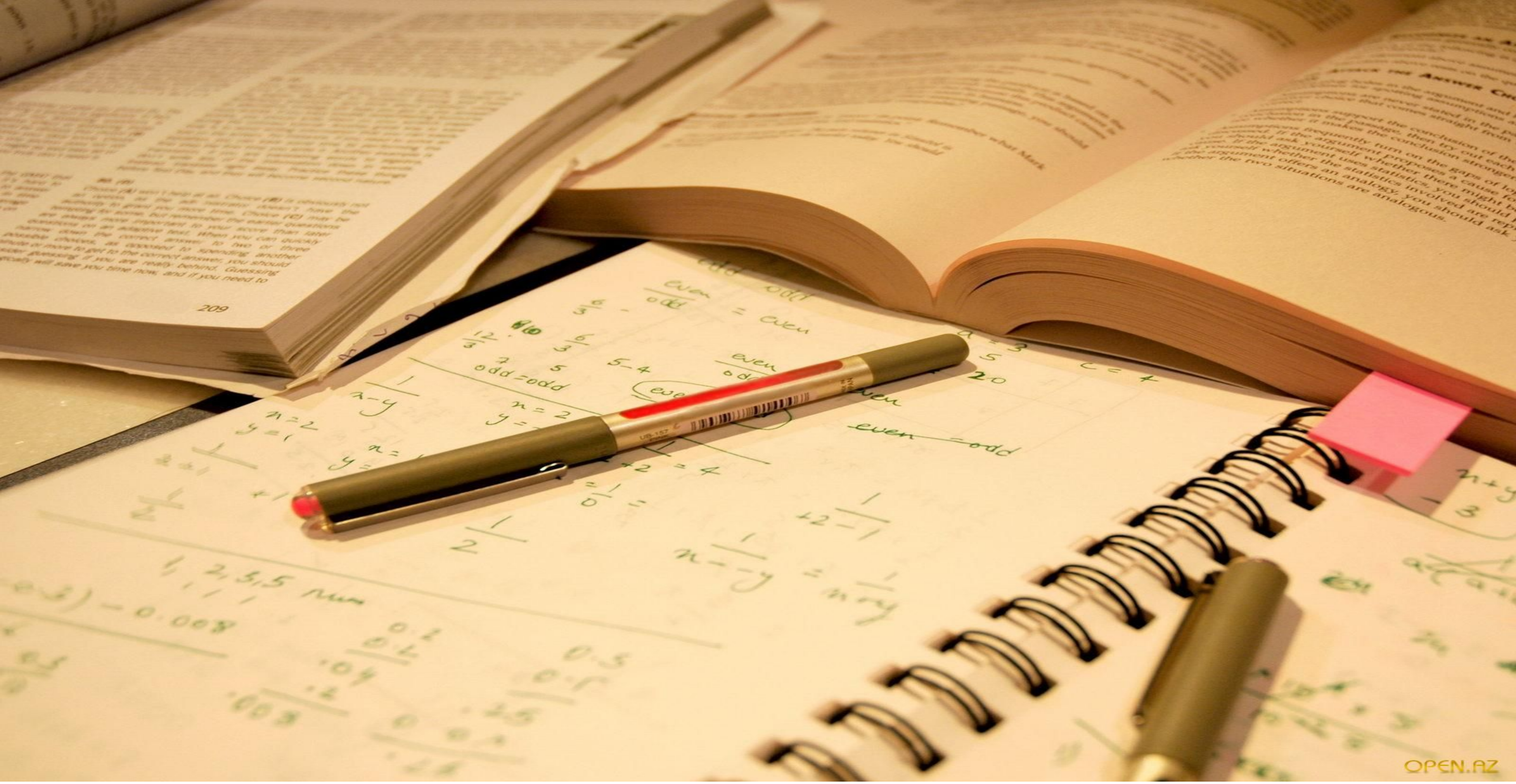

Уральский федеральный университет

М.В. Киселева

ИНФОРМАТИКА

Уральский федеральный университет

ТЕМА 10. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

- Определение системы счисления
- Формы представления чисел в ЭВМ
- Перевод чисел из одной системы счисления в другую
- Прямой, обратный и дополнительный коды чисел
- Сложение чисел в обратном и дополнительном коде

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Система счисления (СС) – это способ наименования и изображения чисел с помощью символов, имеющих определенные количественные значения.

Цифры – символы, используемые для записи чисел.

Алфавит – множество цифр, образующих систему счисления.

Системы счисления

Позиционные (например, арабская СС)

Непозиционные (например, римская СС)

В позиционной СС одна и та же цифра имеет различные значения, определяемые позицией цифры в последовательности цифр, изображающей число.

В непозиционной СС значение цифры не зависит от ее положения в записи числа.

Уральский федеральный университет

Основание системы счисления ($\boldsymbol{P}$) – это количество различных цифр, используемых для изображения числа в **позиционной** СС.

Значения цифр лежат в пределах от 0 до $P-1$.

Например,

Десятичная система счисления

Основание $P = 10$

Цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Уральский федеральный университет

Любое число C в позиционной СС с основанием P может быть представлено в виде полинома

$$C = C_n P^n + C_{n-1} P^{n-1} + \cdots + C_1 P^1 + C_0 P^0 + C_{-1} P^{-1} + C_{-m} P^{-m}$$

или

$$C = \sum_{-n}^{n} C_i P^i$$

где

C_i – любые из P цифр алфавита,

нижние индексы определяют местоположение цифры в числе (разряд):

- положительные значения индексов – для целой части числа (n разрядов);
- отрицательные значения – для дробной части (m разрядов).

Уральский федеральный университет

Пример 1

__Десятичная СС, Р = 10__

Цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$9745{,}24 = 9 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + + 2 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$

__Двоичная СС. Р = 2__

Цифры: 0, 1.

$1011{,}101_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}$

Уральский федеральный университет

ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЧИСЕЛ

В вычислительных системах применяют две формы представления чисел

естественная форма - форма с фиксированной запятой (точкой)

нормальная форма - форма с плавающей запятой (точкой)

ЕСТЕСТВЕННАЯ ФОРМА

- Числа изображаются в виде последовательности цифр с постоянным для всех чисел положением запятой, отделяющей целую часть от дробной.

$$C = C_n C_{n-1} \dots C_1 C_0, C_{-1} \dots C_{-m}$$

- Запятая опускается, если дробная часть отсутствует.
- Позиции цифр в такой записи называются **разрядами**.
- Разряды нумеруются **влево** от запятой, начиная с нуля: 0-й,1-й,...(n-1)-й, n-й; и **вправо** от запятой: 1-й, 2-й,...(m-й).

Значение цифры C_i в позиционных СС определяется номером разряда:

$$C_i = c_i P^i$$

Величина P^i называется **весом** или значением i-го разряда.

В позиционных СС значения соседних разрядов отличаются в P раз: левый в P раз больше правого.

Например, в 10-ой СС:

9745

тысячи сотни десятки единицы

Максимальное целое число, которое может быть представлено в *n* разрядах:

$$C_{\max} = P^n - 1$$

Минимальное значащее (не равное 0) число, которое можно записать в m разрядах дробной части:

$$C_{\min} = P^{-m}$$

Имея в целой части числа n, а в дробной части m разрядов, можно записать всего P^{n+m} разных чисел.

Уральский федеральный университет

Пример 2

Двоичная система счисления.

$P = 2$.

$n = 10$, $m = 6$.

$0{,}015 < C < 1024$.

НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Каждое число изображается в виде двух групп цифр. Первая группа цифр называется **мантиссой**, а вторая **порядком.**

$$N = \pm M P^{\pm r}$$

где

M – мантисса числа ($|\mathrm{M}| < 1$);

r – порядок числа (r - целое число);

P – основание системы счисления.

Уральский федеральный университет

Например,

$+721,355 = +0,721355 \cdot 10^{3}$

$+0,00328 = +0,328 \cdot 10^{-2}$

$-10301,20260 = -0,103012026 \cdot 10^{5}$

Нормальная форма представления имеет огромный диапазон отображения чисел и является основной в современных ЭВМ.

Пример 3

Диапазон значащих чисел в системе счисления с основанием P при наличии m разрядов у мантиссы и s разрядов у порядка (без учета знаковых разрядов у порядка и мантиссы) будет:

$$P^{-m} P^{-(P^s - 1)} \le N \le (1 - P^{-m}) P^{(P^s - 1)}$$

Если $P = 2$, $m = 10$ (количество разрядов для мантиссы), $s = 6$ (количество разрядов для порядка), то диапазон чисел простирается примерно от 10^{-19} до 10^{19}.

ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Основание *P* = 2.

Алфавит включает две двоичные цифры: 0, 1.

Любое число есть сумма степеней числа 2.

$$C = C_n \cdot 2^n + C_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + C_1 \cdot 2^1 + C_0 \cdot 2^0 + C_{-1} \cdot 2^{-1} + \ldots + C_{-m} \cdot 2^{-m}$$

Например,

$$101011{,}11_2 = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} =$$

$$= 32 + 8 + 2 + 1 + 0{,}5 + 0{,}25 = 43{,}75_{10}.$$

Веса разрядов в двоичной системе счисления равны 1, 4, 8,16,... влево от запятой и 0,5; 0,25; 0,125; 0,625;... вправо от запятой.

ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Основание $P = 16$

Алфавит включает

цифры **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**

латинские буквы **A, B, C, D, E, F**

В 16-ой СС любое число есть сумма степеней числа 16.

Например,

$57{,}DA_{16} = 5 \cdot 16^{1} + 7 \cdot 16^{0} + 13 \cdot 16^{-1} + 10 \cdot 16^{-2} =$

$= 80 + 7 + 0{,}8125 + 0{,}0390625 =$

$= 88{,}203125_{10}$.

Уральский федеральный университет

10-я система	2-я система	16-я система
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

ДВОИЧНО-ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

В этой системе счисления все десятичные цифры отдельно кодируются четырьмя двоичными цифрами.

Например,

Десятичное число 9703 в двоично-десятичной системе выглядит так:

$$\underbrace{1001}_{9}\ \underbrace{0111}_{7}\ \underbrace{0000}_{0}\ \underbrace{0011}_{3}$$

ПРЕИМУЩЕСТВА ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

С точки зрения ЭВМ в следующем:

- требуются элементы с двумя устойчивыми состояниями;
- существенно упрощаются арифметические операции;
- оборудования требуется в 1,5 раза меньше;
- позволяет применить аппарат математической логики для анализа и синтеза схем.

Уральский федеральный университет

НЕДОСТАТКИ ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

- Большая длина записи чисел
- При вводе и выводе информации требуется перевод в десятичную систему счисления

Уральский федеральный университет

ДВОИЧНАЯ АРИФМЕТИКА

Сложение	Вычитание	Умножение	Деление
0 + 0 = 0	0 – 0 = 0	0 x 0 = 0	0 : 1 = 0
0 + 1 = 1	1 – 0 = 1	0 x 1 = 0	1 : 1 = 1
1 + 0 = 1	1 – 1 = 0	1 x 0 = 0	
1 + 1 = 10	10 – 1 = 1	1 x 1 = 1	

Правила арифметики

- сложение, умножение и вычитание начинают с младших разрядов, деление - со старших.
- при сложении единица переноса складывается с цифрами соседнего старшего разряда.
- при вычитании единица заёма старшего разряда дает две единицы в младшем соседнем разряде.

Уральский федеральный университет

Пример 4

a)

$$\begin{array}{r} 110111{,}01 \\ +\ \underline{10011{,}10} \\ 1001010{,}11 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 55{,}25 \\ +\underline{19{,}5} \\ 74{,}75 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{r} 11011{,}10 \\ -\underline{1101{,}01} \\ 1110{,}01 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 27{,}5 \\ -\underline{13{,}25} \\ 14{,}25 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{r} 1011{,}1 \\ \times\ \underline{101{,}01} \\ 10111 \\ 10111 \\ \underline{10111} \\ 111100{,}011 \end{array}$$

- сдвинутое на 2 разряда влево множимое
- сдвинутое на 4 разряда влево множимое

Уральский федеральный университет

ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ ИЗ ОДНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ДРУГУЮ

Правило 1. Для перевода шестнадцатеричного числа в двоичное надо каждую цифру заменить четырехразрядным двоичным числом. Незначащие нули отбросить.

Пример

$305{,}4_{16} = 0011\ 0000\ 0101,\ 0100_2 =$
$=110000101{,}01_2$

Правило 2. Для перевода числа из двоичной системы счисления в шестнадцатеричную надо число разбить на четверки влево и вправо от запятой. Крайние группы, если необходимо дополнить нулями. Затем каждую четверку двоичных цифр заменить соответствующей шестнадцатеричной цифрой.

<u>Пример</u>

$1010111{,}1101101_2 = 0101\ 0111{,}1101\ 1010_2 =$
$=57{,}DA_{16}$

Примечание
Это правило также используется для перевода двоичных чисел в восьмеричную СС и обратно ($2^3=8$)

Правило 3. Задано число *C*, представленное в системе счисления с основанием *S*:

$C = C_n\ C_{n\text{-}1}\ \ldots C_1\ C_0\ C_{-1}\ C_{\text{-m}}$.

Нужно перевести его в *h*-систему, выполняя действия в новой системе счисления.

Для этого нужно представить его в виде суммы степеней *S*:

$$C = C_n\ S^n + C_{n\text{-}1}\ S^{n\text{-}1} + \ldots + C_1\ S^1 + C_0\ S^0 + \\ + C_{-1}\ S^{-1} + \ldots + C_{-m}\ S^{-m},$$

где основание *S*, коэффициенты *C* и номера разрядов *i* выражены в новой *h*-системе.

Все действия надо выполнять в *h*-системе.

Этот способ удобен при $S < h$ и особенно для ручного перевода в десятичную систему счисления.

Пример 5

a) Перевести $1101{,}101_2$ в десятичную систему счисления:

$1101{,}101_2 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} =$

$= 13{,}625_{10}$.

b) Перевести $2E5{,}A_{16}$ в десятичную систему счисления:

$2E5{,}A_{16} = 2 \cdot 16^2 + 14 \cdot 16^1 + 5 \cdot 16^0 + 10 \cdot 16^{-1} = 741{,}625_{10}$.

c) Перевести 52_{10} в двоичную систему счисления:

$52_{10} = 101 \cdot 1010^1 + 10 \cdot 1010^0 = 110010 + 10 = 110100_2$.

Уральский федеральный университет

Правило 4. Для перевода целого числа из *S*-системы в *h*-систему счисления в арифметике *S*-системы нужно последовательно делить это число и получающиеся частные на *h* до тех пор, пока частное не станет меньше *h*.

Старшей цифрой в новой записи числа будет последнее частное, а следующие за ней цифры дают остатки, вписанные в последовательность, обратную их получению.

Все вычисления производятся в старой *S*-системе. (При $S < h$ прежде, чем записать число, надо получившиеся остатки переписать в цифры *h*-системы).

Такой метод часто называют «деление уголком»

Пример 6

1. Перевести число 70 в двоичную систему счисления

```
 70  |2
  0   35 |2
    1    17 |2
           1   8 |2
                0   4 |2
                     0   2 |2
                          0   1
```

$70_{10} = \mathbf{1000110_2}$

Задание. Выполните проверку, используя правило 3.

ПРАВИЛО ПЕРЕВОДА ДРОБНЫХ ЧИСЕЛ

Важно! Целая и дробная части числа переводятся отдельно!

Правило 5. При переводе правильной дроби из одной системы счисления в другую систему счисления дробь следует умножать на основание системы счисления, в которую выполняется перевод. Полученная после первого умножения целая часть является старшим разрядом результирующего числа. Умножение вести до тех пор, пока произведение станет равным нулю или будет получено требуемое число знаков после разделительной точки.

Уральский федеральный университет

Пример 7

a) Перевести дробное число 0.125 из десятичной СС в двоичную.

$0.125 * 2 = \mathbf{0}.25 * 2 = \mathbf{0}.5 * 2 = \mathbf{1}.0$

$0.125_{10} \rightarrow 0.001_{2}$

Проверка:

$0.001 = 0 * 2^{-1} + 0 * 2^{-2} + 1 * 2^{-3} = 0.125$

b) Перевести дробное число 0.243 из десятичной СС в двоичную.

$0.243 * 2 = \mathbf{0}.486 * 2 = \mathbf{0}.972 * 2 = \mathbf{1}.944 * 2 = \mathbf{1}.888 * 2 =$
$= \mathbf{1}.776 * 2 = \ldots$

$0.243_{10} \rightarrow 0.00111\ldots_{2}$

Уральский федеральный университет

ПРЯМОЙ, ОБРАТНЫЙ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ КОДЫ ЧИСЕЛ

В ЭВМ используется прямой, обратный, и дополнительный коды чисел.

Знак «+» кодируется нулем (0),

знак «–» кодируется единицей (1),

которые записываются в **дополнительном старшем разряде** – **знаковом разряде**.

При помощи этих кодов:

- автоматически определяется знак результата;
- операция вычитания сводится к арифметическому сложению кодов чисел;
- упрощается операционная часть ЭВМ.

ПРЯМОЙ КОД ЧИСЛА

Прямой код числа $C = \underline{+}\, C_n\, C_{n-1}\, C_{n-2} \ldots C_1\, C_0$

$$C_{пр} = \begin{cases} |C| & при \quad C > 0 \\ P^{n+1} + |C| & при \quad C < 0 \end{cases}$$

Для **отрицательных двоичных чисел** имеем:

$C_{пр} = 2^{n+1} + |- C_n\, C_{n-1} \ldots C_0| =$ **1.**$C_n\, C_{n-1} \ldots C_0$,

где точкой отделен знаковый разряд.

Таким образом, для получения прямого кода числа надо в знаковый разряд записать **0** для положительных и **1** для отрицательных чисел.

Например,

$C = +10110$ $C = -10110$

$C_{пр}= 0.10110$ $C_{пр}= 1.10110.$

ОБРАТНЫЙ КОД ЧИСЛА

Обратный код числа $C = \underline{+}\ C_n\ C_{n\text{-}1}\ C_{n\text{-}2}\ ...C_1\ C_0$

$$C_{обр} = \begin{cases} |C| & при \quad C > 0 \\ P^{n+2} - P^0 - |C| & при \quad C < 0 \end{cases}$$

Для **отрицательных двоичных чисел** имеем:

$$C_{обр} = 2^{n+2} - 1 - |C_n C_{n-1} ... C_0| =$$
$$= 11...1 - 0.C_n C_{n-1} ... C_0 = 1.\overline{C_n}\,\overline{C_{n-1}} ... \overline{C_0}$$

где $\overline{C_i} = 1$ при $C_i = 0$ и $\overline{C_i} = 0$ при $C_i = 1$.

Уральский федеральный университет

Таким образом, для представления двоичных чисел в обратном коде надо в знаковый разряд записать 0 или 1, в случае **отрицательных** чисел для получения обратного кода надо значение разрядов инвертировать: вместо 0 записать 1, вместо 1 записать 0.

Например,

$C = +10110$ $C = -10110$

$C_{обр} = 0.10110$ $C_{обр} = 1.01001$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ КОД ЧИСЛА

Дополнительный код числа $C = \underline{+}\, C_n\, C_{n\text{-}1}\, C_{n\text{-}2} \ldots C_1\, C_0$

$$C_{доп} = \begin{cases} |C| & при \quad C > 0 \\ P^{n+2} - |C| & при \quad C < 0 \end{cases}$$

Для **отрицательного двоичного числа** в дополнительном коде в знаковый разряд надо записать 1, а цифровую часть заменить дополнением числа до 2^{n+2} .

Таким образом, дополнительный код отрицательных чисел получается из обратного прибавлением единицы в младший разряд.

$$C_{доп} = C_{обр} + 1 \quad \text{при} \quad C < 0 .$$

Например,

C = +10110 C = -10110

$C_{доп}$= 0.10110 $C_{доп}$= $C_{обр}$+1 =

= 1.01001+1 = 1.01010

Уральский федеральный университет

Пример 8

Найти дополнительный код числа -65.

1) Найдем двоичный код

$$65_{10} = 1000001_2$$

2) Так как число отрицательное, то

1.1000001 – прямой код

1.0111110 – обратный код

$+ \qquad 1$

1.0111111 – дополнительный код

Ответ: 1.0111111

Уральский федеральный университет

Пример 9

Найти дополнительный код числа -4.

1) Найдем двоичный код

$$4_{10} = 100_2$$

2) Так как число отрицательное, то

1.0000100 – прямой код

1.1111011 – обратный код

$+ \qquad\qquad 1$

1.1111100 – дополнительный код

Ответ: 1.1111100

Пример 10

Найти целое число в десятичной СС, если дан его дополнительный код.

1) Найдем прямой код

1.000110100 – дополнительный код

$-\qquad\qquad\qquad 1$

1.000110011 – обратный код

1.111001100 – прямой код

2) Найдем десятичный код $111001100_2 = 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^3 + 2^2 = 460$

3) Так как в знаковом разряде имеем 1, значит число отрицательное.

Ответ: -460.

Уральский федеральный университет

СЛОЖЕНИЕ ЧИСЕЛ В ОБРАТНОМ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОМ КОДЕ

- При вычитании чисел в прямом коде возникают затруднения – нужно сначала определить больший модуль, от него отнять меньший и результату присвоить знак большего модуля.
- Применение обратного и дополнительного кода чисел позволяет заменить операцию вычитания на операцию сложения и сделать операции сложения и вычитания одинаковыми для знаковых и беззнаковых чисел, что упрощает архитектуру ЭВМ.

ПРАВИЛА СЛОЖЕНИЯ ЧИСЕЛ

Правило 1. При сложении дополнительных кодов чисел знаковые разряды складываются аналогично остальным, перенос из знакового разряда теряется, результат получается в дополнительном коде.

Правило 2. При сложении чисел в обратном коде знаковые разряды складываются аналогично остальным, перенос из знакового разряда прибавляется к младшему разряду результата (так называемый циклический перенос), результат получается в обратном коде.

Пример 11

a) $X = 0.0101$ $Y = -0.0011$

$X_{доп} = 0.0101$ $Y_{доп} = 1.1101$

$X_{доп} + Y_{доп} = 0,0101$

$+\underline{1,1101}$

$\cancel{1}\mathbf{0,0010}$ (единица переноса теряется)

b) $A = +0,10111$ $B = -0,01010$

$A_{обр} = 0,10111$ $B_{обр} = 1,10101$

$A_{обр} + B_{обр} = 0,10111$

$+\underline{1,10101}$

$\cancel{1}0,01100$

$\underline{1}$ (циклический перенос)

$\mathbf{0,01101}$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Какое максимальное целое число можно закодировать в
   a) 4 двоичных разрядах
   b) 6 двоичных разрядах
   c) 8 двоичных разрядах
   d) 12 двоичных разрядах
   e) 16 двоичных разрядах

2. Переведите данное число из десятичной системы счисления в двоично-десятичную.

a) $585_{(10)}$

b) $673_{(10)}$

c) $626_{(10)}$

3. Переведите данное число из двоично-десятичной системы счисления в десятичную.

a) $010101010101_{(2\text{-}10)}$

b) $10011000_{(2\text{-}10)}$

c) $010000010110_{(2\text{-}10)}$

4. Переведите данное десятичное число в восьмеричную и шестнадцатеричную систему счисления

a) 138

b) 745

c) 624

Выполните проверку.

5. Запишите прямой и дополнительный код числа, интерпретируя его как восьмибитовое целое со знаком.

a) $115_{(10)}$
b) $–34_{(10)}$
c) $–5_{(10)}$
d) $–70_{(10)}$

6. Запишите в десятичной системе счисления целое число, если дан его дополнительный код.

a) 0011010111010110

b) 1000000110101110

7. Выполните сложение чисел в обратном коде

a) 47 и -7

b) -6 и 25

8. Выполните сложение чисел в дополнительном коде

a) 38 и -5

b) -3 и 50

Уральский федеральный университет

Спасибо за внимание!