Построение и анализ алгоритмов

Лекция 4.3

Динамическое программирование

АНАЛОГИИ

АНАЛОГИИ

<u>Решение методом динамического программирования</u>

Задачи:

- Перемножение цепочки матриц
- Оптимальные БДП
- *Задача X и т.п.*

Задачи ***подсчёта*** и задачи ***оптимизации***.

Например:

«Число различных расстановок скобок» и «Оптимальная расстановка»

Оценка количества узлов дерева

Из лекции про перемножение матриц

Оценить количество узлов дерева в общем случае можно подсчётом всех возможных ***вариантов расстановок скобок в произведении*** матриц.

Пусть p_n – число вариантов расстановок скобок в произведении n сомножителей (включая самые внешние скобки).

Например, для трёх сомножителей abc имеем два варианта $(a(bc))$ и $((ab)c)$, а следовательно, $p_3 = 2$.

В общем случае, считая, что «последнее» по порядку умножение может оказаться на любом из $n-1$ мест, запишем следующее рекуррентное соотношение:

$$p_n = p_1\, p_{n-1} + p_2\, p_{n-2} + \ldots + p_{n-2}\, p_2 + p_{n-1}\, p_1.$$

Из лекции про перемножение матриц

Начальное условие $p_1 = 1$. Далее

$$p_2 = p_1\, p_1 = 1,$$

$$p_3 = p_1\, p_2 + p_2\, p_1 = 2,$$

$$p_4 = p_1\, p_3 + p_2\, p_2 + p_3\, p_1 = 5.$$

Оказывается [7, с. 393], что решением этого рекуррентного уравнения являются так называемые ***числа Каталана***

$p_n = C_{n-1}$, где $C_n = (2\,k \mid k) / (k + 1)$,

а запись $(n \mid m)$ обозначает биномиальный коэффициент

$$(n \mid m) = n!/(m!\,(n - m)!).$$

При больших значениях n справедливо

$$C_n \approx 4^n \big/ n\sqrt{\pi n}$$

т. е. число узлов в дереве перебора есть экспоненциальная функция от n.

Несколько первых чисел Каталана

Из лекции про перемножение матриц

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16 796

Ср. C_{n-1} и $(n^3 - n)/3$

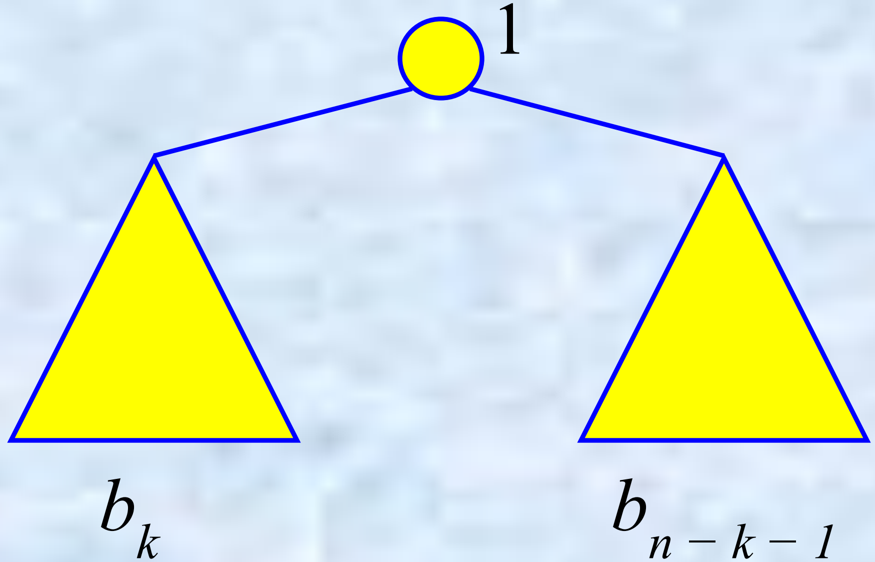
Например, при $n = 10$

n	6	7	8	9	10
C_{n-1}	42	132	429	1430	4862
$(n^3 - n)/3$	70	112	168	240	330

Число b_n структурно **различных бинарных деревьев с** n **узлами**

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k b_{n-k-1} = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \ldots + b_{n-2} b_1 + b_{n-1} b_0, \quad b_0 = 1, b_1 = 1.$$

Из лекции про БДП



$k \in 0..(n-1)$

Это рекуррентное уравнение с точностью до обозначений совпадает с рекуррентным уравнением, получающимся при подсчёте числа расстановок скобок в произведении *n* сомножителей

(см. лекцию 16, слайд 16).

Из лекции про БДП

$$b_2 = b_0\, b_1 + b_1\, b_0 = 2,$$

$$b_3 = b_0\, b_2 + b_1\, b_1 + b_2\, b_0 = 5,$$

$$b_4 = b_0\, b_3 + b_1\, b_2 + b_2\, b_1 + b_3\, b_0 =$$

$$= 5 + 2 + 2 + 5 = 14$$

Решением рекуррентного уравнения являются так называемые *числа Каталана* C_n, т. е. $b_n = C_n$.

Ранее были приведены общая формула для чисел Каталана и асимптотическое соотношение

$$\boxed{C_n \approx 4^n \big/ n\sqrt{\pi n}}$$

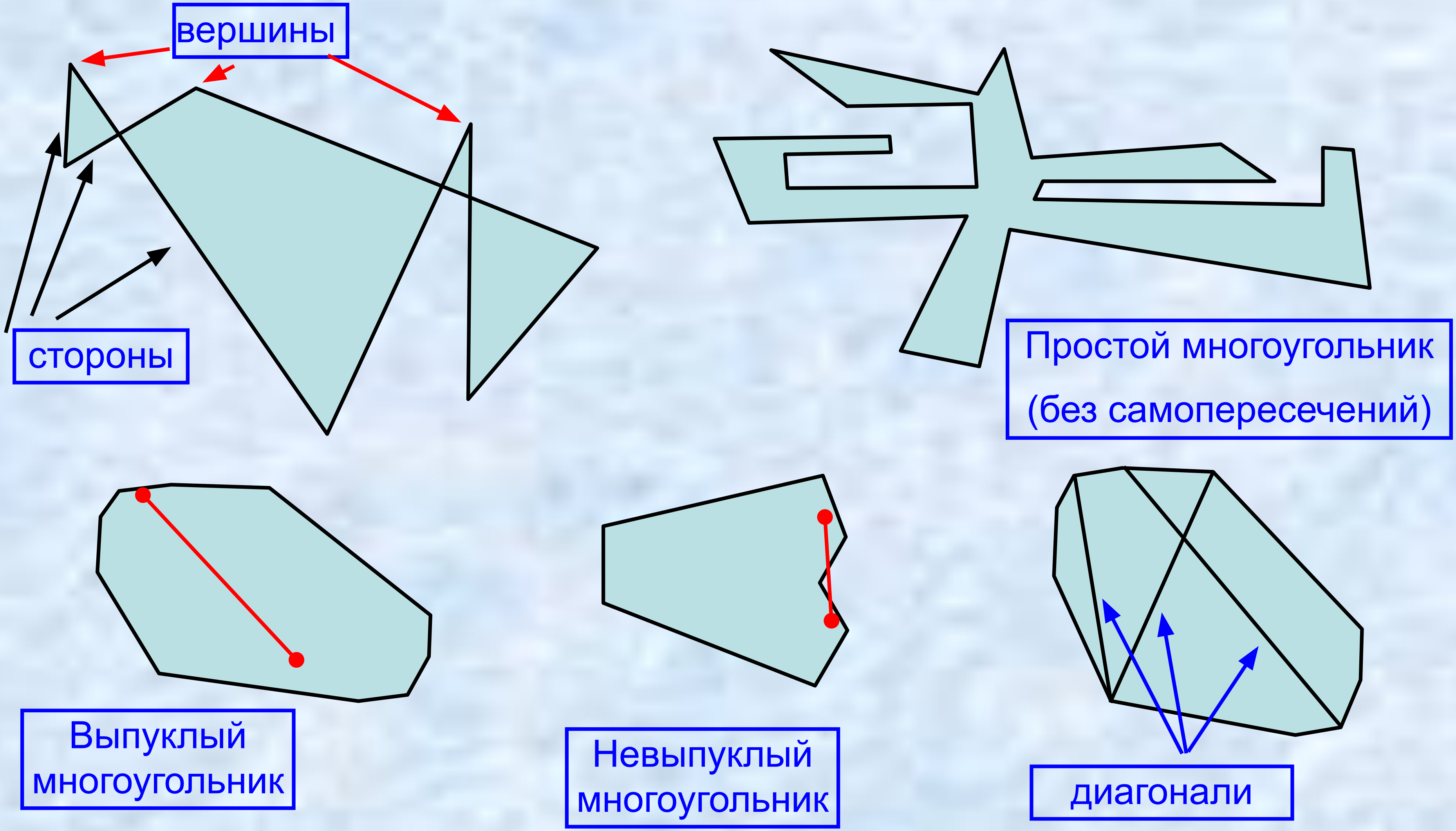
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16 796

Решение методом динамического программирования

1. Структура оптимального решения
2. Рекуррентное соотношение
3. Вычисление оптимальной стоимости (по рекуррентному соотношению)
4. Построение оптимального решения

Проиллюстрировать на предыдущих примерах

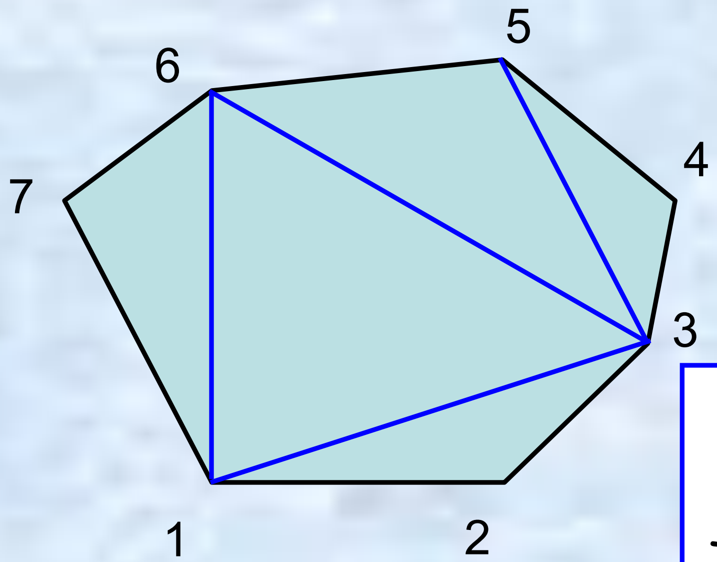
Задача: оптимальная триангуляция выпуклого многоугольника



Задача: оптимальная триангуляция выпуклого многоугольника

Триангуляция

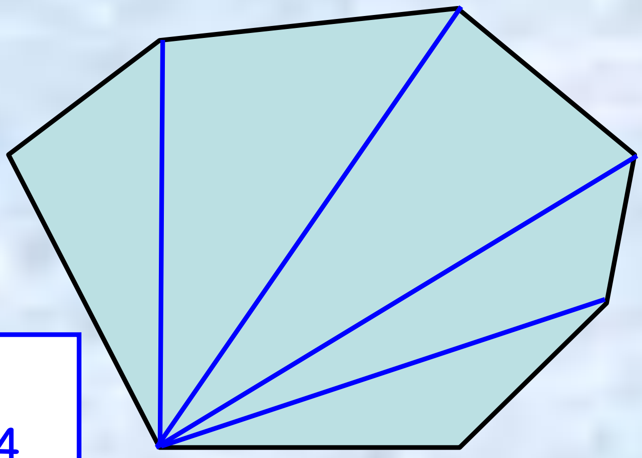
(диагонали не пересекаются внутри многоугольника)



7-угольник

Диагоналей: 4

Треугольников: 5



Выпуклый n-угольник

Число диагоналей: $n - 3$

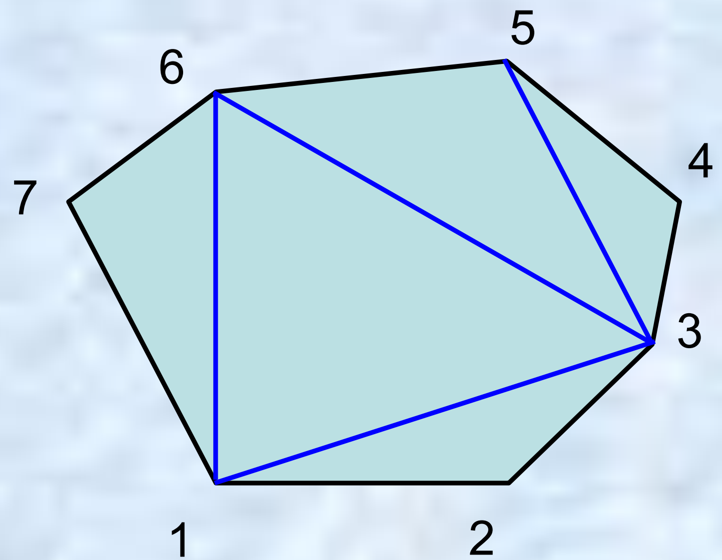
Число треугольников: $n - 2$

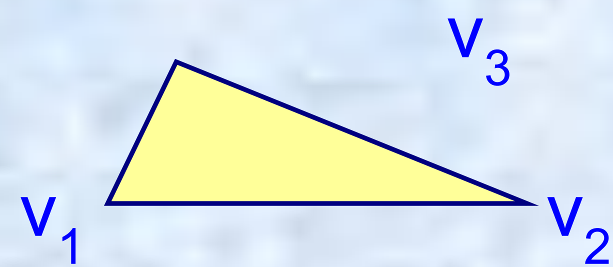
Задача: оптимальная триангуляция многоугольника

На треугольниках определена весовая функция

$w(\Delta v_i v_j v_k)$

Например, $w(\Delta v_1 v_2 v_3) = |v_1 v_2|+|v_2 v_3| +|v_2 v_3|$





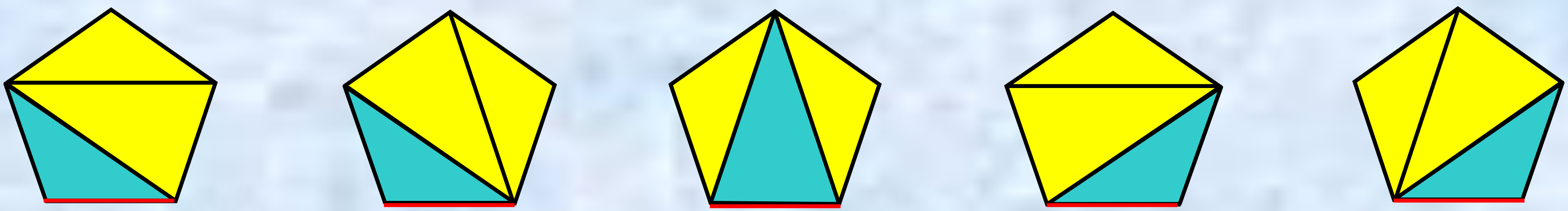
Требуется найти триангуляцию, для которой сумма весов Δ-ков будет *минимальной*

Количество способов триангуляции

Вершин n, диаг. = n – 3 , треуг. = n – 2

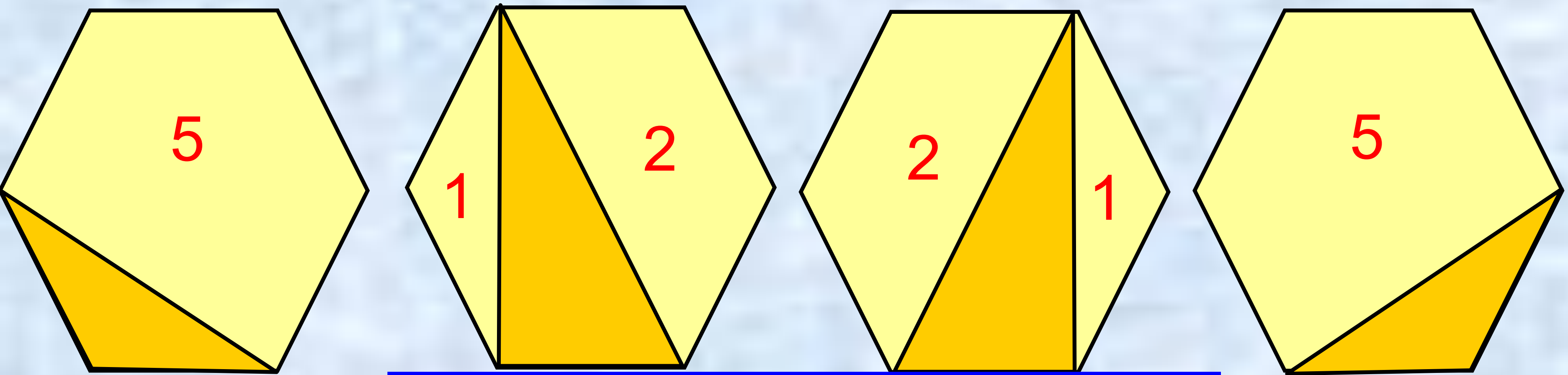
n = 4, диаг. =1, треуг. = 2, вариантов = 2

n = 5, диаг. =2, треуг. = 3, вариантов = 5



Количество способов триангуляции

n = 6, диаг. =3, треуг. = 4,   вариантов = 14

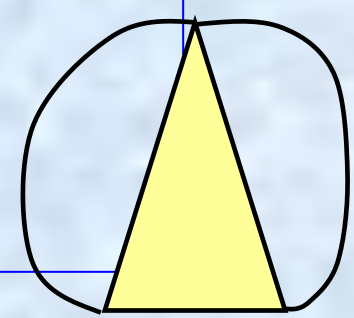


$$d_6 = d_2 d_5 + d_3 d_4 + d_4 d_3 + d_5 d_2$$

$$d_n = \sum_{k=2}^{n-1} d_k d_{n-k+1} = d_2 d_{n-1} + d_3 d_{n-2} + d_4 d_{n-3} + \ldots + d_{n-1} d_2$$

$$d_2 = 1, d_3 = 1, d_4 = d_2 d_3 + d_3 d_2 = 1 + 1 = 2$$

$$d_n = C_{n-2}$$



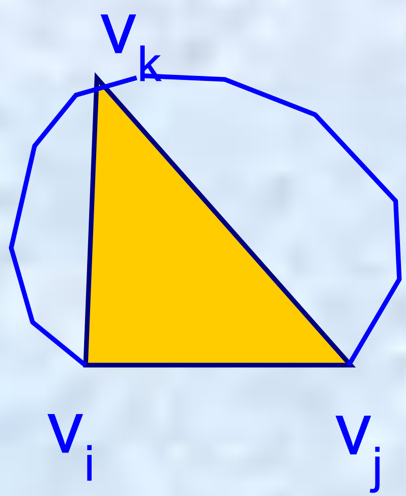
Рекуррентная формула для веса оптимальной триангуляции многоугольника (ОТМ), 1

M_{ij} = многоугольник $(v_i, v_{i+1},\dots, v_j)$, $i<j$, т.е. $(j-i+1)$-угольник
Т.е. M_{1n} = многоугольник $(v_1, v_2,\dots, v_n)$

$$m_{ij} = \min_{i<k<j} \{m_{ik} + m_{kj} + w(v_i v_k v_j)\}, \quad i+1<j,$$

$$m_{i,i+1} = 0$$

m_{ij} – вес ОТМ $(v_i,v_{i+1},\dots,v_j)$
m_{1n} – вес ОТМ $(v_1,v_2,\dots,v_n)$
Для двуугольника $m_{i,i+1} = w(v_{i-1},v_i)=0$



Динамическое программирование

Вычисление таблиц:

$m_{i,i+1} = 0,$ {при $i=1..n-1$}

$m_{i,i+2} = w(\Delta i, i+1, i+2),$ {при $i=1..n-2$}

$m_{i,i+3} = \ldots$

…

$m_{i,i+n-2} \to m_{1,n-1}, m_{2,n}$ {при $i=1, 2$}

$m_{i,i+n-1} = m_{1n}$ {при $i=1$}

Время $\approx C_1 n^3$, память $\approx C_2 n^2$

Рекуррентная формула для веса оптимальной триангуляции многоугольника (ОТМ), 2

M_{ij} = многоугольник (v_{i-1}, v_i,…, v_j), $i<j$, т.е. $(j-i+2)$-угольник
Т.е. M_{1n} = многоугольник (v_0, v_2,…, v_n), т.е. это $(n+1)$-углнк

$$m_{ij} = \min_{i \le k < j} \{m_{ik} + m_{k+1,j} + w(v_{i-1} v_k v_j)\}, \quad i < j,$$

$$m_{ii} = 0$$

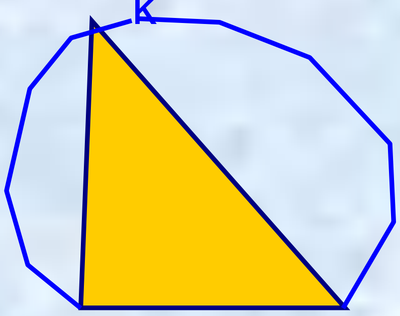
В таком виде почти полное сходство с прежними примерами!

m_{ij} – вес ОТМ (v_{i-1},v_i,…,v_j)

m_{1n} – вес ОТМ (v_0,v_1,…,v_n)

Для двуугольника $m_{ii} = w(v_{i-1},v_i)=0$

Время $\approx C_1 n^3$, память $\approx C_2 n^2$

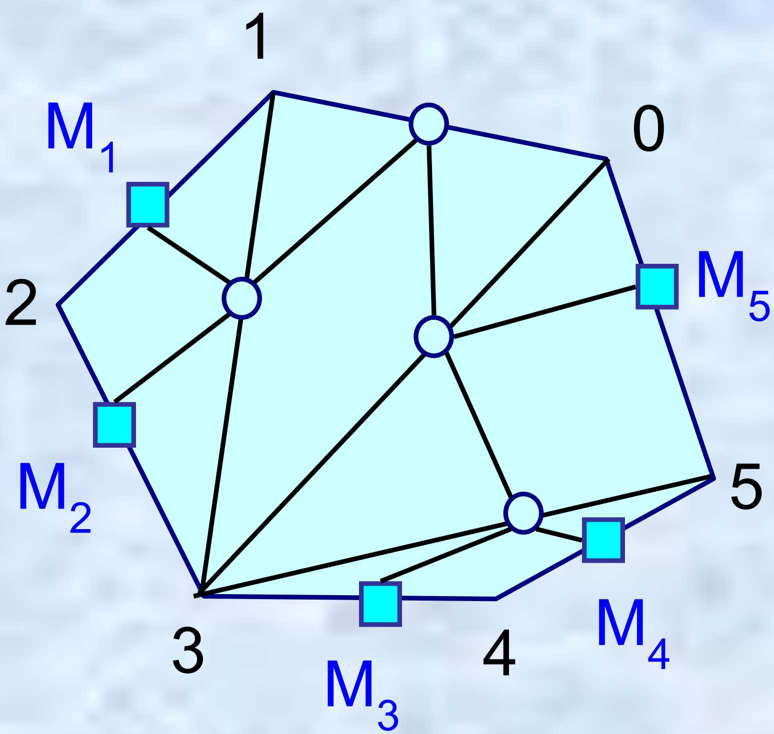


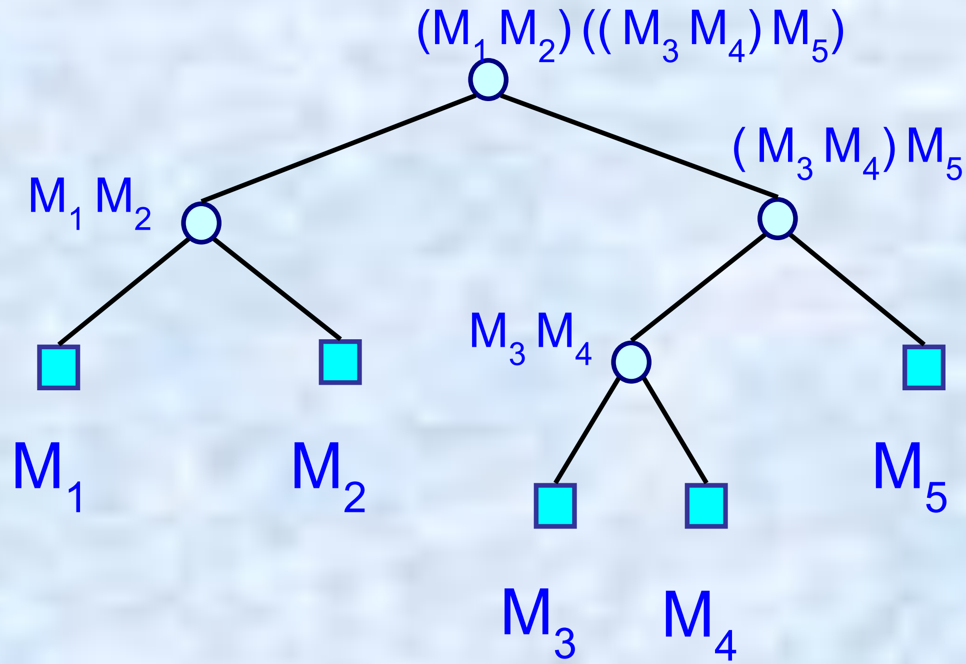
Упражнения

1. Доказать, что триангуляция n–угольника содержит n-2 треугольника и n-3 диагоналей.
2. Пусть вес треугольника = его площади. Можно ли упростить алгоритм поиска ОТМ?
3. Весовая функция определена на множестве диагоналей многоугольника. ОТМ — сумма весов диагоналей минимальна. Как свести эту задачу к рассмотренной?

Задание. Рассмотрите полностью какой-либо пример с 5- или 6-угольниками.
(для тренировки к ТК)

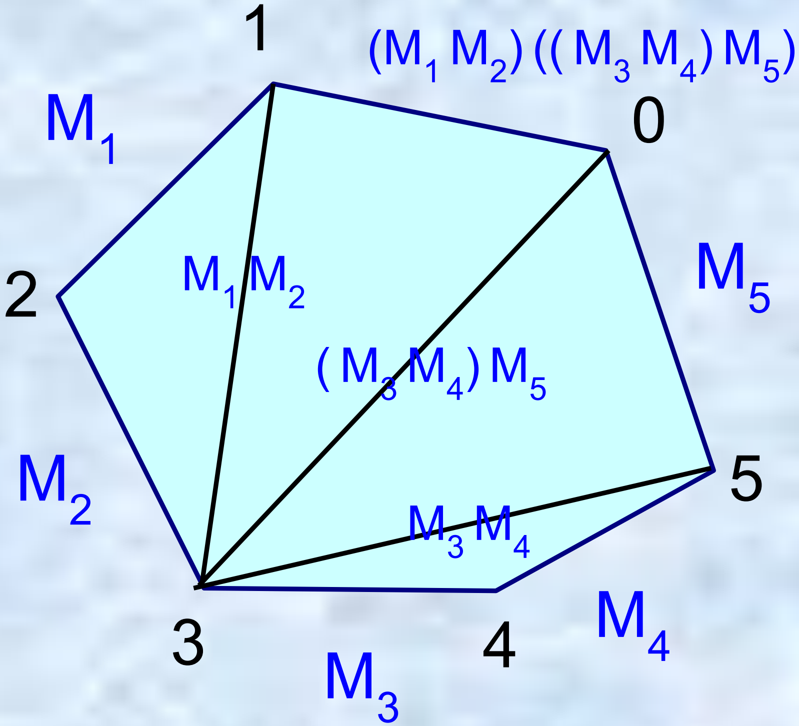
Связь задач





$$\boxed{(M_1\, M_2)\, ((\, M_3\, M_4)\, M_5)}$$

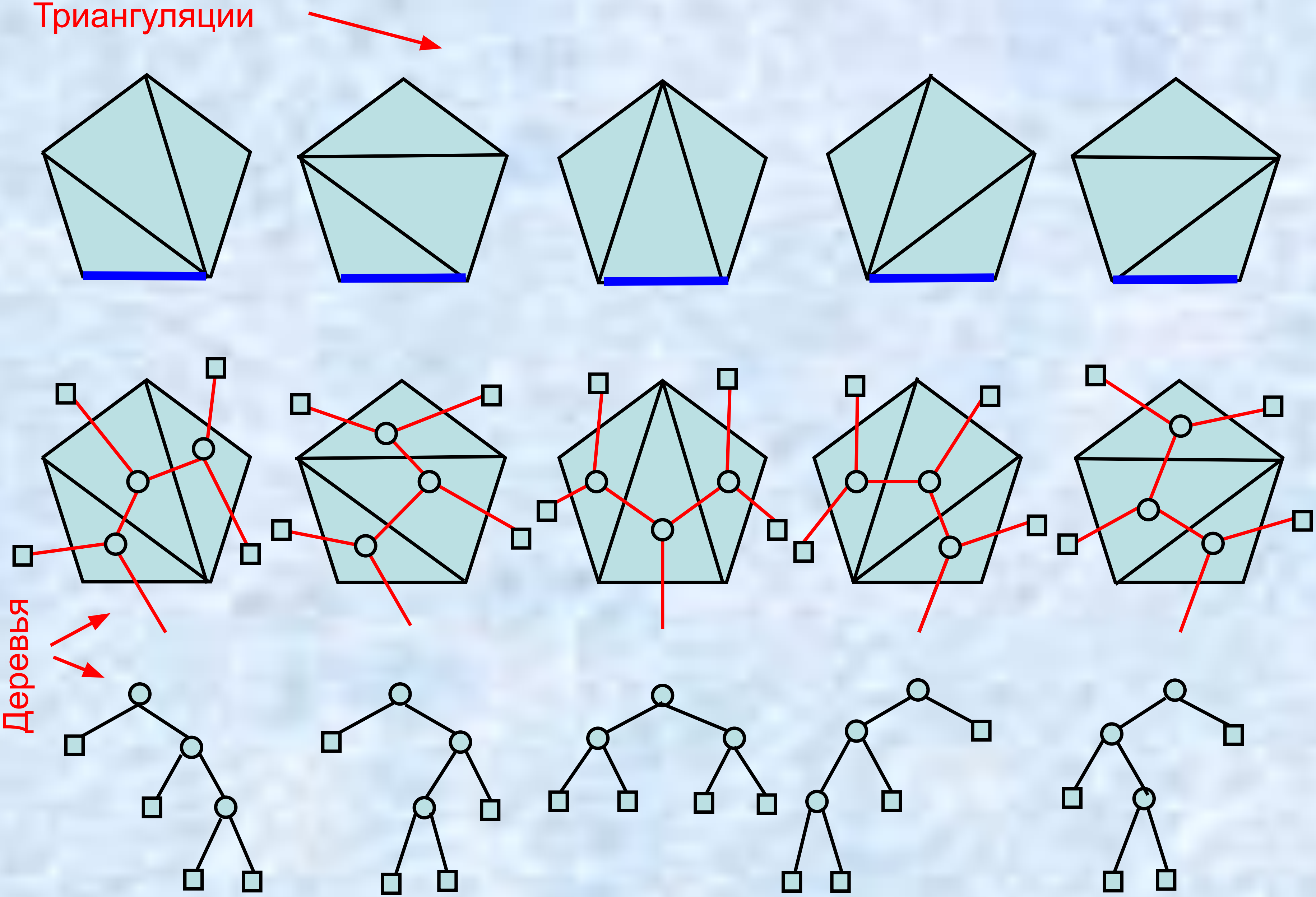
Связь задач

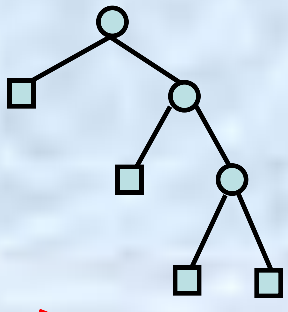


$$(M_1 M_2)((M_3 M_4) M_5)$$

$$\boxed{w(\Delta v_i v_j v_k) = r_i\, r_j\, r_k}$$

Триангуляции

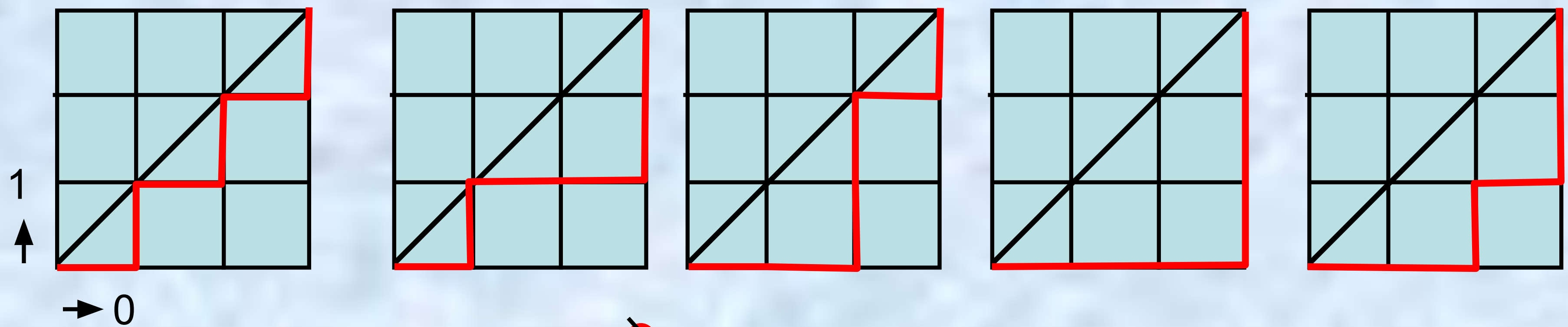


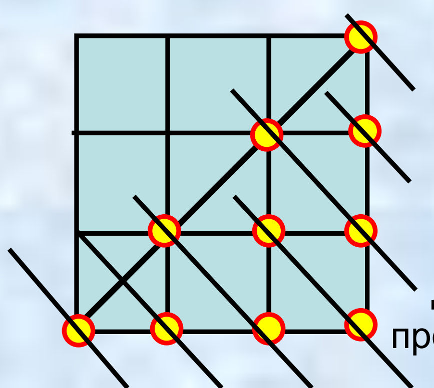


Коды

0 1 0 1 0 1 | 0 1 0 0 1 1 | 0 0 1 1 0 1 | 0 0 0 1 1 1 | 0 0 1 0 1 1

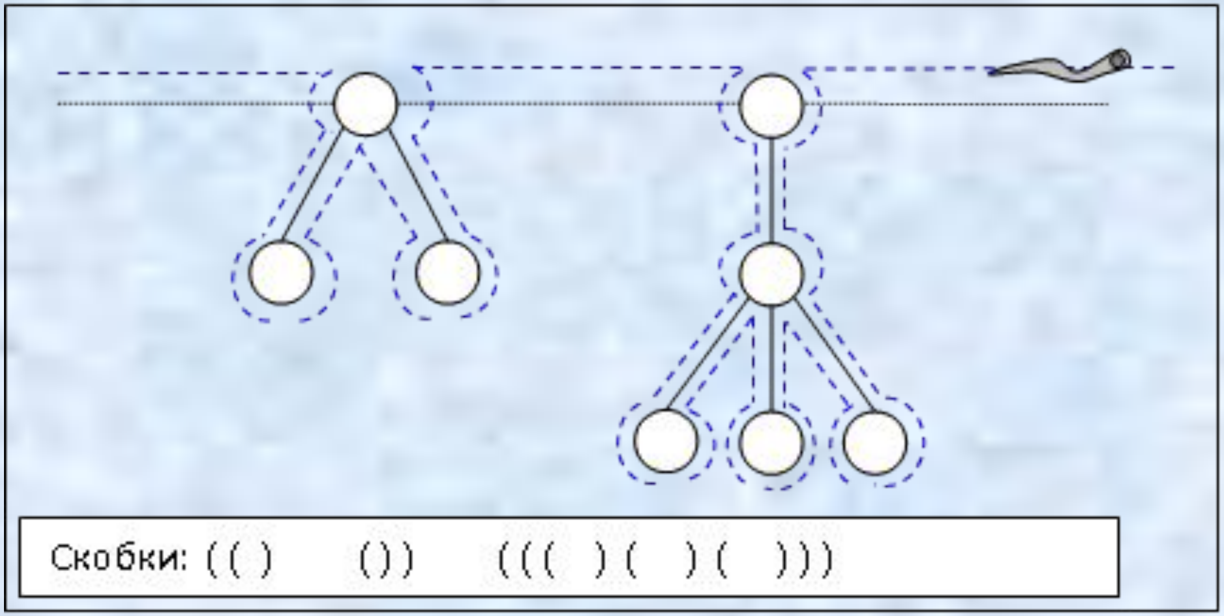
Пути в решётке

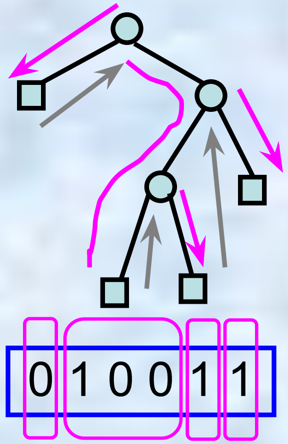




Слоистая сеть (спец. вида)

Преобразование «Ползущий червь»





Обход в глубину:
от узла влево – 0; вправо - 1

Литература

1. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ : учеб./ М.: МЦМНО, 1999. – 960 с. (Классические учебники: Computer science). (Доп. тираж 2000 г., 2001 г., 2002 г.) [Опт.Трианг.]
2. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ, 2-е издание.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2007, 2009. – 1296 с.
3. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ, 3-е издание.: Пер. с англ. – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2013. – 1328 с.

КОНЕЦ   ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ   ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ   ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ   ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ   ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ   ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ   ЛЕКЦИИ

КОНЕЦ   ЛЕКЦИИ