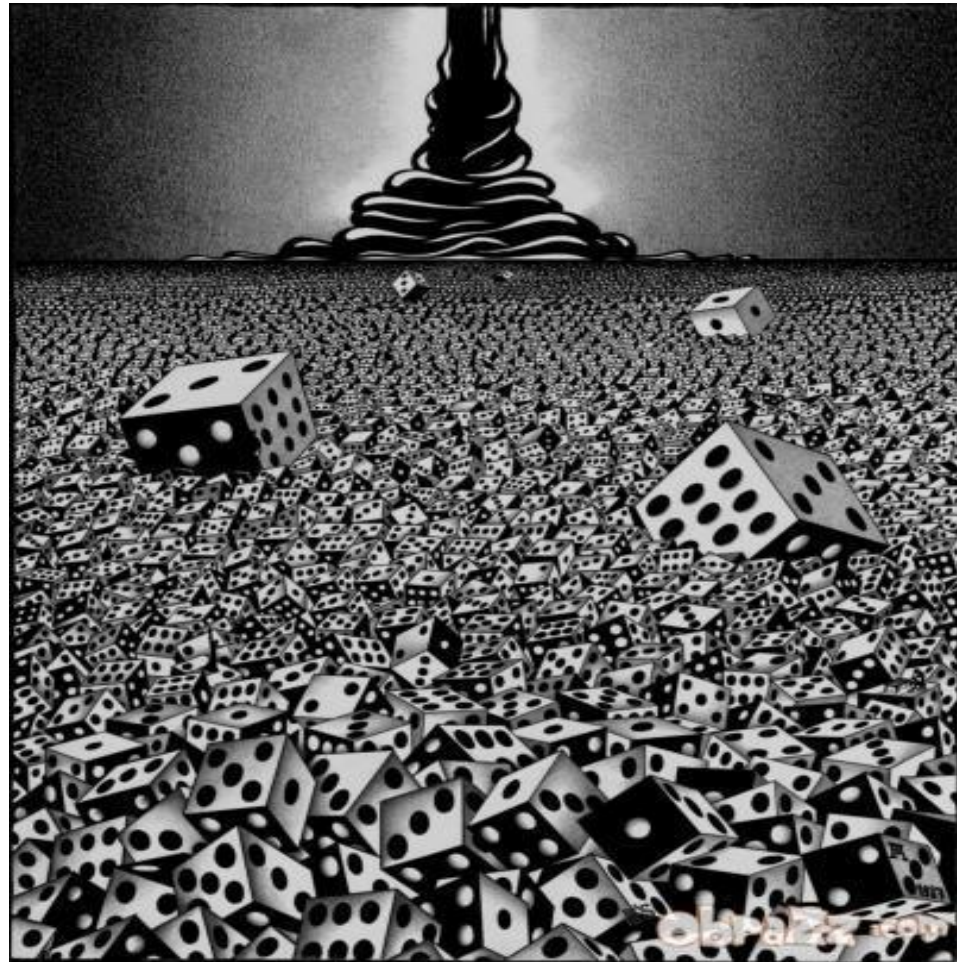


Вероятность и геометрия



Классическая вероятностная схема

- Для нахождения вероятности случайного события A при проведении некоторого числа опытов следует:
 1. Найти число N всех возможных исходов данного испытания;
 2. Найти количество $N(A)$ тех исходов опыта, в которых наступает событие A ;
 3. Найти частное $N(A)/N$; оно и будет равно вероятности события A .

Классическое определение вероятности

- Вероятностью события A при проведении некоторого испытания называют отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие A , к общему числу всех (равновозможных между собой) исходов этого испытания.

Общее правило, для нахождения геометрических вероятностей

- Если площадь $S(A)$ фигуры A разделить на площадь $S(X)$ фигуры X , которая целиком содержит фигуру A , то получится вероятность того, что случайно выбранная точка фигуры X окажется в фигуре A :
- $P=S(A)/S(X)$

Пример 1

- Отрезок единичной длины случайным образом разделяют на три отрезка. Какова вероятность того, что из них можно сложить треугольник?

Построение модели

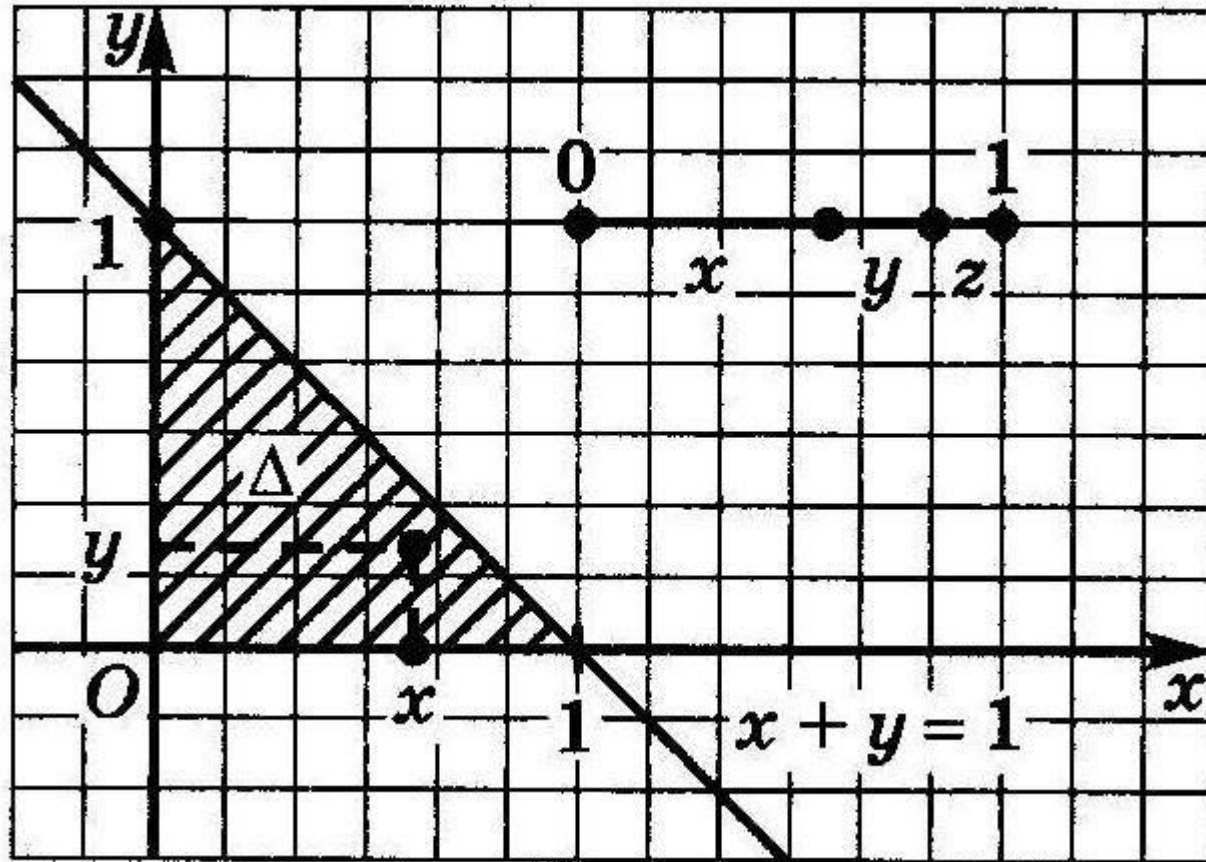
- Пронумеруем отрезки слева направо и обозначим их длины за x , y и z . Так как $x+y+z=1$, то $z=1-x-y>0$. Значит, $x>0$, $y>0$ и при этом $x+y<1$. В координатной плоскости изобразим множество решений системы трех неравенств:

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$x + y < 1$$

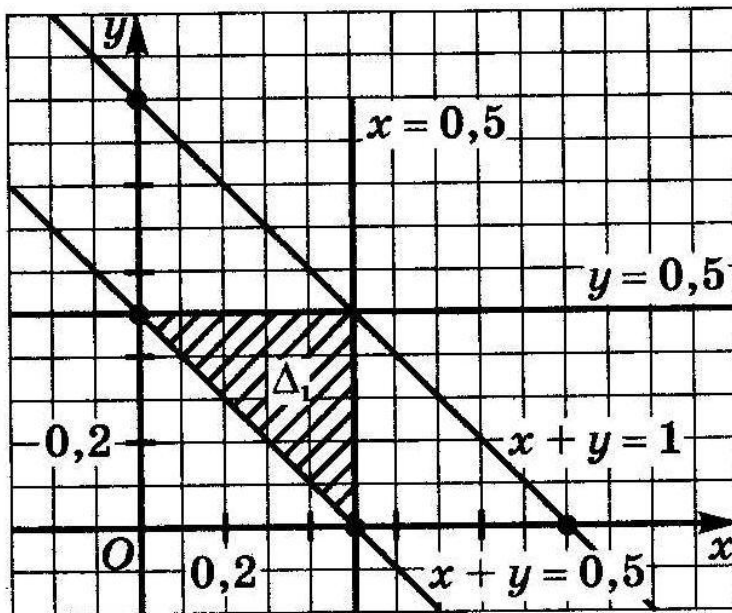
- Получим треугольник с вершинами $(0;0)$ $(1;0)$ $(0;1)$ без учета его сторон. Каждому способу деления заданного отрезка на три части x,y,z поставим в соответствие точку (x,y) из треугольника. Выбрав точку (x,y) мы однозначно зададим разбиение заданного отрезка единичной длины на три отрезка $[0;x]$ $[x;x+y]$ $[x+y;1]$.



Работа с моделью

$$\begin{array}{l} x+y > z \quad x+y > 1-x-y \quad x+y > 0.5 \\ x+z > y \quad x+1-x-y > y \quad y < 0.5 \\ y+z > x \quad y+1-x-y > x \quad x < 0.5 \end{array}$$

- Получаем треугольник, подобный первому с коэффициентом подобия 0,5
- $S1/S2=1/4$



- Вероятность того, что точка окажется в меньшем треугольнике $P(A)=0.25$

Пример 2

- Случайным образом нарисовали треугольник. Какова вероятность того, что он является остроугольным?

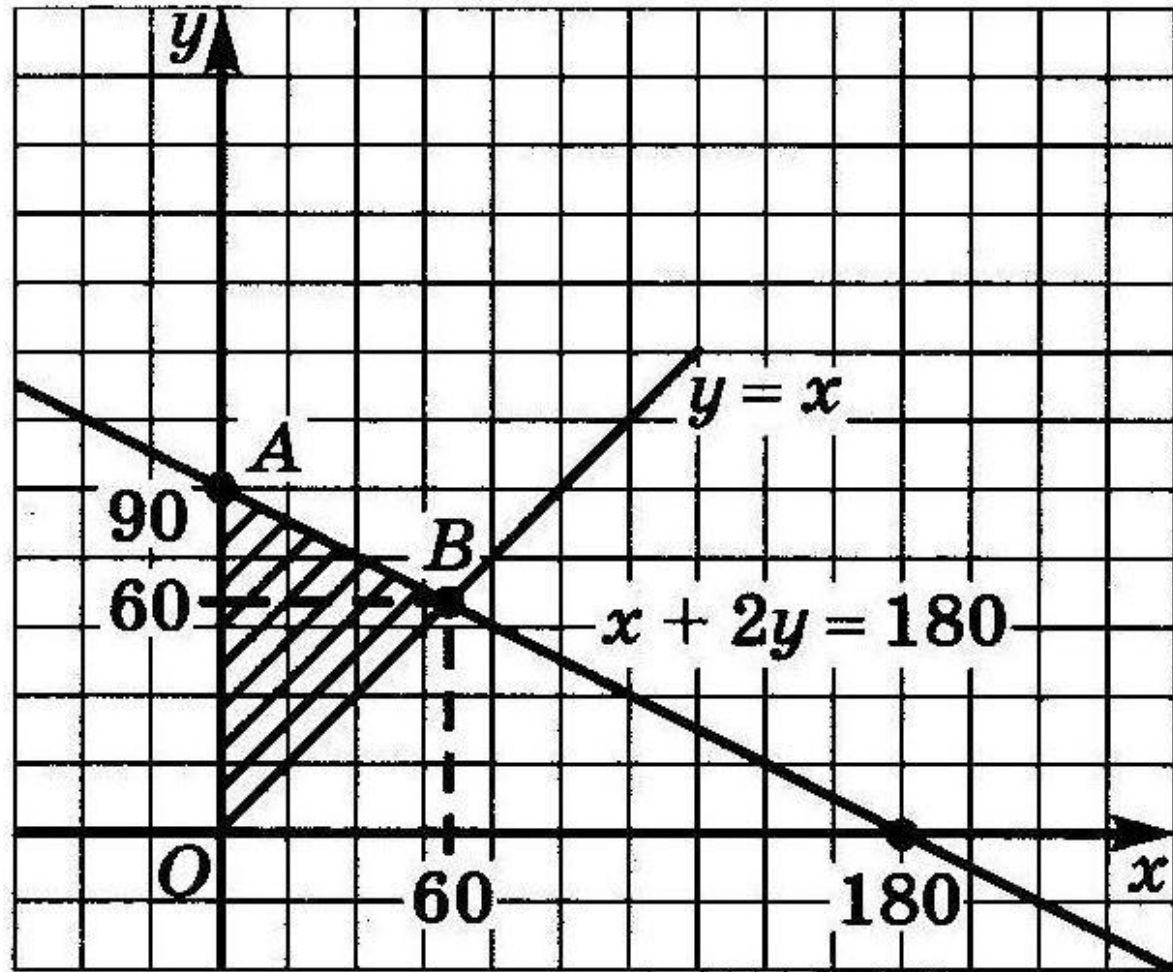
Построение модели

- Переформулируем задачу:
- Число 180 случайным образом представили в виде суммы трех положительных слагаемых. Какова вероятность того, что все слагаемые меньше 90?

- Пусть $0 < x < y$ $x + y + z = 180$ $z = 180 - x - y$

$$\begin{array}{l} 0 < x \qquad 0 < x \\ x < y \qquad x < y \\ y < 180 - x - y \qquad x + 2y < 180 \end{array}$$

- Получим треугольник с вершинами $O(0;0)$ $A(0;90)$ $B(60;60)$. Каждая точка однозначно «отвечает» за треугольник с углами x , y , $180 - x - y$.

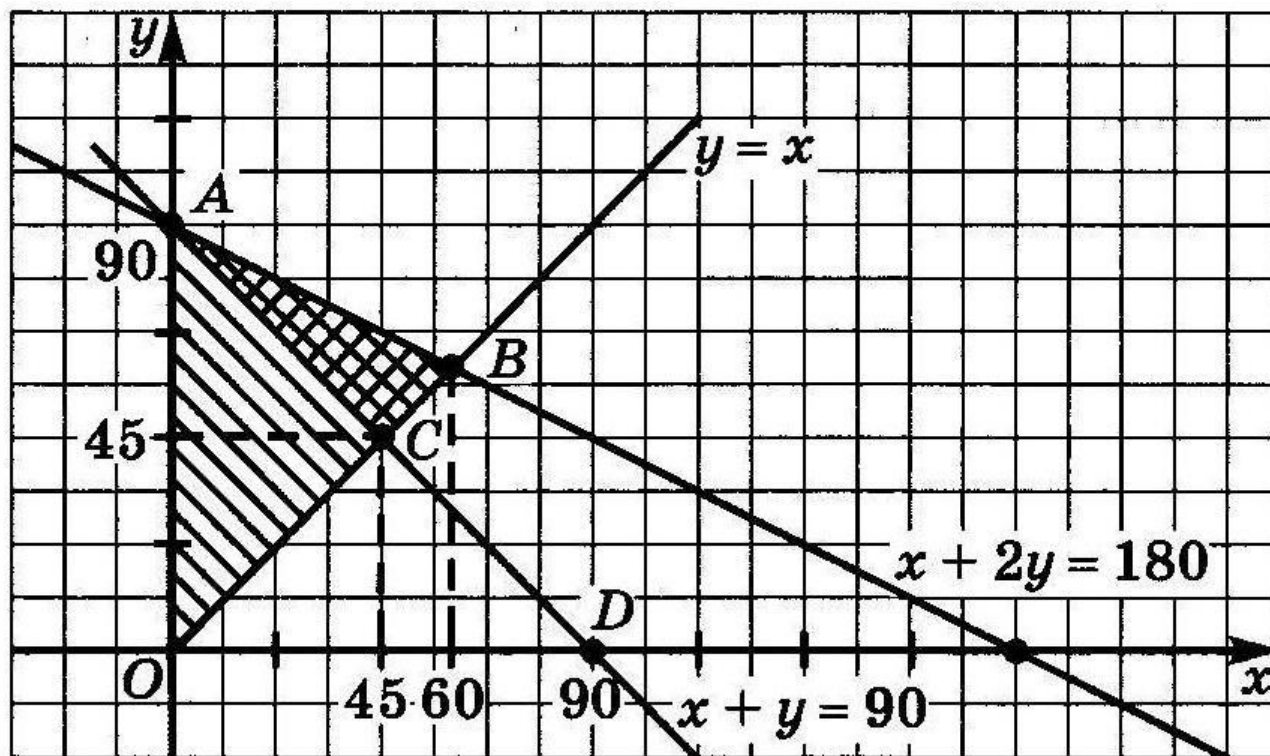


Работа с моделью

- Отметим в нашей модели точки, соответствующие остроугольным треугольникам.

$$\left[\begin{array}{l} x < y < 90 \quad x < y < 90 \\ y < 180 - x - y < 90 \quad x + 2y < 90 \\ \quad \quad \quad x + y > 90 \end{array} \right]$$

- Получаем треугольник с вершинами $A(0; 90)$ $B(60; 60)$ $C(45; 45)$



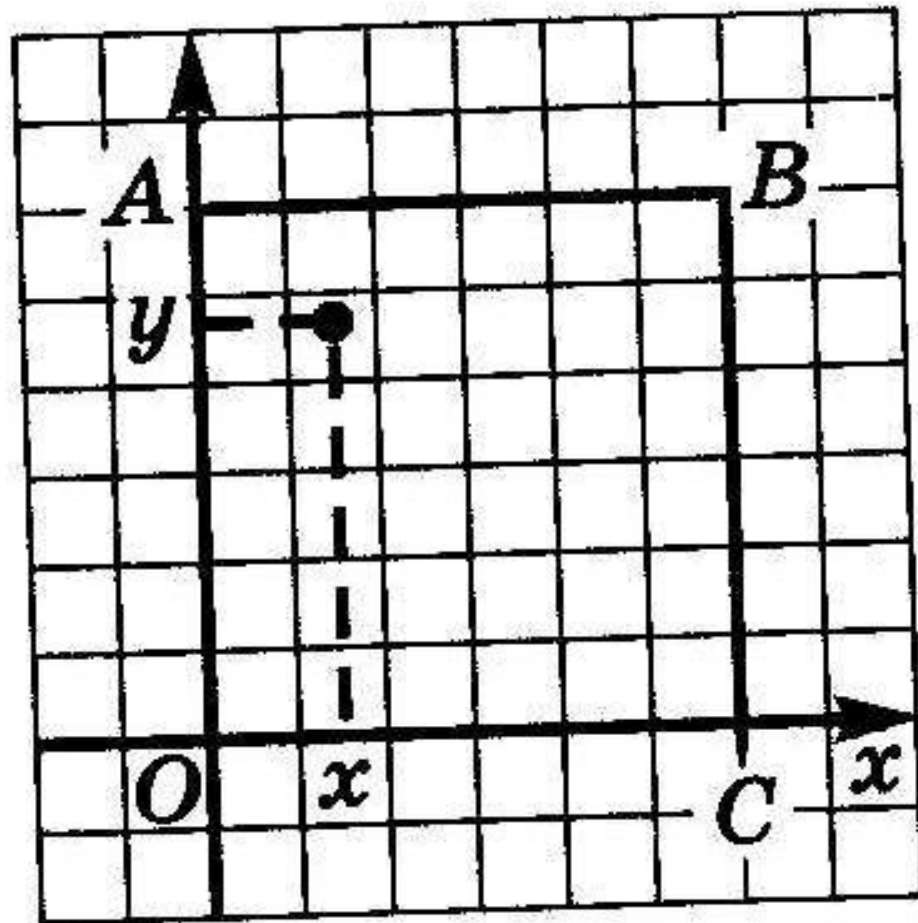
- $S(ABC)/S(AOB) = (0.5 AC * BC) / (0.5 AC * OB) = BC/OB$
- По теореме Фалеса $BC/OB = 0,25$
- $P(A) = 0.25$

Пример 3

- Два шпиона решили встретиться у фонтана. Каждый из них может гарантировать только то, что он появится у фонтана с 12-00 до 13-00. По инструкции шпион после прихода ждет встречи у фонтана 15 минут и по их истечении (или ровно в 13:00) уходит. Какова вероятность встречи?

Построение модели

- За единицу отсчета возьмем 1 час, а за начало отсчета возьмем 12:00. Пусть x - время прихода первого шпиона, а y - время прихода второго. Тогда $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ и точка (x, y) квадрата с вершинами $O(0; 0)$ $A(0; 1)$ $B(1; 1)$ $C(1; 0)$ будет соответствовать времени прихода первого и второго шпионов.



Работа с моделью

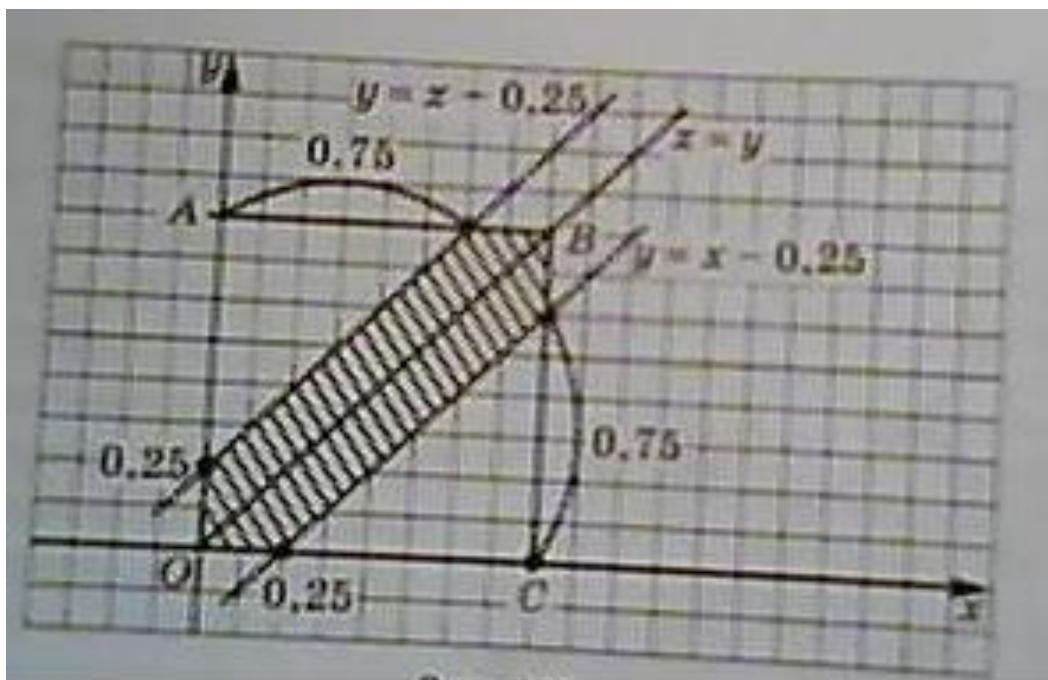
- Встреча произойдет, только если время прихода первого шпиона отличается от времени прихода второго не более чем на 15 минут. Т.е.

$$0 \leq x \leq 1 \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq y \leq 1 \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$|y-x| \leq 0.25 \quad x-0.25 \leq y \leq x+0.25$$

- Получается часть квадрата OABC, лежащая между прямыми $y=x-0.25$ и $y=x+0.25$



- Незаштрихованная часть состоит из двух прямоугольных треугольников, катеты которых равны 0,75. Значит их площадь равна 0,5625. Т.е. заштрихованная часть составляет 0,4375 от площади всего квадрата. Это и есть искомая вероятность $P(A)=0.4375$