Решение системы линейных уравнений

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Сокращенно это можно записать как

$$Ax = b$$

$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

Или в сокращенной покомпонентной записи:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{i,j} \cdot x_j = b_i \,,\; i = \overline{1,m}$$

Упорядоченный набор значений {x_1 ,$x_{2,..}$,x_n } называется решением системы, если при подстановке в уравнения все уравнения превращаются в тождества

СЛАУ называется совместной, если она имеет, хотя бы одно решение. В противном случае система называется несовместной.
Система называется определённой, если она совместна и имеет единственное решение.
В противном случае (т.е. если система совместна и имеет более одного решения) система называется неопределённой.

Система называется однородной, если все правые части уравнений, входящих в нее, равны нулю.

Система называется квадратной, если количество уравнений равно количеству неизвестных.

Матрица *A* называется вырожденной, если ее определитель равен нулю.

Если матрица *A* вырождена, то система линейных уравнений может иметь решение, но не для

Однородная квадратная система уравнений имеет единственное нулевое решение если она не вырождена.
В противном случае она может иметь не нулевые решения.

Пример: (Проверьте)

A =				x =	A*x =
1	3	3	2	-0.84522	-1.1102e-16
2	6	9	5	0.39543	-2.2204e-16
-1	-3	3	0	0.11369	3.3307e-16
-2	-6	6	0	-0.34106	6.6613e-16

Таких ненулевых решений – бесконечно.
Для того, чтобы решить однородную систему линейных уравнений нужно найти пространство нулей матрицы.
Для невырожденной матрицы это пространство (точка) состоит из одного (нулевого) элемента, а для вырожденной имеет ранг, равный n-rank(A).

null *(A)*

null *(A, tol)*

Возвращает ортогональный базис нулевого пространства матрицы *A*. Размерность нулевого пространства определена как количество сингулярных значений матрицы *A* больших, чем *tol*. Если аргумент *tol* пропускается, он вычислен как:

max (size (*A*)) * max (svd (*A*)) * eps

Нуль-пространство определено для любой матрицы MxN

```
>> A=[1 3 3 2;2 6 9 5;-1 -3 3 0]
A =
   1   3   3   2
   2   6   9   5
  -1  -3   3   0
>> w=null(A)
w=
  -0.771587  -0.559384
   0.410788  -0.074599
   0.153593  -0.261060
  -0.460778   0.783181
```

```
>> rank(A)
 ans =  2
```

```
A*w
ans =

   1.1102e-16   6.6613e-16
   1.7764e-15   1.7764e-15
   3.0531e-15   1.1102e-16
```

>> A2=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]

A2 =

```
   1   2   3
   4   5   6
   7   8   9
```

>> rank(A2)

ans = 2

>> null(A2)

ans =

```
  -0.40825
   0.81650
  -0.40825
```

Теорема Кронекера – Капелли

Теоре́ма Кро́некера — Капе́лли — критерий совместности системы линейных алгебраических уравнений:

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы равен рангу её расширенной матрицы, причём система имеет единственное решение, если ранг равен числу неизвестных и бесконечное множество решений, если ранг меньше числа неизвестных.

```
A3 =
   1   3   3   2   1
   2   6   9   5  -1
  -1  -3   3   0  -7

>> rank(A3)
ans =  2
```

```
A3 =
   1   3   3   2   1
   2   6   9   5   1
  -1  -3   3   0   1

>> rank(A3)
ans =  3
```

```
A =
   1   3   3   2
   2   6   9   5
  -1  -3   3   0

>> rank(A)
ans =  2
```

A =

1	3	3	2
2	6	9	5
-1	-3	3	0

B =

1
-1
-7

>> X=A\B

X =

0.394495	+v(-0.771587)+w(-0.559384)
1.183486	+v(0.410788)+w(-0.074599)
-1.018349	+v(0.153593)+w(-0.261060)
0.055046	+v(-0.460778)+w(0.783181)

```
>> B=A*X
B =
```

В – восстановлен!

```
  1.00000
 -1.00000
 -7.00000
```

```
A =

   1   3   3   2
   2   6   9   5
  -1  -3   3   0
```

```
B =

   1
   1
   1
```

```
>> X=A\B
X=
  -0.029969
  -0.089908
   0.188991
   0.033028
```

```
>> A*X
ans =
```

Не равно B!

```
   0.33333
   1.26667
   0.86667
```

Обращение прямоугольных матриц. Псевдообратная матрица

Если ***A***— квадратная и неособенная матрица, то для нее существует обратная матрица $\boldsymbol{A}^{-1}$. Если же ***A***— не квадратная, а прямоугольная ***m x n***-матрица или квадратная, но особенная, то матрица ***A*** не имеет обратной и символ $\boldsymbol{A}^{-1}$ не имеет смысла. Однако, для произвольной прямоугольной матрицы ***A*** существует «псевдообратная» матрица $\boldsymbol{A}^{+}$, которая обладает некоторыми свойствами обратной матрицы и имеет важные применения при решении системы линейных

В случае, когда ***A***— квадратная неособенная матрица, псевдообратная матрица A^{+} совпадает с обратной A^{-1}. Свойства псевдообратной матрицы:

1. $A\,A^{+}A=A$
2. $(A^{+})^{+}=A$
3. $(A\,A^{+})^{T}=A\,A^{+}$
4. $(A^{+}A)^{T}=A^{+}A$
5. $(A\,A^{+})^{2}=A\,A^{+}$
6. $(A^{+}A)^{2}=A^{+}A$

Если *Ax=b* несовместная система линейных алгебраических уравнений, то решая его с помощью псевдообратной матрицы получим приближенное решение минимальной нормы, наилучшее по методу наименьших квадратов.

$$\min_x sum(|y - Ax|^2), \ \|x\| \to \min$$

Для вычисления псевдообратной матрицы используется функция:

pinv *(x)*

pinv *(x, tol)*

Сингулярные значения матрицы *A* меньшие, чем *tol* *игнорируются*. Если аргумент *tol* пропускается, он вычислен как:

max ([rows(*x*), columns(*x*)]) * norm (*x*) * eps

```
>> A2=[1 2 3;4 5 6;7 8 9]
A2 =                        >> rank(A2)
   1   2   3                   ans =  2
   4   5   6
   7   8   9

>> Ap=pinv(A2)
Ap =                  >> rank(Ap)  ans = 2
  -6.3889e-01  -1.6667e-01   3.0556e-01
  -5.5556e-02   3.8164e-17   5.5556e-02
   5.2778e-01   1.6667e-01  -1.9444e-01
```

```
>> AR=[A2 [1;1;1]]
AR =
   1   2   3   1
   4   5   6   1
   7   8   9   1
>> rank(AR)
ans =  2
```

```
>> pinv(A2)*[1;1;1]
ans =
  -5.0000e-01
   6.9389e-18
   5.0000e-01
```

```
>> A2*ans
ans =

   1.00000
   1.00000
   1.00000
```

```
>> A2\[1;1;1]
ans =
  -5.0000e-01
   1.1102e-16
   5.0000e-01
```

```
>> AR=[A2 [1;1;0]]
AR =
  1   2   3   1
  4   5   6   1
  7   8   9   0
>> rank(AR)
ans =  3
```

```
>> A2*ans
ans =

   1.16667
   0.66667
   0.16667
```

```
>> pinv(A2)*[1;1;0]
ans =

 -0.805556
 -0.055556
  0.694444
```

```
>> A2\[1;1;0]
ans =

 -0.805556
 -0.055556
  0.694444
```

Таким образом, для численного решения системы линейных уравнений можно применять оператор «\», то есть систему *Ax=b*, можно решить методом: *X=A\b*, как для квадратной (вырожденной или невырожденной), так и для прямоугольной матрицы.

Собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы

Задача на собственные значения для квадратной матрицы имеет вид:

$$A\psi = \lambda\psi$$

Или в покомпонентной записи:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\psi_{j,k} = \lambda_k \psi_{i,k}$$

Совокупность всех собственных векторов, относящихся к одному и тому же собственному значению, вместе с нулевым вектором, образует линейное подпространство.

Если вектора X_1 ,X_2 ,…,X_n являются собственными и относятся к разным собственным значениям, то векторы X_1 ,$X_{2,}$ …,X_n – линейно независимы.

Матрица *A* приводима к диагональному виду тогда и только тогда, когда существует базис в n-мерном пространстве, состоящий из собственных векторов

$A\psi = \psi\Lambda$ **Матричное представление уравнения на собственные значения.**

Λ – диагональная матрица, состоящая из собственных значений;

Ψ – матрица собственных векторов.

$$A\psi = \psi\Lambda \rightarrow A = \psi\Lambda\psi^{-1}$$

Факторизация матрицы

Матрица *A* называется неотрицательно определенной, если: $X^H A\, X \geq 0$ **Для любого вектора *X***

Матрица *A* называется симметрической, если: ***A*^{н} *=A* *(н – символ эрмитова транспонирования, т.е. транспонирования и комплексного сопряжения).***

Для симметрической и неотрицательно определенной матрицы собственные вектора –

[V, lambda] =* eig *(A) – вычисление матрицы собственных векторов (V) и диагональной матрицы собственных значений (lambda) от матрицы A

A2 =

1	**2**	**3**
4	**5**	**6**
7	**8**	**9**

```
>> [V,D]=eig(A2)
V =
  -0.231971  -0.785830   0.408248
  -0.525322  -0.086751  -0.816497
  -0.818673   0.612328   0.408248

>> diag(D)'
ans =
  1.6117e+01  -1.1168e+00  -1.3037e-15
```

```
>> V'*V
ans =
   1.0000e+00  -2.7343e-01   5.5511e-17
  -2.7343e-01   1.0000e+00  -9.9920e-16
   5.5511e-17  -9.9920e-16   1.0000e+00
```

Матрица *A2* – не симметрическая и не является неотрицательно определенной, поэтому собственные вектора не ортонормированные

Теплицева матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & a & b & c \\ f & e & a & b \\ g & f & e & a \end{pmatrix}$$

На всех диагоналях одинаковые значения

toeplitz *(c)*
toeplitz *(c, r)*
Возвращает матрицу Теплица созданную из вектора *c* (в первом случае).
Во втором случае верхняя треугольная из вектора *c*, а нижняя треугольная из вектора *r*.

Создадим матрицу $K_{i,j} = \rho^{(i-j)^2},\ i, j \in \overline{0, n-1}$

```
>> r=0.9;
>> n=5;a=(0:n-1).^2;
>> c=r.^a;
>> K=toeplitz (c)
K =
   1.00000   0.90000   0.65610   0.38742   0.18530
   0.90000   1.00000   0.90000   0.65610   0.38742
   0.65610   0.90000   1.00000   0.90000   0.65610
   0.38742   0.65610   0.90000   1.00000   0.90000
   0.18530   0.38742   0.65610   0.90000   1.00000
```

Найдем собственные вектора и собственные значения этой матрицы

```
>> [V,D]=eig(K);
V =
  -1.6166e-01   3.8166e-01   5.7288e-01  -5.9526e-01   3.8168e-01
   4.9416e-01  -5.9526e-01  -1.7637e-01  -3.8166e-01   4.7402e-01
  -6.7775e-01   7.8822e-16  -5.3048e-01   1.9868e-17   5.0916e-01
   4.9416e-01   5.9526e-01  -1.7637e-01   3.8166e-01   4.7402e-01
  -1.6166e-01  -3.8166e-01   5.7288e-01   5.9526e-01   3.8168e-01

>> diag(D)'
ans =

   0.00057261   0.01525073   0.18139281   1.14334725   3.65943661
```

```
>> V'*V
ans =

  1.0000e+00   1.1102e-16   6.9389e-17  -4.1633e-17  -9.0206e-17
  1.1102e-16   1.0000e+00  -1.6653e-16   5.5511e-17   5.5511e-17
  6.9389e-17  -1.6653e-16   1.0000e+00  -1.1102e-16   5.5511e-17
 -4.1633e-17   5.5511e-17  -1.1102e-16   1.0000e+00  -2.2204e-16
 -5.5511e-17   5.5511e-17   2.7756e-17  -2.2204e-16   1.0000e+00
```

Так как теплицева матрица симметрическая и неотрицательно определенная, то собственные векторы ортогональны.

Большую роль в линейной алгебре играют сингулярные числа матрицы. Собственные значения введены для квадратных матриц, а для прямоугольных матриц используется также понятие сингулярные числа. Сингулярные числа матрицы это корень квадратный из модуля собственных чисел матрицы A^T*A.

s = svd *(A)*
[U, S, V] = svd *(A)*
Эта функция вычисляет факторизацию матрицы A(mxn) в виде: **A = U*S*V‘,**
Где U – матрица mxm, S – диагональная матрица, V – матрица nxn.
Как выглядит факторизация неотрицательно определенной симметричной матрицы?
В чем отличие от приведенной

Выполнить факторизацию матриц:
A=[1 2 3;4 5 6;7 8 9] B=[1 2 3;2 3 4 ;3 4 5]
Найти ранг этих матриц, обратную и псевдообратную матрицы.
Проверить, являются ли ортонормированными матрицы факторизации.
Найти нуль-пространство матриц.

```
A =
   1   3   3   2
   2   6   9   5
  -1  -3   3   0
>> [U S V]=svd(A)
U =
  -0.363979  -0.184895   0.912871
  -0.930500   0.028930  -0.365148
  -0.041105   0.982332   0.182574
S =
Diagonal Matrix
   1.2985e+01            0            0            0
            0   4.4039e+00            0            0
            0            0   4.7430e-16            0
```

V =

```
  -0.168187  -0.251905  -0.771587  -0.559384
  -0.504560  -0.755716   0.410788  -0.074599
  -0.738535   0.602348   0.153593  -0.261060
  -0.414365  -0.051123  -0.460778   0.783181
```

>> U'*U=

```
   1.0000e+00  -2.7756e-17  -1.7347e-18
  -2.7756e-17   1.0000e+00  -2.7756e-17
  -1.7347e-18  -2.7756e-17   1.0000e+00
```

>> V*V‘ =

```
   1.00000   0.00000   0.00000  -0.00000
   0.00000   1.00000  -0.00000   0.00000
   0.00000  -0.00000   1.00000   0.00000
  -0.00000   0.00000   0.00000   1.00000
```

Задания и результаты выполнения выслать мне в теле письма.