$.

Медиана прямоугольного треугольника равна половине гипотенузы, поэтому $CM = 41 : 2 = 20,5$.

15. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 и 12. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.



Рассмотрим прямоугольный треугольник ADC с прямым углом C и катетами $AC = 5$, $DC = 12$. Проведём высоту CH к гипотенузе.

Найдём гипотенузу треугольника AD по теореме Пифагора.

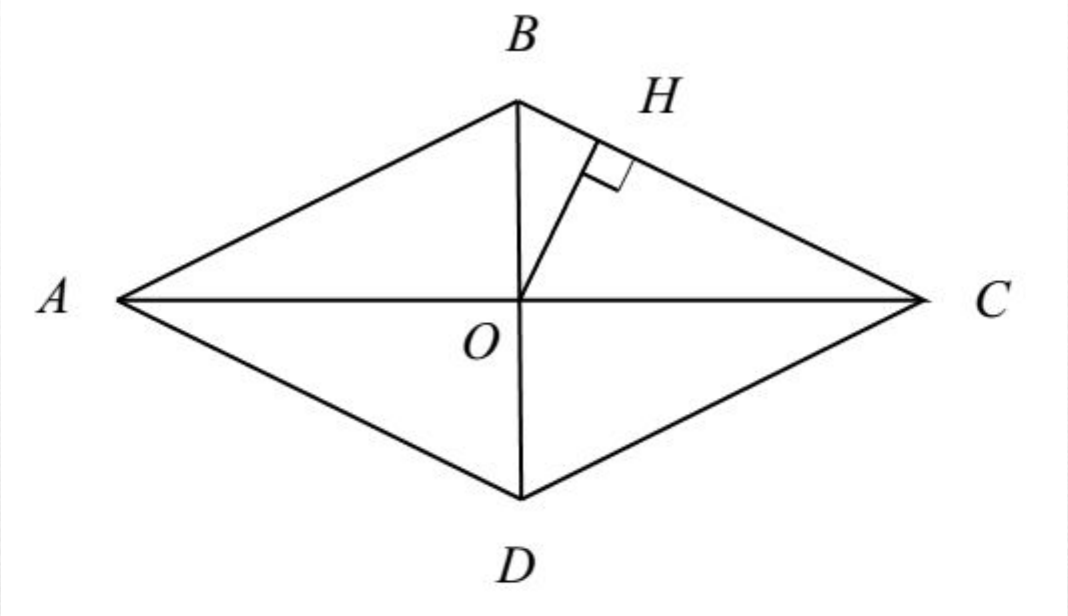
$AD^2 = AC^2 + DC^2 = 5^2 + 12^2 = 169$, $AD = 13$.

Площадь прямоугольного треугольника, с одной стороны, равна половине произведения катетов, с другой стороны, площадь $\triangle ADC$ равна половине произведения гипотенузы на высоту, проведённую к гипотенузе.

$$0{,}5AC \cdot CD = 0{,}5AD \cdot CH,$$

$$CH = \frac{AC \cdot CD}{AD} = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}.$$

21. Расстояние от O — точки пересечения диагоналей ромба $ABCD$ — до одной из его сторон равно 28, а диагональ ромба AC равна 112. Найдите углы ромба.



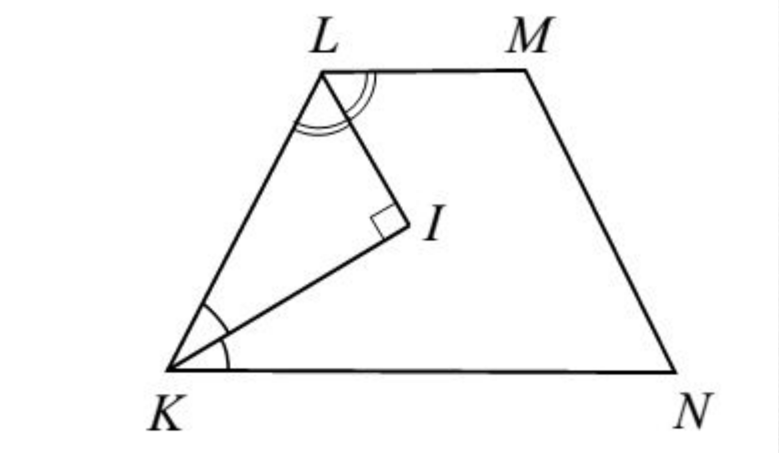
Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам, поэтому $AO = OC = 112 : 2 = 56$. Проведём перпендикуляр OH к стороне BC. Этот перпендикуляр и является расстоянием от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон, $OH = 28$.

Треугольник OHC прямоугольный, его катет OH равен половине гипотенузы OC, значит, лежащий напротив этого катета угол BCO равен $30°$.

Диагонали ромба являются биссектрисами его углов,
$\angle BCD = 2\angle BCO = 2 \cdot 30° = 60°$.

Соседние углы ромба в сумме составляют $180°$, а противоположные равны. Получаем, что $\angle BAD = \angle BCD = 60°$,
$\angle ABC = \angle ADC = 180° - 60° = 120°$.

25. Биссектрисы углов K и L при боковой стороне KL трапеции $KLMN$ пересекаются в точке I. Найдите KL, если $KI = 16$, $LI = 12$.



Основания трапеции параллельны, поэтому

$$\angle NKL + \angle KLM = 180^\circ.$$

KI и LI биссектрисы углов $\angle NKL$ и $\angle KLM$, поэтому

$$\angle LKI + \angle KLI = \frac{\angle LKN}{2} + \frac{\angle KLM}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ.$$

Следовательно,

$$\angle KIL = 180^\circ - \angle LKI - \angle KLI = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

и треугольник KLI прямоугольный. Значит, его гипотенуза по теореме

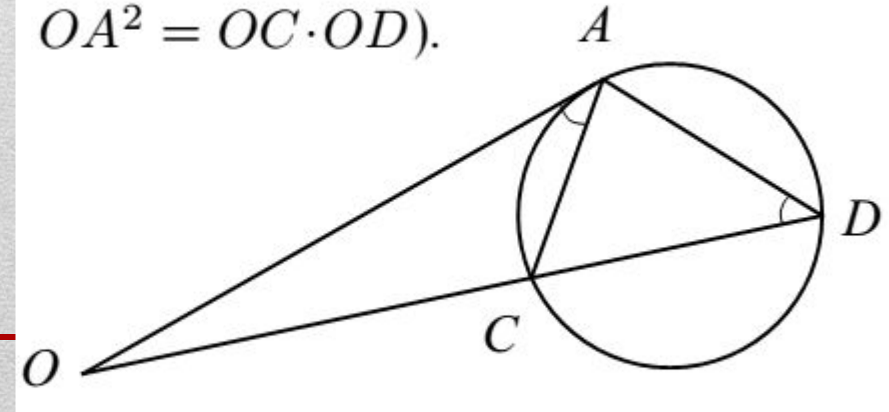
Пифагора равна

$$KL = \sqrt{KI^2 + LI^2} = \sqrt{400} = 20.$$

1.3 Окружность и ее свойства
Теория

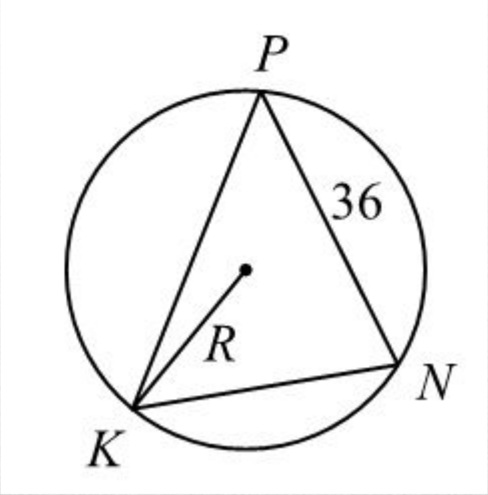
Касательная к окружности, ее свойства
Свойства центральных и вписанных углов
Вписанные и описанные окружности
Признаки вписанного 4-угольника
Теорема о касательной и секущей
Параллелограмм, прямоугольник, их свойства и признаки
Трапеция, ее свойства
Теорема синусов (полная)

$OA^2 = OC \cdot OD$).



$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R.$$

В треугольнике PNK известно, что угол $\angle P = 38°$ и дуга PK окружности, описанной около треугольника PNK, равна $164°$. Найдите радиус этой окружности, если сторона PN равна 36.



Обозначим R радиус описанной окружности треугольника PKN. По теореме синусов для треугольника PKN

$$2R = \frac{PN}{\sin\angle PKN}.$$

Угол PNK вписанный, опирается на дугу PK, следовательно, $\angle PNK = 164^\circ : 2 = 82^\circ$.

Из треугольника PNK

$$\angle PKN = 180^\circ - \angle P - \angle N = 180^\circ - 38^\circ - 82^\circ = 60^\circ,$$

$$2R = \frac{PN}{\sin\angle PKN} = \frac{36}{\sin 60^\circ} = 36 : \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}.$$

$$R = 12\sqrt{3}.$$

Примеры выполнения задачи учащимися

Пример 1.

№24.

$\angle N = \frac{1}{2} \cup PK$ ($\angle N$ опирается на дугу PK), $\angle N = \frac{164^\circ}{2} = 82^\circ$.

По т. синусов $\frac{NK}{\sin P} = 2R$, $\Rightarrow R = \frac{NK}{2\sin P} = \frac{NP}{2\sin K}$

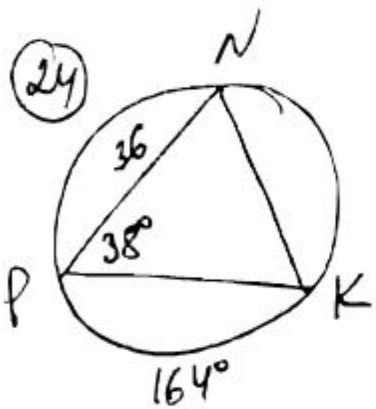
В $\triangle NPK$ сумма углов равна $180^\circ \Rightarrow \angle K = 180^\circ - \angle P - \angle N =$
$= 180^\circ - 82^\circ - 38^\circ = 60^\circ$

$R = \frac{36}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{36}{\sqrt{3}}$. Ответ: $\frac{36}{\sqrt{3}}$.

Комментарий. Ученик не указывает явно, что такое R, но использует это в неявном виде в теореме синусов. Это можно не считать неточностью. Рисунок не является необходимостью, потому что в условии все точки определены. Ответ верный, хоть и осталась иррациональность в знаменателе. За решение нужно выставить 2 балла.

Пример 2.

(24)



$\angle NPK = 38^\circ$, $\angle PNK = \smile PK : 2 = 164 : 2 = 82^\circ$.

$\angle PKN = 180^\circ - (\angle NPK + \angle PNK) = 180^\circ - (38^\circ + 82^\circ) = 60^\circ$.

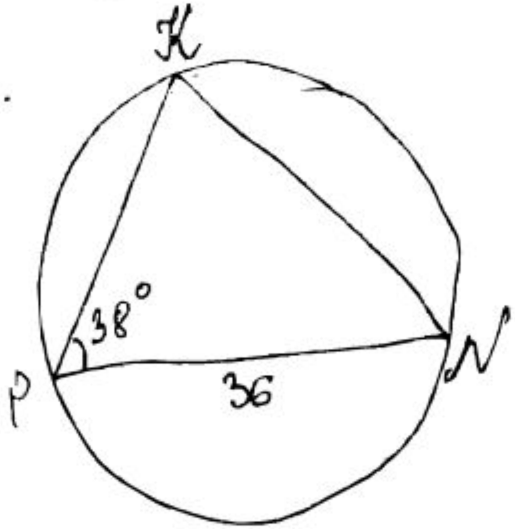
$\frac{PN}{\sin\angle PKN} = 2R \Rightarrow \frac{36}{\sin 60^\circ} = 2R$, $R = \frac{18}{\sqrt{3}/2} = \frac{36\sqrt{3}}{\cancel{3}\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$

Ответ: $12\sqrt{3}$

Комментарий. В решении нет пояснений и ссылок на теоремы, получен правильный ответ. За решение ставится 1 балл.

Пример 3.

24.



$\frac{PN}{\sin K} = 2R$, R – радиус окр-ти.

$PN = 36$, $\angle K = 180° - \angle P - \angle N$.

$\angle P = 38°$, $\angle N = 164° : 2 = 82°$.

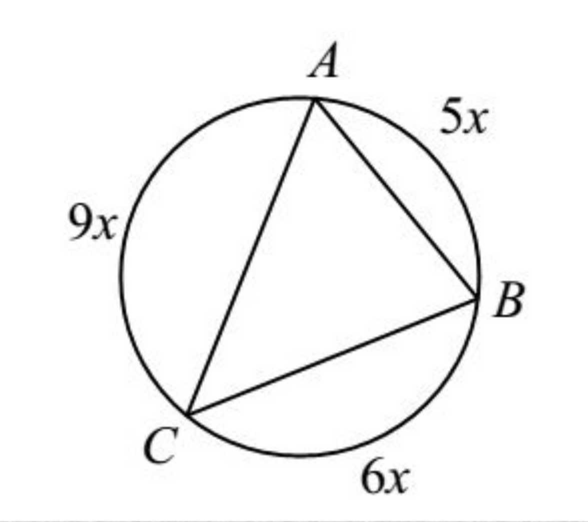
$\angle K = 60°$.

$\frac{36}{\sin 60°} = 2R$, $R = 36 : \frac{\sqrt{3}}{2} : 2 = 36\sqrt{3}$.

Ответ: $R = 36\sqrt{3}$.

Комментарий. В решении сделана ошибка, нет пояснений. За решение нужно выставить 0 баллов.

35. Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся, как 5 : 6 : 9. Найдите радиус окружности, если меньшая из сторон треугольника равна 10.



Обозначим треугольник за ABC и пусть длины дуг AB, BC, CA относятся как $5 : 6 : 9$. $5x + 6x + 9x = 360°, x = 18°$.

Углы треугольника ABC являются вписанными и опираются на дуги AB, BC и CA, поэтому они равны половине градусных мер этих дуг:

$$\angle C = \frac{5x}{2}, \angle A = 3x, \angle B = \frac{9x}{2}.$$

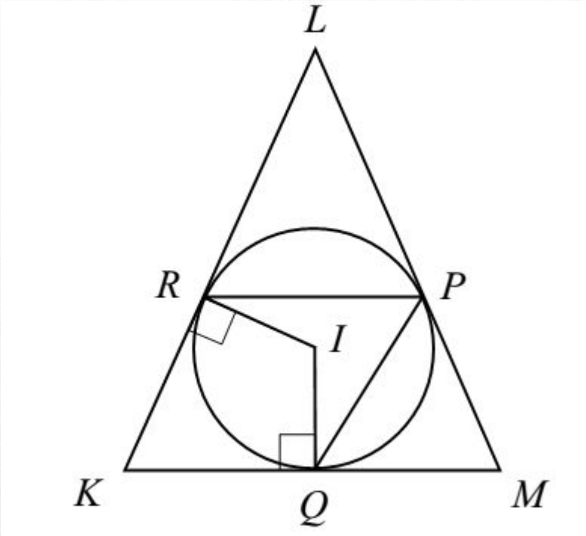
Наименьшая сторона треугольника лежит напротив наименьшего угла C, значит, $AB = 10$.

По теореме синусов:

$$2R = \frac{AB}{\sin\angle C},$$

$$R = \frac{10}{2\sin\left(\frac{5x}{2}\right)} = \frac{5}{\sin 45°} = 5\sqrt{2}.$$

37. Окружность, вписанная в треугольник KLM, касается его сторон в точках P, Q и R. Найдите углы треугольника KLM, если углы треугольника PQR равны 66°, 47° и 67°.



$$\angle RPQ = 66°, \angle PQR = 47°, \angle PRQ = 67°$$

Центральный угол RIQ и вписанный угол RPQ опираются на одну дугу, поэтому $\angle RIQ = 2\angle RPQ$. В четырёхугольнике $KRIQ$ углы R и Q прямые как углы между касательной и радиусом, проведённым в точку касания. Следовательно, четырёхугольник $KRIQ$ вписанный (сумма его противоположных углов равна $180°$) и

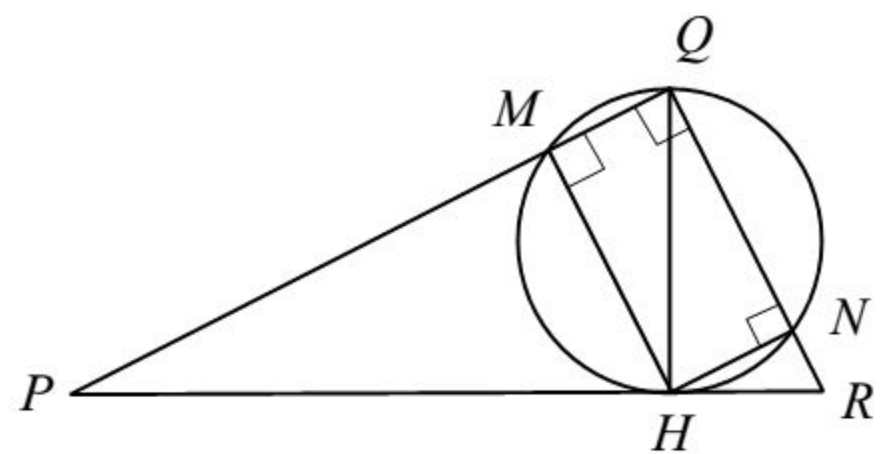
$$\angle K = 180° - \angle RIQ = 180° - 2\angle RPQ = 180° - 2 \cdot 66° = 48°.$$

Повторяя это рассуждение для углов L и M, получаем:

$$\angle L = 180° - 2\angle RQP = 86°,$$

$$\angle M = 180° - 2\angle QRP = 46°.$$

39. Точка H является основанием высоты QH, проведённой из вершины прямого угла Q прямоугольного треугольника PQR. Окружность с диаметром QH пересекает стороны PQ и QR в точках M и N соответственно. Найдите MN, если $QH = 89$.



Решение.

Углы HMQ и HNQ прямые, так как они вписанные и опираются на диаметр HQ окружности. Значит, в четырёхугольнике $HMQN$ углы M, Q и N прямые. Следовательно, $HMQN$ прямоугольник. В прямоугольнике диагонали равны, значит, $NM = QH = 89$.

Задача на доказательство (25).

Ненамного превышает обязательный уровень

В 2012 г. решили менее 14%

Проверяет знание основных терминов и теорем, умение их применять

Проверяет умение записать решение и аргументировать свое мнение

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

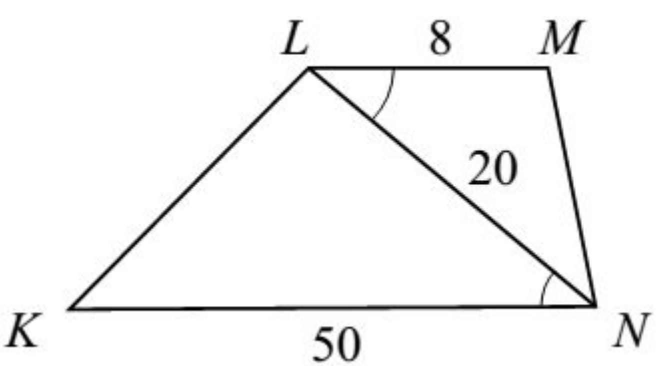
2.1 Базовые понятия и свойства фигур
Теория

Параллельные прямые и их свойства
Биссектриса угла
Треугольник:
- Теорема о сумме углов
- Средняя линия и ее свойства
- Равнобедренный треугольник

Признаки и свойства равных и подобных треугольников
Параллелограмм, прямоугольник, их признаки и свойства
Трапеция

Основания LM и KN трапеции $KLMN$ равны соответственно 8 и 50, $LN = 20$. Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.

Решение.

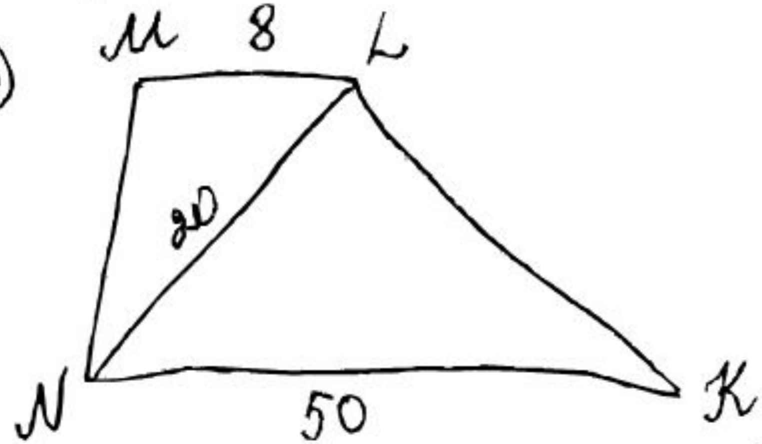


Воспользуемся вторым признаком подобия треугольников: $\angle KNL = \angle NLM$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых LM и KN и секущей NL, а $NL : NK = LM : NL$, так как $NL : NK = 20 : 50 = 0{,}4$, $LM : NL = 8 : 20 = 0{,}4$. Значит, треугольники NKL и LNM подобны.

Примеры выполнения задачи учащимися

Пример 1.

25



Дано: KLMN – трапеция

$ML = 8$, $NL = 20$, $NK = 50$

Доказать: $\Delta LMN \sim \Delta KLN$

Док-во.

$\angle MLN = \angle LNK$,

$\frac{NL}{ML} = \frac{NK}{NL} = \frac{\cancel{20}^{5}}{\cancel{8}_{2}} = \frac{5\cancel{0}}{2\cancel{0}} = \frac{5}{2}$.

Δ-ки подобны

ч.т.д.

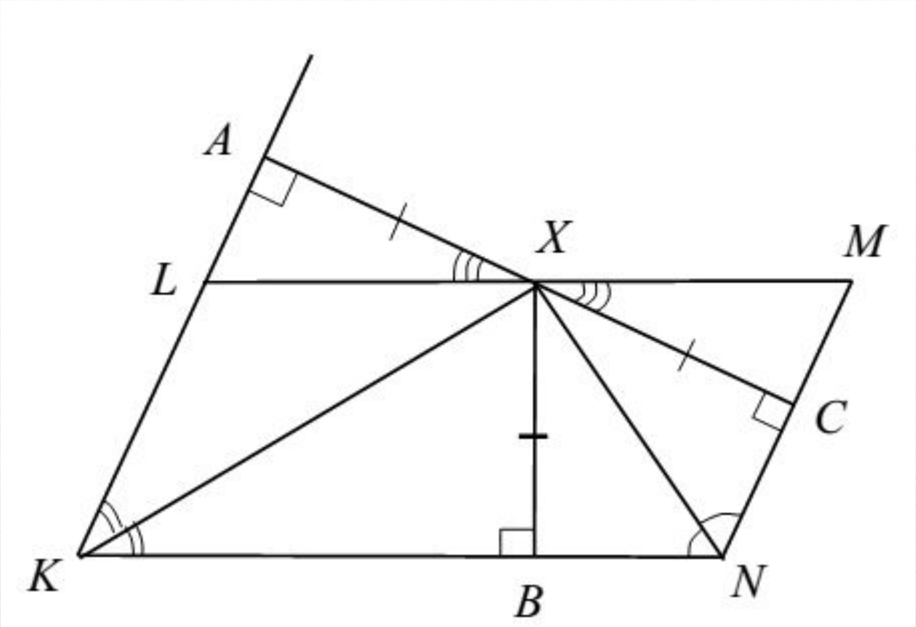
Комментарий. Нет пояснений и ссылок на теоремы. За решение можно поставить 2 балла.

Пример 2.

25. $ML \parallel NK$ (основания трап).
NL секущая.
$\angle NLM = \angle KNL$ (накр. лежащие)
$\frac{KN}{NL} = \frac{50}{20} = \frac{5}{2} = 2{,}5$, $\frac{NL}{LM} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2{,}5$
2 ст. 1тр. пропорц-ны 2 уг. 2-го Δ,
$\angle$ между сторонами равны $\Rightarrow$
Δ-ки $MLN \sim \Delta KNL$.

Комментарий. Решение правильное, пояснения достаточные. Слова «2 ст. одного тр. пропорциональны 2 уг. второго тр.» напоминают шифрограмму, но понятно, что учащийся имеет в виду, а ссылка на углы вместо сторон — явная описка, потому что перед этим выписывались отношения сторон. За решение можно поставить 3 балла.

Биссектрисы углов K и N параллелограмма $KLMN$ пересекаются в точке X стороны LM. Докажите, что X — середина LM.



Опустим из точки X высоты XA, XB, XC на прямые KL, KN и NM соответственно.

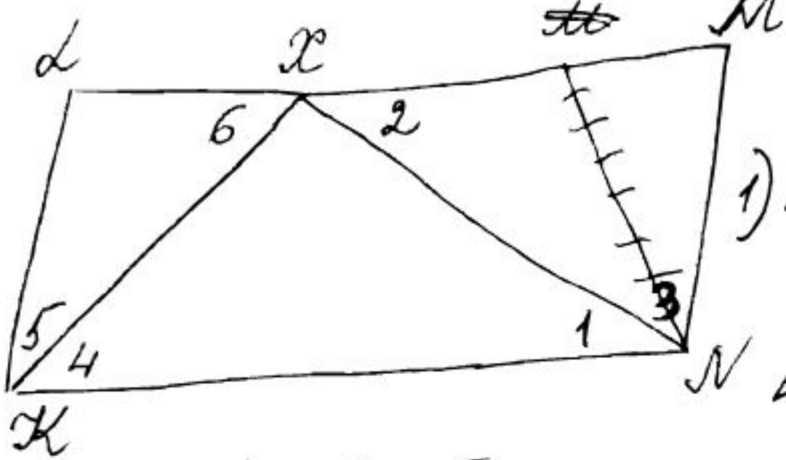
Так как точки, лежащие на биссектрисе угла, равноудалены от сторон угла и точка X лежит на биссектрисах углов LKN и KNM, то $XA = XB$ и $XB = XC$, откуда $XA = XC$. $KL \parallel MN$, поэтому углы XLA и XMC равны как накрест лежащие. Прямоугольные треугольники XLA и XMC равны по катету $XA = XC$ и острому углу, поэтому равны их гипотенузы LX и XM.

Примеры выполнения задачи учащимися

Пример 1.

№25.

Д-ть: X-середина LM.



Док-во.

1) NX – биссект. $\Downarrow$ $\angle 1 = \angle 3$

$\angle 1 = \angle 2$ (накр. леж. $LM \parallel KN$)

$\Downarrow$

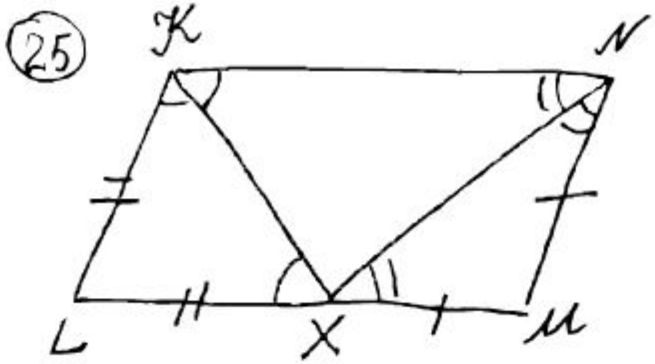
$\triangle XMN$ равнобедр. $\Leftarrow \angle 2 = \angle 3$

$XM = MN$.

2) KX – биссектр. $\Rightarrow \angle 5 = \angle 4$, $\angle 4 = \angle 6$ (нак. леж. $LM \parallel KN$) $\Big\} \Rightarrow \angle 5 = \angle 6$

Комментарий. Решение не доведено до конца. Выставляется 0 баллов.

Пример 2.



$\angle KNX = \angle XNM$ (бисс.)

$\angle KNX = \angle NXM$ (н. л. $\angle$) $KN \parallel LM$

$\Downarrow$

$\angle XNM = \angle NXM \Rightarrow$

против равных углов в $\triangle XMN$ лежат равные стороны $\Rightarrow$

$MN = MX$

Аналогично:

$\angle LKX = \angle NKX$ (бисс.)

$\angle NKX = \angle KXL$ (н. леж. $\angle$, $KN \parallel LM$ $\Rightarrow \angle LKX = \angle KXL$

$\Downarrow$

$LK = LX$, значит $LX = XM$.

Комментарий. На последнем этапе не доказан существенный факт, что из равенств $MN = MX, KL = LX$ следует $LX = XM$. Этот факт нужно доказать, ссылаясь на свойство сторон параллелограмма, что не сделано, причём на рисунке также не отмечено, что стороны равны. Задачу нельзя считать решённой, нужно ставить 0 баллов.

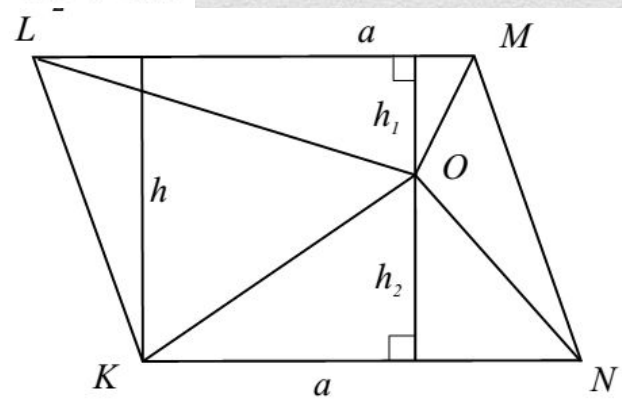
Площади

Задача 2.

Внутри параллелограмма $KLMN$ выбрали произвольную точку O. Докажите, что сумма площадей треугольников LOM и NOK равна половине площади параллелограмма.

Проведём из точки O отрезок, перпендикулярный стороне параллелограмма KN. Так как противоположные стороны параллелограмма параллельны, этот отрезок будет перпендикулярен и стороне ML. Этот отрезок равен высоте параллелограмма, опущенной на сторону LM.

Так как точка O находится внутри параллелограмма, то $h = h_1 + h_2$.



Площадь параллелограмма:

$$S_{KLMN} = h \cdot LM = ah = a(h_1 + h_2),$$

площади треугольников LOM и NOK:

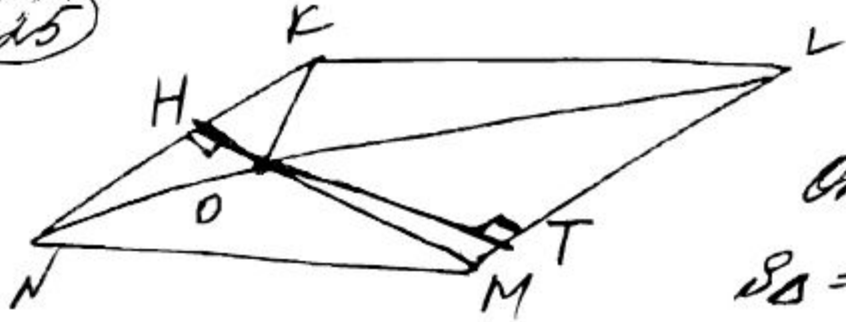
$$S_{LOM} = \frac{1}{2} \cdot h_1 \cdot LM = \frac{ah_1}{2}, \; S_{NOK} = \frac{1}{2} \cdot h_2 \cdot NK = \frac{ah_2}{2}$$

поэтому сумма равна

$$S_{LOM} + S_{NOK} = \frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2} = \frac{a(h_1 + h_2)}{2} = \frac{S_{KLMN}}{2}.$$

Пример 1.

25



Проведем $OH \perp KN$ и $OT \perp ML$.

$S_\Delta = \frac{ah}{2}$, $\Rightarrow$

$$S_{KON} + S_{LOM} = \frac{KN \cdot OH}{2} + \frac{LM \cdot OT}{2} =$$

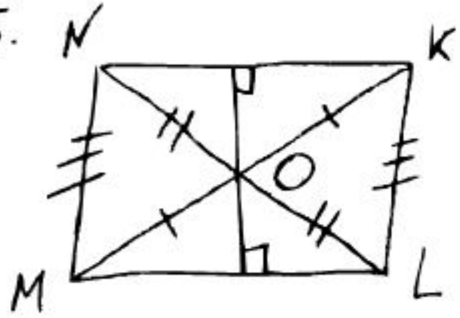
$$= \frac{KN \cdot OH}{2} + \cancel{LM}\frac{KN \cdot OT}{2} = \frac{KN}{2}(OH + OT) = \frac{KN}{2} \cdot HT.$$

$S_{KNML} = KN \cdot HT$, значит сумма площадей Δ-в равна половине $S_{параллелогр.-а}$.

Комментарий. Решение верное, но не доказано, что сумма высот треугольников равна высоте параллелограмма. Решение оценивается в 2 балла.

Пример 2.

№25.



Доказать: $S_{NKO} = S_{MOL}$

Доказат-во:

MNKL – параллелограмм, диагонали делятся пополам,

$$\left.\begin{aligned} S_{MOL} &= S_{MKL} - S_{KOL} \\ S_{NKO} &= S_{MNK} - S_{MNO} \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_{MOL} = S_{NKO}$$

$\Delta KOL = \Delta MON$ по 3 сторонам

ч.т.д.

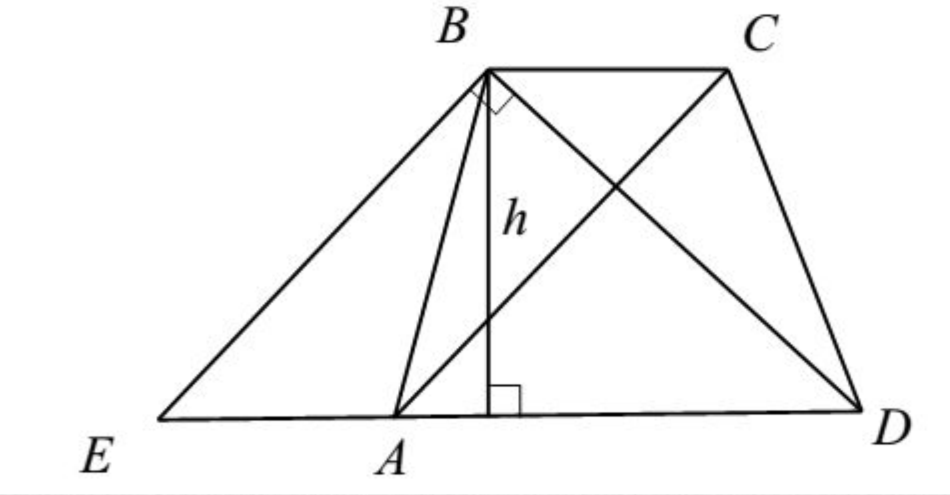
Комментарий. Решение неверное. Выставляется 0 баллов.

Задачи высокого уровня сложности

Требования к записи решения такие же, как и к другим задачам: полное и математически грамотное решение, понятный ход рассуждений учащегося. Запись решения должна удовлетворять указанным выше требованиям, а в остальном может быть произвольной. Нерациональное решение не является основанием для уменьшения числа выставленных баллов. За полное решение выставляется 4 балла.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, чертёж соответствует условию задачи, но пропущены существенные объяснения или допущена вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Найдите площадь трапеции, диагонали которой равны 30 и 16, а средняя линия равна 17.

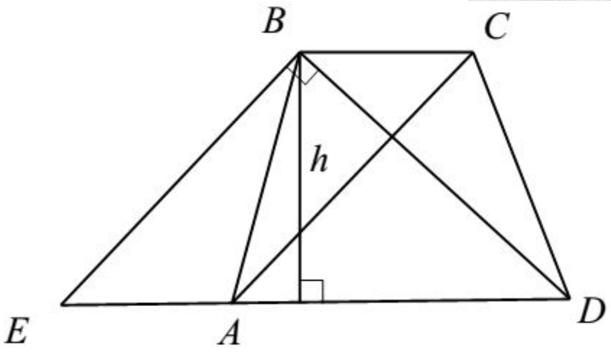


Решение.

Обозначим трапецию $ABCD$ и пусть $AC = 16$, $BD = 30$. Тогда по формуле для длины средней линии $BC + AD = 2 \cdot 17 = 34$. Проведём через точку B прямую BE, параллельную диагонали AC и пересекающую прямую AD в точке E. Обозначим h высоту трапеции $ABCD$.

$BCAE$ является параллелограммом, так как $BC \parallel AE$ и $BE \parallel CA$. Поэтому $BE = AC = 16$, $EA = BC$, $ED = EA + AD = 34$. Треугольник BED прямоугольный по теореме, обратной теореме Пифагора, так как для его сторон $16; 30; 34$ выполняется равенство $BE^2 + BD^2 = DE^2$. Его площадь равна

$$S_{BED} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot BD = 240.$$



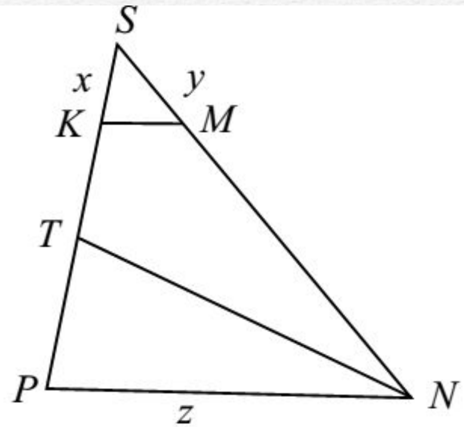
С другой стороны

$$S_{BED} = \frac{1}{2}hDE = \frac{h(BC + AD)}{2} = S_{ABCD},$$

поэтому искомая площадь трапеции $ABCD$ равна 240.

Ответ: 240.

45. Боковые стороны PK и MN трапеции $PKMN$ равны соответственно 12 и 15, а основание KM равно 3. Биссектриса угла PNM проходит через середину стороны PK. Найдите площадь трапеции.



Решение.

Пусть биссектриса угла PNM пересекает PK в точке T, а прямые PK и MN пересекаются в точке S. Обозначим $x = SK, y = SM, z = PN$.

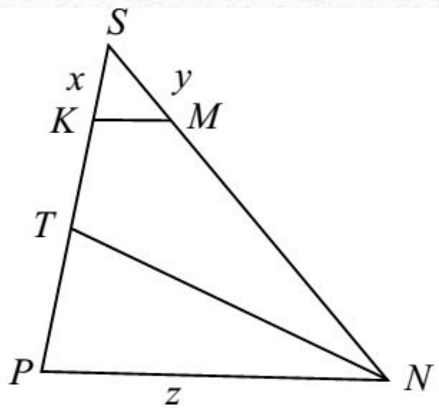
Тогда по свойству биссектрисы:

$$\frac{PT}{TS} = \frac{PN}{NS},$$

$$\frac{6}{6+x} = \frac{z}{15+y}.$$

Треугольники KMS и PNS подобны, так так $\angle S$ общий, а $\angle MKS = \angle NPS$ как соответственные при параллельных прямых KM и PN. Поэтому:

$$\frac{x}{y} = \frac{12+x}{15+y},$$
$$\frac{3}{x} = \frac{z}{12+x}$$



Из равенства $\frac{x}{y} = \frac{12+x}{15+y}$ получаем $y = \frac{5x}{4}$. Выражая z из остальных уравнений, получаем:

$$z = 3 \cdot \frac{12+x}{x} = 6 \cdot \frac{15+y}{6+x}.$$

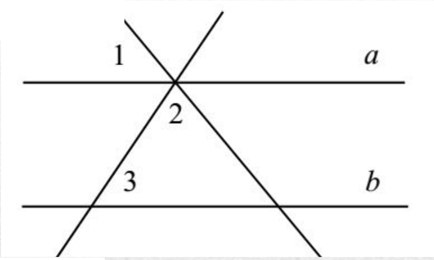
Подставив $y = \frac{5x}{4}$, получим $z = 3 \cdot \frac{12+x}{x} = \frac{15}{2} \cdot \frac{12+x}{6+x}$. Решая это уравнение, находим $x = 4$, откуда $y = \frac{5x}{4} = 5$, $z = 3 \cdot \frac{12+x}{x} = 12$.

Видим, что треугольник SPN имеет стороны $PN = 12$, $SP = 16$, $SN = 20$, значит, он прямоугольный по теореме, обратной теореме Пифагора. Поэтому SP перпендикулярна PN, и PK является высотой трапеции. Значит: $S_{PKMN} = KP \cdot \frac{KM+PN}{2} = 12 \cdot \frac{3+12}{2} = 90.$

Диагностика достижений

Вариант 1

1. Прямые a и b параллельны. Найдите $\angle 1$, если $\angle 2 = 31°$, $\angle 3 = 48°$. Ответ дайте в градусах.



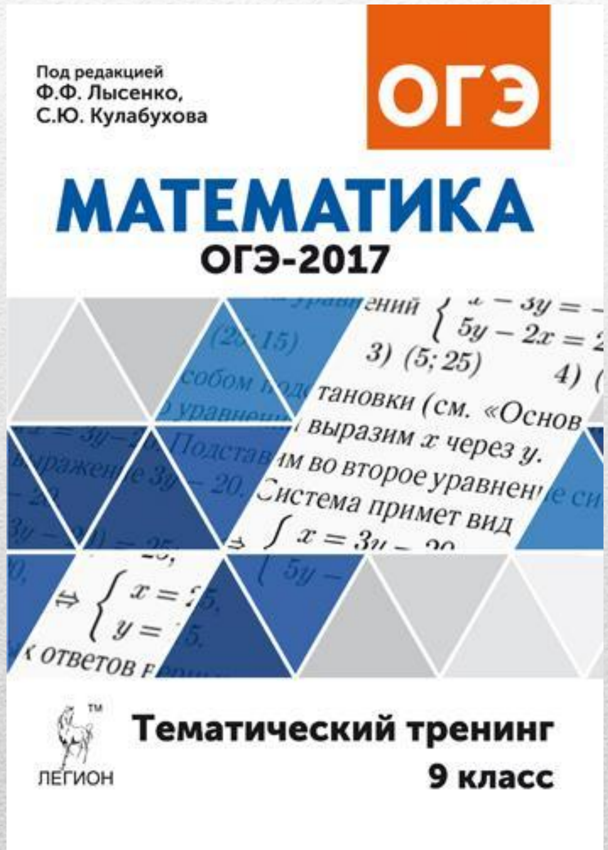
2. Окружность с центром в точке O описана около равнобедренного треугольника MPK, в котором $MP = PK$ и $\angle MPK = 164°$. Найдите величину угла POK. Ответ дайте в градусах.

3. Прямая, параллельная стороне PK треугольника PKT, пересекает стороны PT и KT в точках R и V соответственно. Найдите RV, если $TR : RP = 2 : 5$, $PK = 49$.

4. Основания DF и GH трапеции $DFGH$ равны соответственно 25 и 9, $DG = 15$. Докажите, что треугольники DFG и DGH подобны.

5. Основание ER равнобедренного треугольника ERT равно 16. Окружность радиуса 10 с центром O вне этого треугольника касается продолжений боковых сторон треугольника ERT и касается основания ER. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ERT.

Тренинг и контроль на заключительном этапе повторения
Базовый, повышенный и высокий уровень



Спасибо за внимание!

Электронные ресурсы

Пособия для подготовки к ОГЭ

http://legionr.ru/books/filter.php

ФИПИ Демоверсии, спецификации, кодификаторы

http://www.fipi.ru/oge-i-gve-9/demoversii-specifikacii-kodifikatory

ФИПИ Для предметных комиссий субъектов РФ

http://www.fipi.ru/oge-i-gve-9/dlya-predmetnyh-komissiy-subektov-rf

Открытые банки ГИА http://mathgia.ru
http://www.fipi.ru/content/otkrytyy-bank-zadaniy-oge