9.7. СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

1

Найти область определения функции.

2

Исследовать функцию на четность и периодичность.

3

Найти вертикальные асимптоты.

4

Исследовать поведение функции на бесконечности и найти горизонтальные или наклонные асимптоты.

5

Найти экстремумы и интервалы монотонности функции.

6

Найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба.

7

Найти точки пересечения графика с осями координат и некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Пример.

Исследовать функцию и построить ее график

$$y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

Решение:

1 Находим область определения функции.

Функция определена при всех значениях *x*, кроме $x = \pm 1$

Следовательно, область определения функции будет объединение интервалов:

$$(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$$

2 Исследуем функцию на четность и периодичность:

$$f(-x)=\frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2}=\frac{1+x^2}{1-x^2}=f(x)$$

Функция является четной, следовательно ее график будет симметричен относительно оси ординат.

Функция не периодична.

3 Находим вертикальные асимптоты.

Вертикальные асимптоты могут быть в точках разрыва функции х =1 и х = -1.

Сначала рассмотрим точку х =1.

Если хотя бы один из пределов при $x \to 1$

слева и справа равен бесконечности, то прямая х =1 является вертикальной асимптотой.

При $x \to 1$ слева $\lim\limits_{x \to 1-0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty$

При $x \to 1$ справа $\lim\limits_{x \to 1+0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty$

Следовательно, прямая x=1 является вертикальной асимптотой.

Аналогично можно проанализировать x=-1, но так как график функции симметричен относительно оси ординат, то прямая x=-1 также будет вертикальной асимптотой.

4 Исследуем поведение функции на бесконечности и найдем горизонтальные и наклонные асимптоты.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2}=-1 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{1+x^2}{1-x^2}=-1$$

Следовательно, y=-1 - горизонтальная асимптота.

Т.к.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x(1-x^2)}=\infty$$

то наклонных асимптот нет.

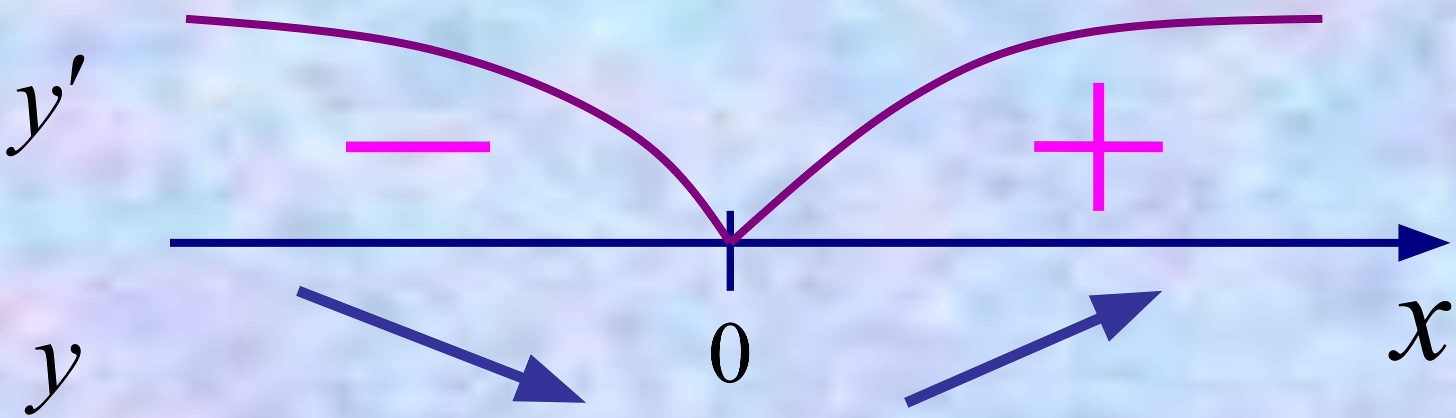
5 **Найдем интервалы монотонности и экстремумы функции.**

Для этого вычислим первую производную:

$$y'=\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)'=\frac{2x(1-x^2)-(-2x)(1+x^2)}{(1-x^2)^2}=$$

$$=\frac{2x-2x^3+2x+2x^3}{(1-x^2)^2}=\frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

Исследуем знак производной при переходе через эту точку:



минимум

$$f_{\min}(0)=1$$

Интервалы монотонности функции:

Функция убывает на: $(-\infty;-1)\cup(-1;0)$

Функция возрастает на: $(0;1)\cup(1;+\infty)$

6 **Найдем интервалы выпуклости и точки перегиба.**

Для этого вычислим вторую производную:

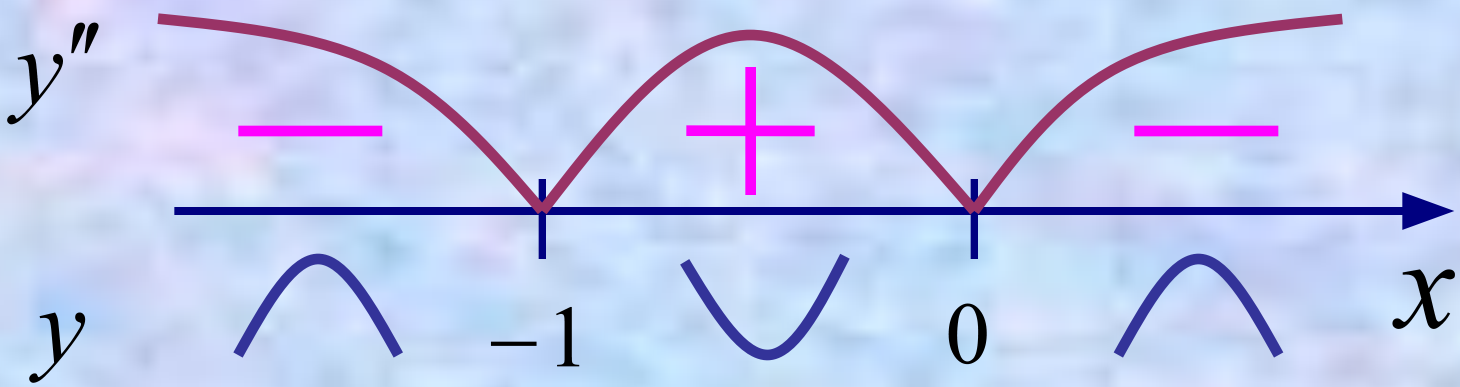
$$y''=\left(\frac{4x}{(1-x^2)^2}\right)'=\frac{(4x)'\cdot(1-x^2)^2-4x\cdot\left((1-x^2)^2\right)'}{(1-x^2)^4}=$$

$$=\frac{4\cdot(1-x^2)^2-4x\cdot2(1-x^2)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^4}=\frac{4-4x^2+16x^2}{(1-x^2)^3}=$$

$$=\frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$$

Точек, в которых вторая производная обращается в ноль, нет. Поэтому точек перегиба у графика нет.

Числитель всегда положителен, поэтому знак второй производной будет определяться знаменателем.



Интервалы выпуклости функции:

Функция выпукла вниз на: $(-1\,;1)$

Функция выпукла вверх на: $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

7 Найдем точки пересечения графика функции с осями координат:

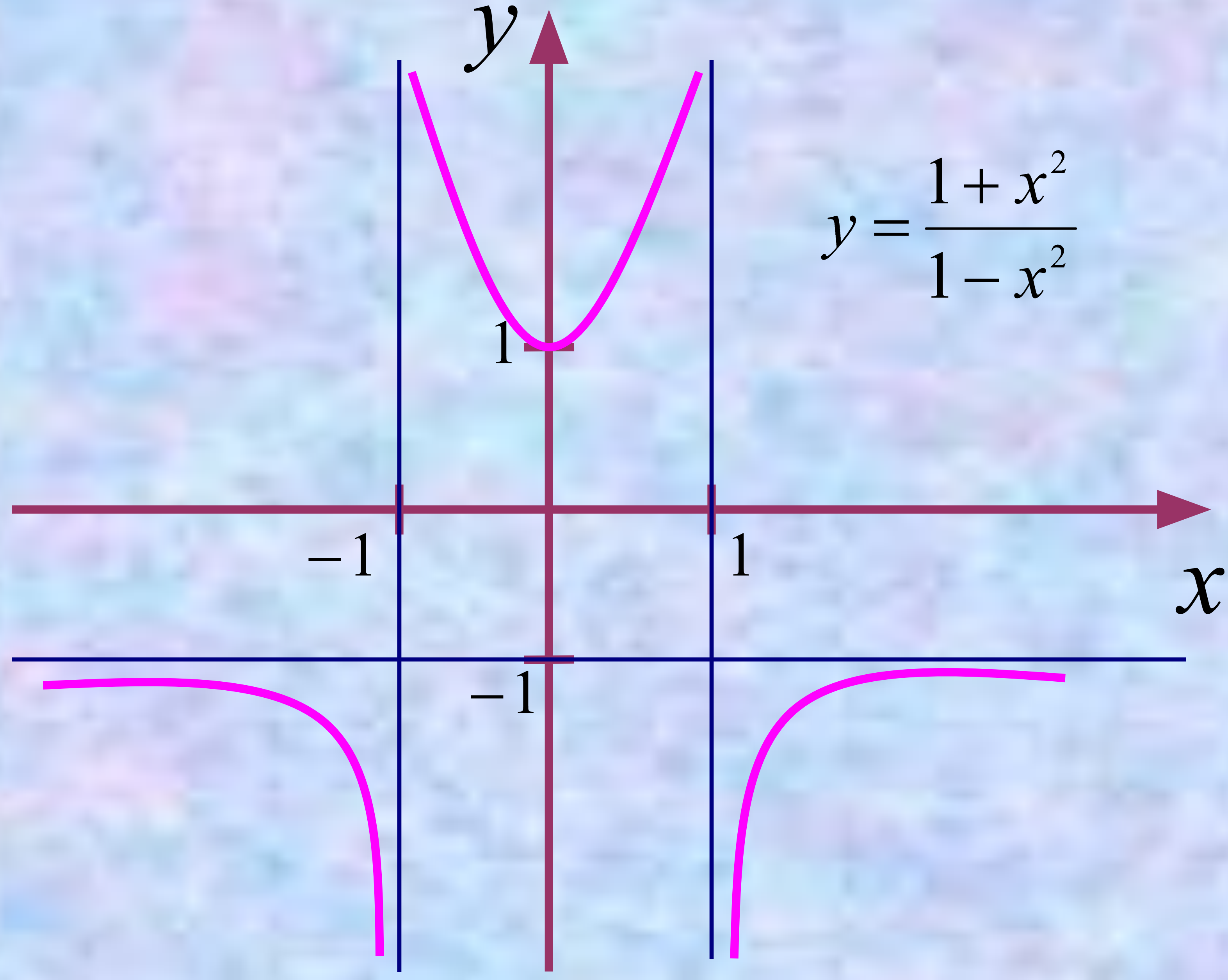
При $x=0$

$$y=\frac{1+0}{1-0}=1$$

(0,1) - точка пересечения с осью ординат.

Точек пересечения с осью абсцисс нет.

8 Строим график функции:


y
$y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$
1
-1
1
x
-1