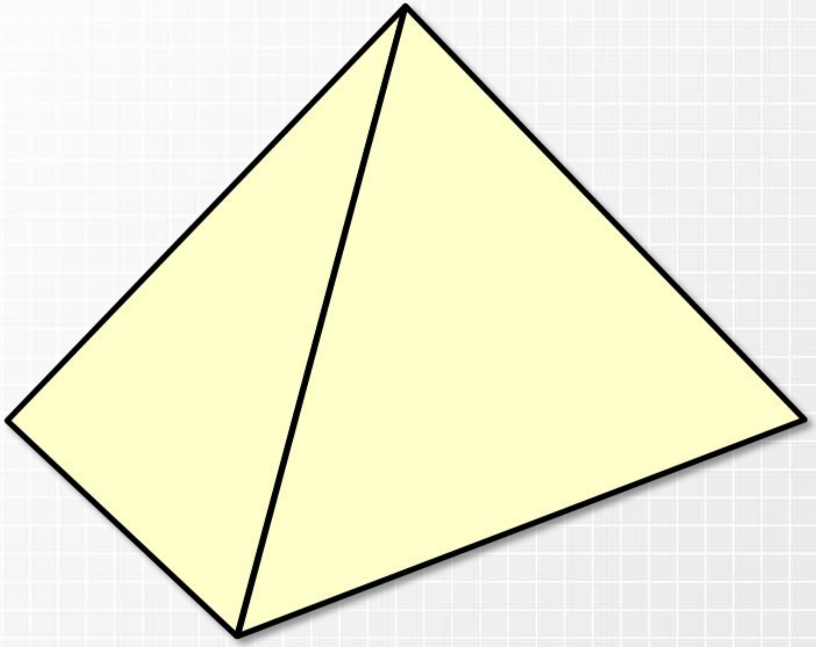
Тема урока:

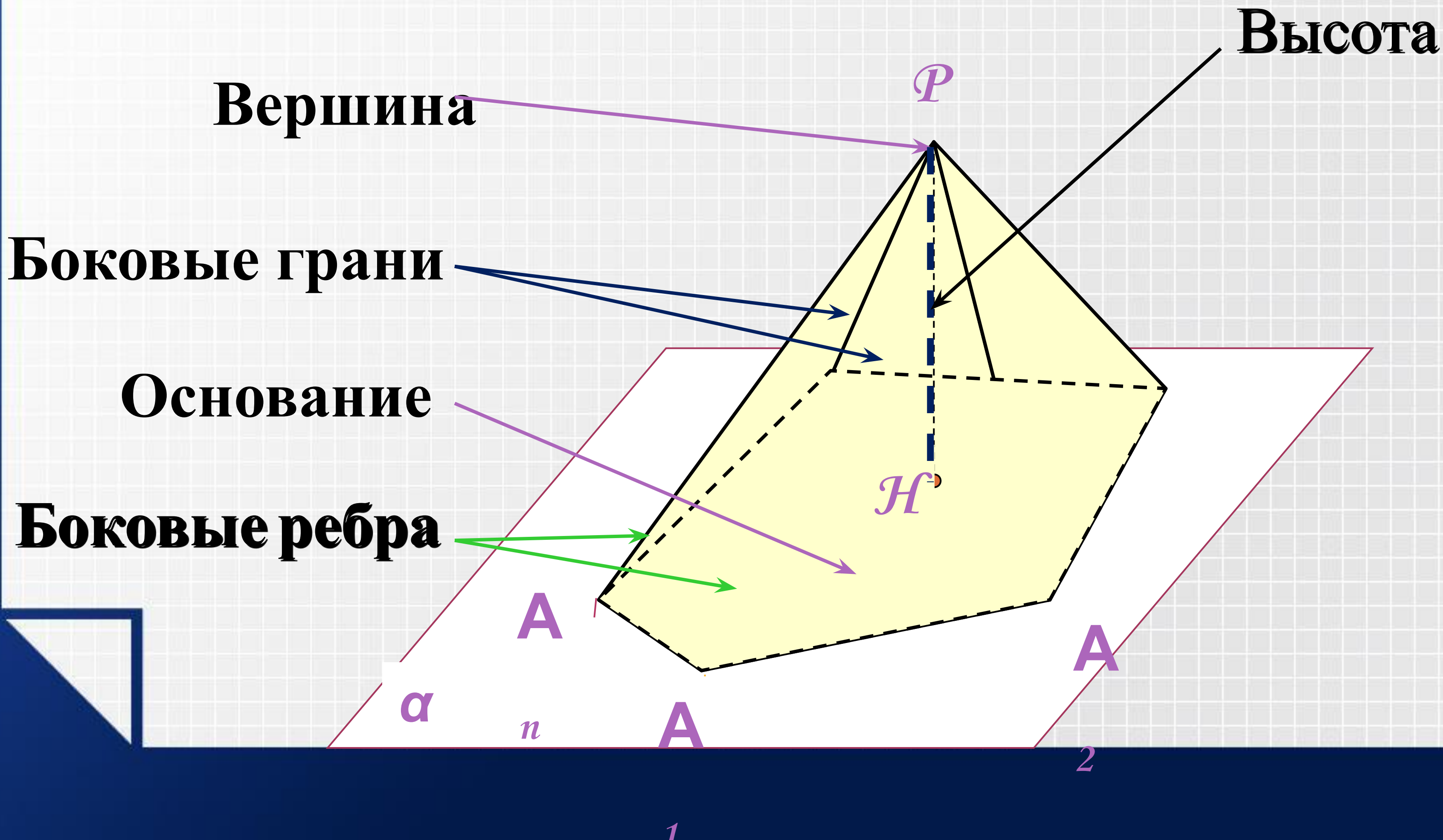
Объем пирамиды.

Что мы знаем о пирамиде?

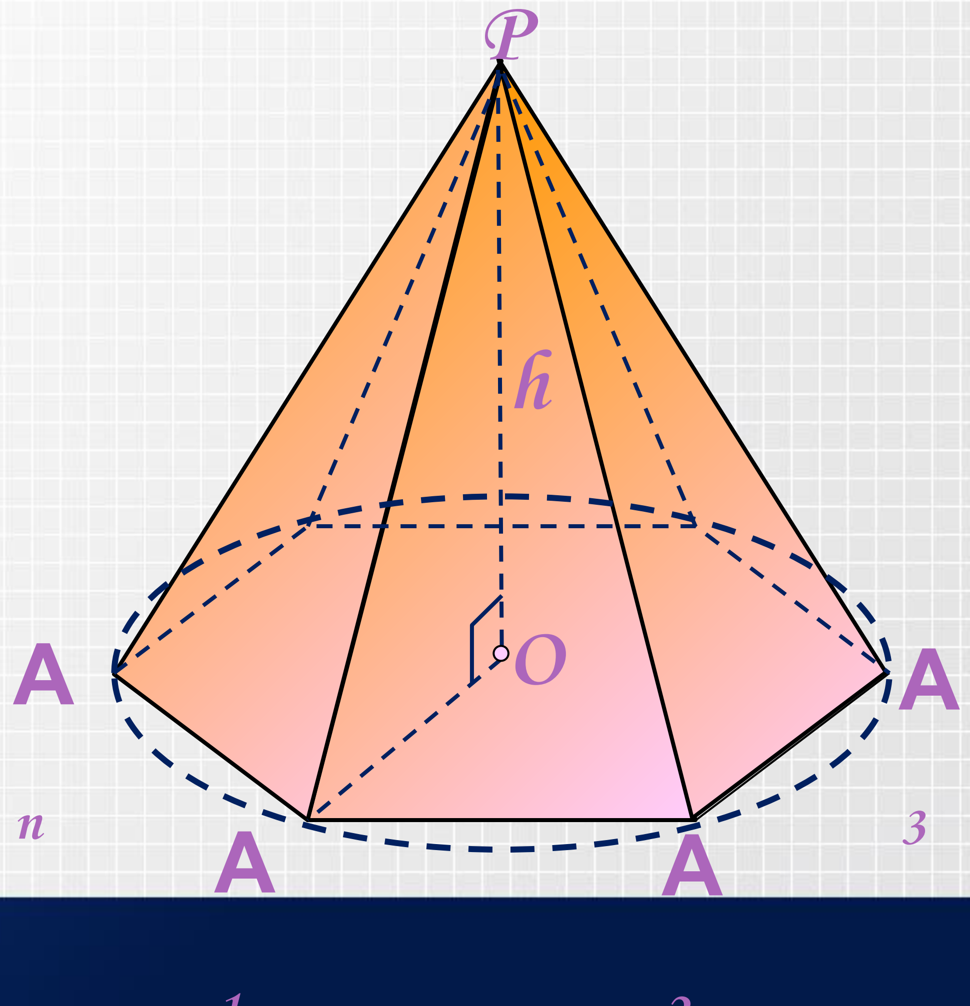


Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника – **основания пирамиды**, точки, не лежащей в плоскости основания – **вершины пирамиды** и треугольников - **боковых граней**.

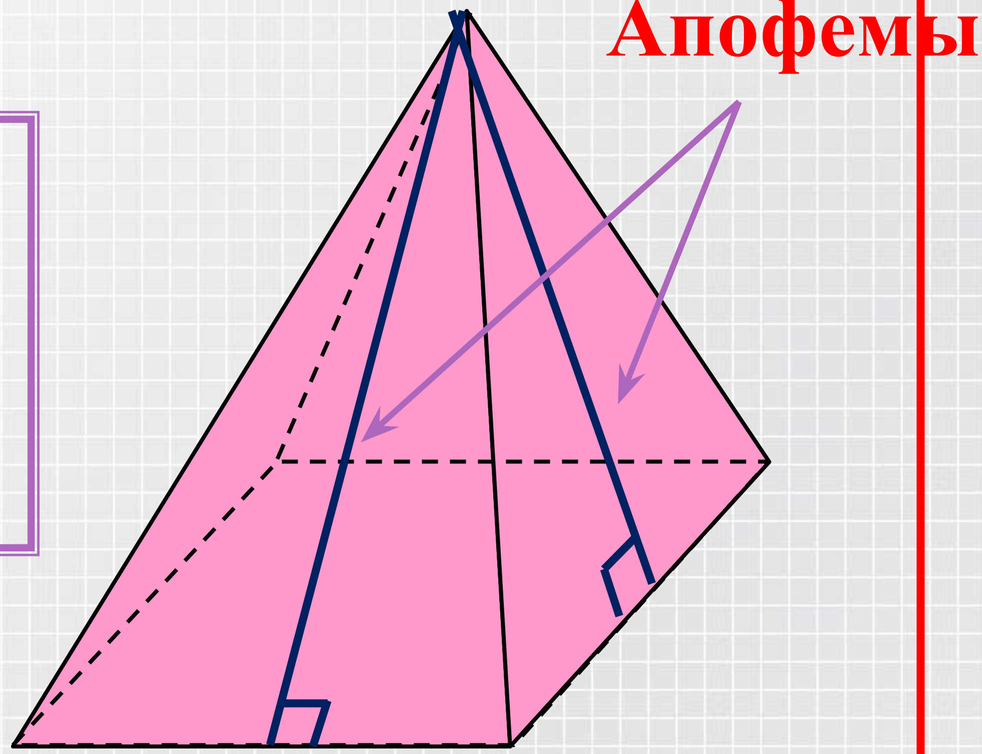
Пирамида называется n – угольной, если ее основание – n–угольник.



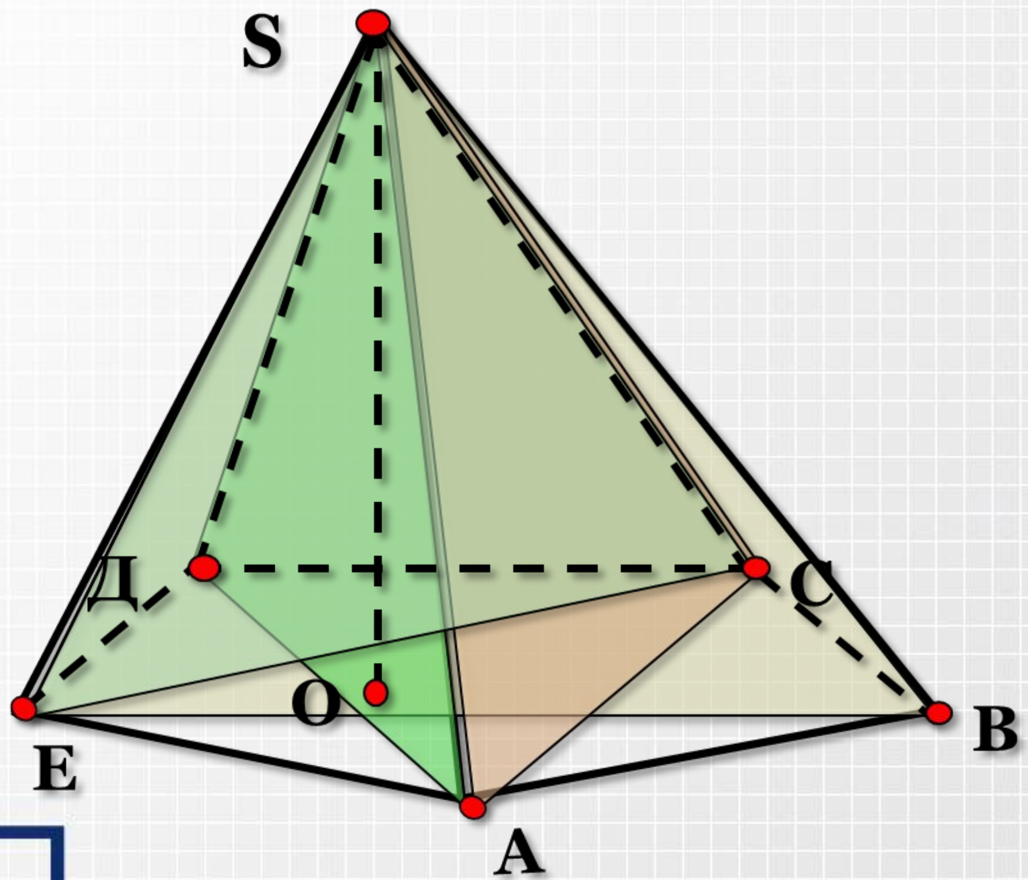
Пирамида называется **правильной**, если ее основание - правильный многоугольник , а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является ее высотой.



Апофема – высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины



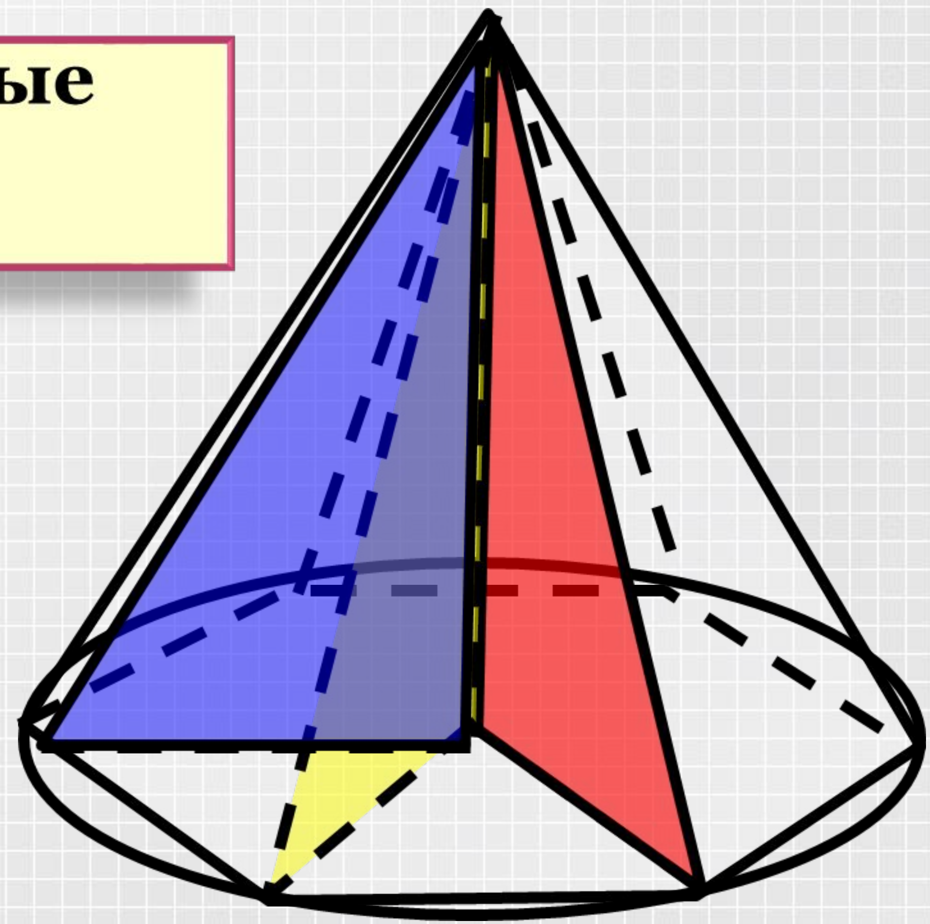
Все апофемы правильной пирамиды равны друг другу



Диагональное сечение пирамиды – сечение плоскостью, проходящей через два не соседних боковых ребра

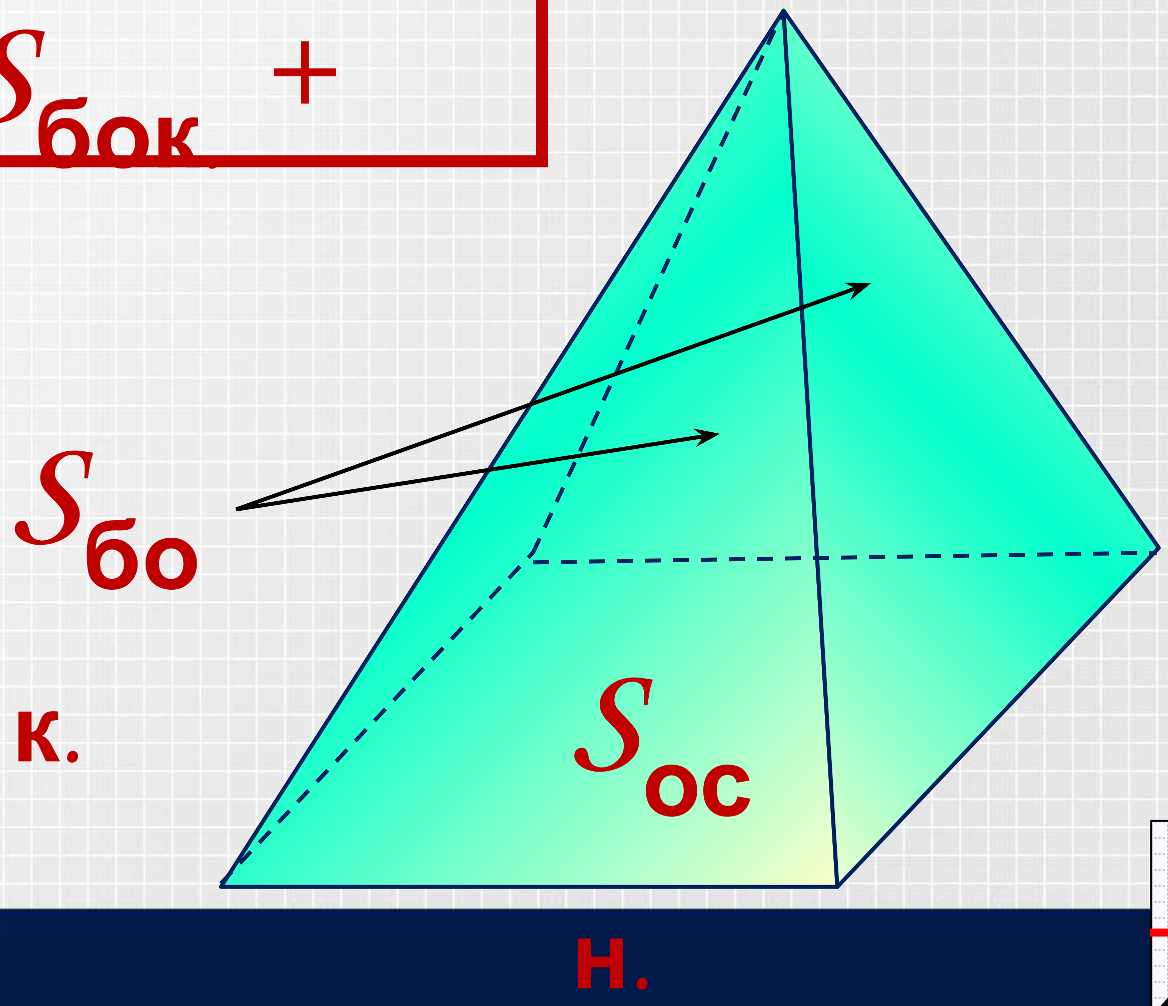
Боковые ребра равны

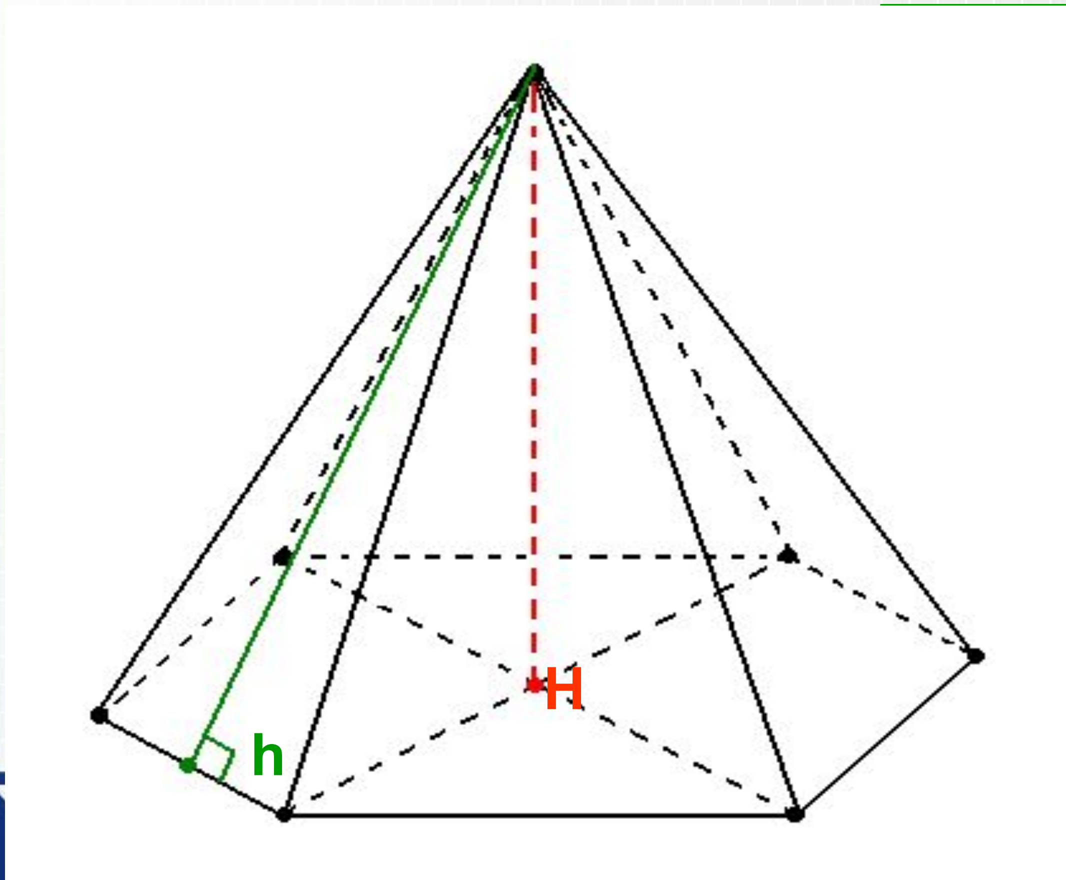
Боковые грани равные равнобедренные треугольники



Площадь пирамиды

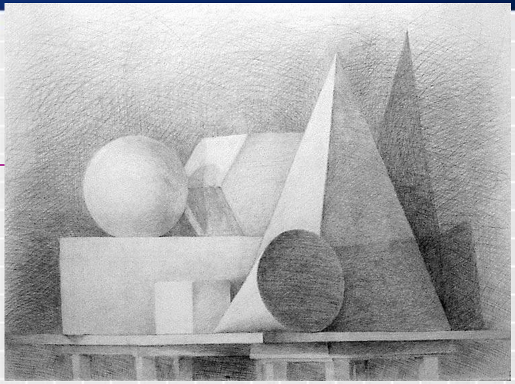
$$S_{\text{попн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}$$





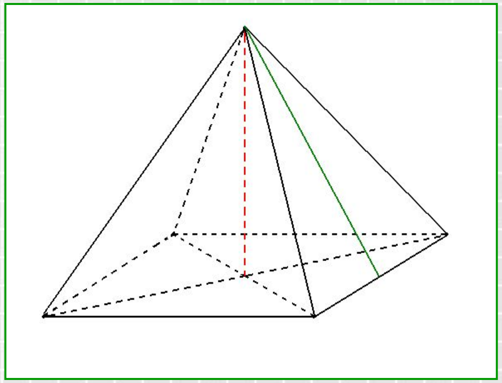
$$\ldots = \frac{1}{2} \cdot P_{осн.} \cdot h$$

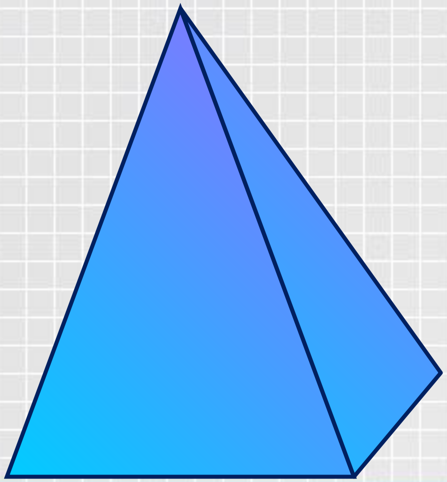
Свойства пирамиды:



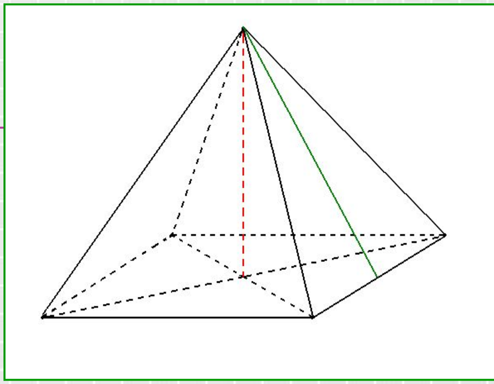
У правильной пирамиды:

- боковые ребра равны;
- боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками;
- апофемы равны;
- площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра на апофему.

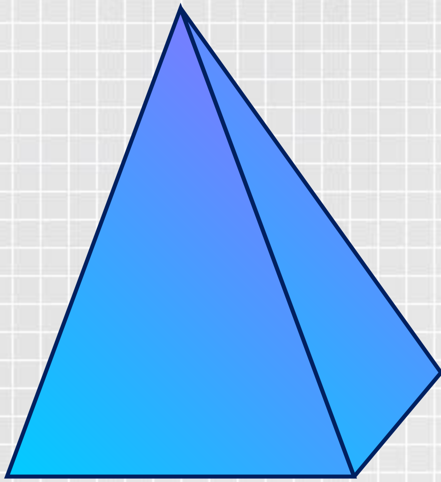




Свойства пирамиды:

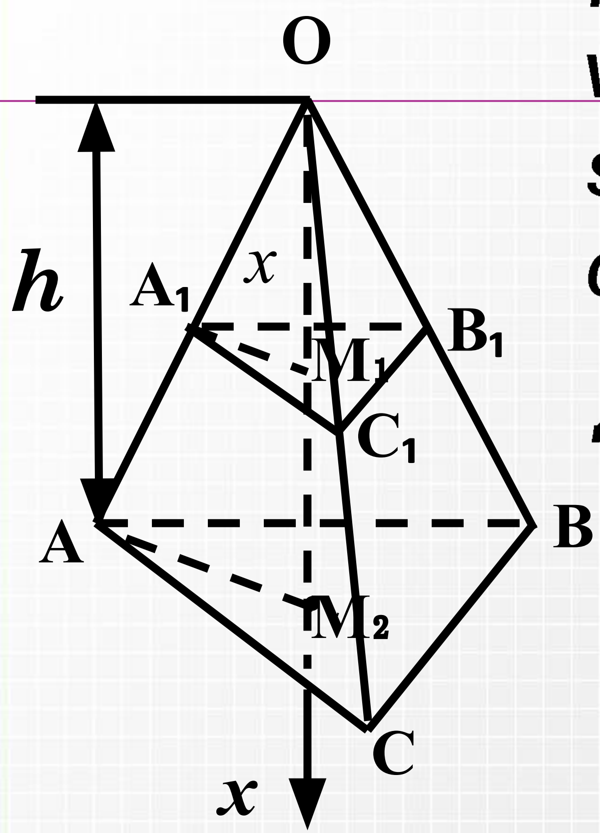


- если боковые ребра пирамиды равны (или составляют равные углы с плоскостью основания), то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания.
- если двугранные углы при основании пирамиды равны (или равны высоты боковых граней, проведенные из вершины пирамиды), то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды.



Теорема: **Объём пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту.**

$$V = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h$$



I. Дано : $OABC$ - пирамида,

V - объём,

S - площадь ΔABC,

$OM_2 = h$ (высота пирамиды).

Доказать : $V = \frac{1}{3} S_{осн.} h$.

Доказательство:

1) $V = \int_0^h S(x)dx$

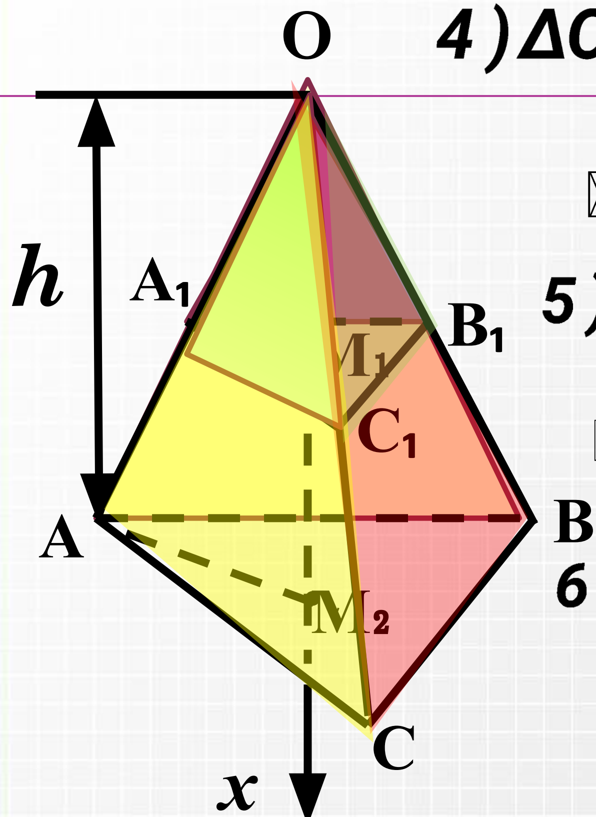
2) $OX : h \subset OX$

$A_1B_1C_1 \parallel ABC$

$OM_1 = x, M_1 \in \Delta A_1B_1C_1$

$S(x)$ - площадь сечения

$\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta ABC$



4) $\Delta OAB: AB \parallel A_1B_1 \Rightarrow \Delta OAB \sim \Delta OA_1B_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA}$$

5) $\Delta OAC: A_1C_1 \parallel AC \Rightarrow \Delta OA_1C_1 \sim \Delta OAC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{OC_1}{OC}$$

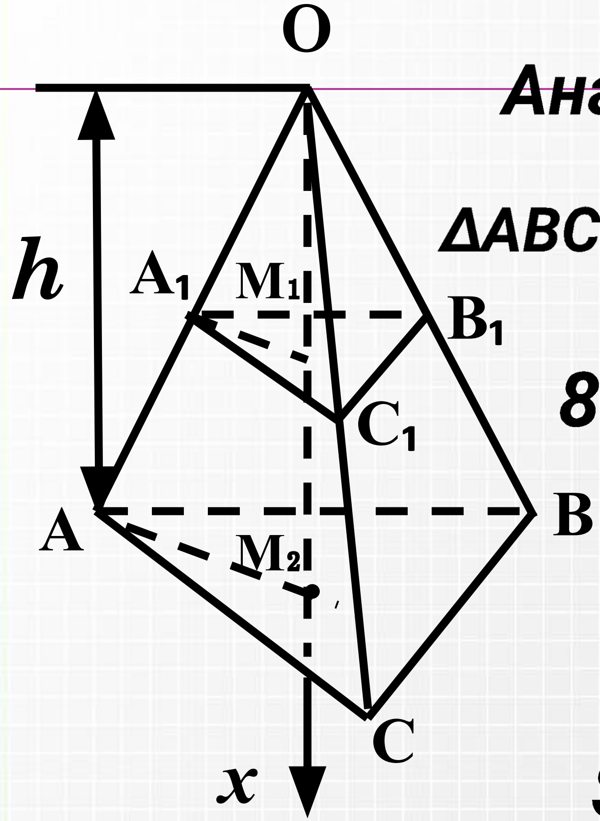
6) $\Delta OCB: B_1C_1 \parallel BC \Rightarrow \Delta OB_1C_1 \sim \Delta OBC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{OB_1}{OB}$$

7) ΔOA_1M_1 и ΔOAM_2 : $\angle M = \angle M_1 = 90^\circ, \angle O$ - общий $\Rightarrow$

$$\Delta OA_1M_1 \sim \Delta OAM_2 \Rightarrow \frac{OA_1}{OA} = \frac{OM_1}{OM_2} = \frac{x}{h}$$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA} = \frac{x}{h} \Rightarrow \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{x}{h}$$



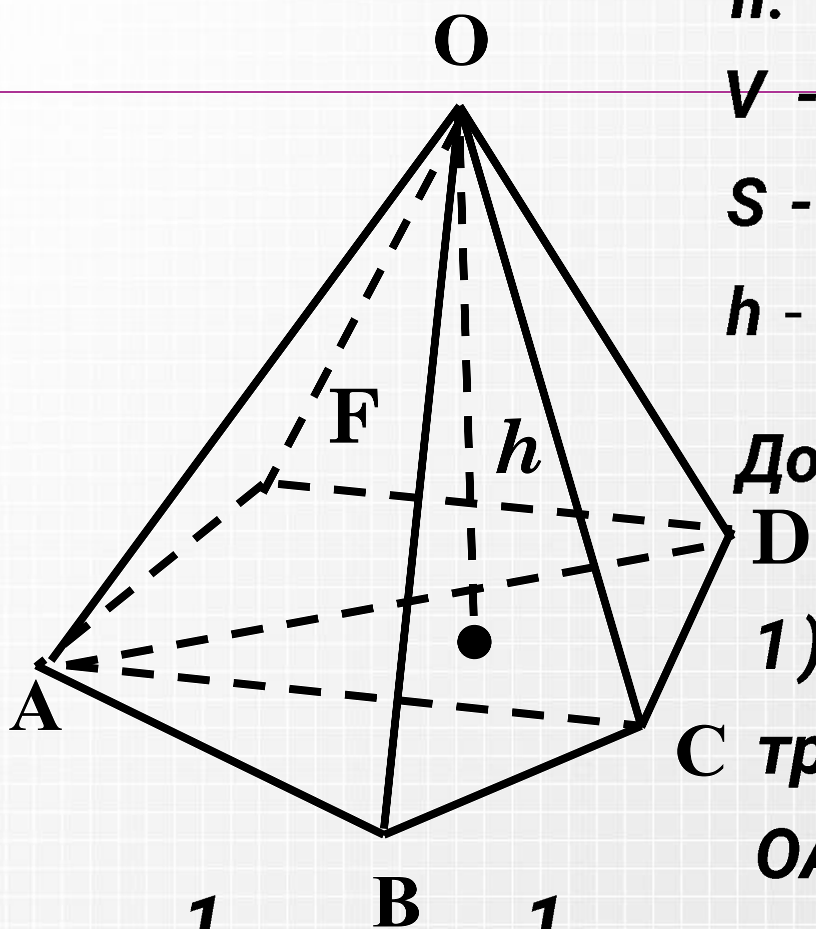
$$\text{Аналогично}: \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{x}{h}; \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{x}{h}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 : \frac{x}{h} \text{ - коэффициент подобия}$$

$$8) \frac{S(x)}{S} = \left(\frac{x}{h}\right)^2 \Rightarrow S(x) = \frac{S}{h^2}x^2$$

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx =$$

$$= \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h = \boxed{\frac{1}{3}Sh}$$



II. Дано : OABCDF - пирамида,

V - объём,

S - площадь ABCDF ,

h - высота пирамиды.

Доказать : $V = \frac{1}{3} S_{осн.} h$.

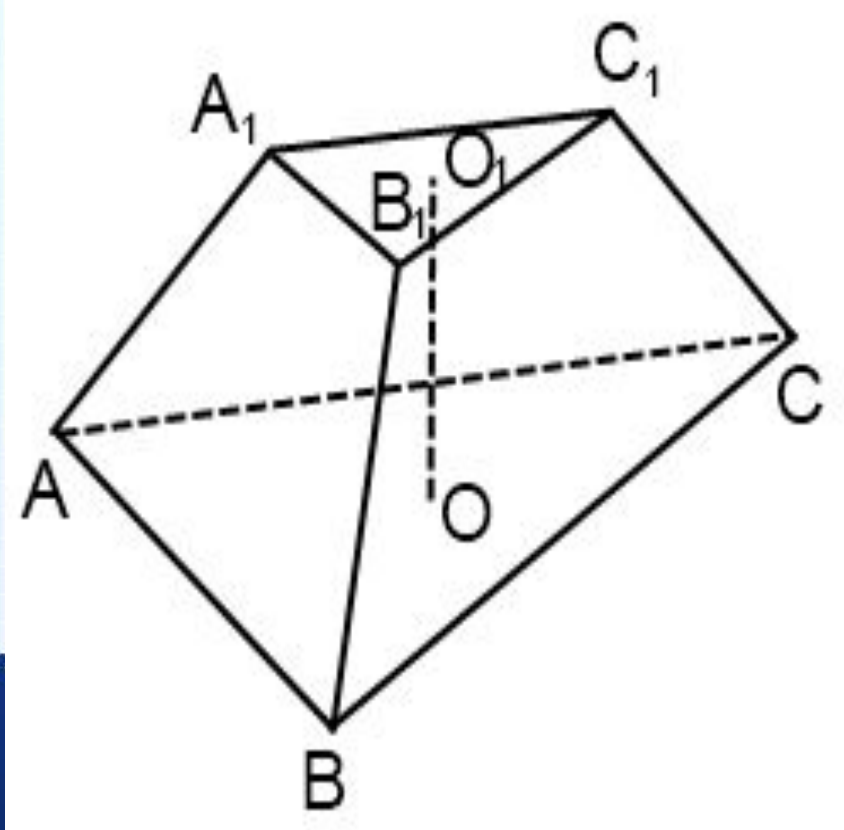
Доказательство:

1) Разобьём пирамиду на три треугольные : OABC , OACD , OADF;

$$2)\; V = \frac{1}{3} S_{AFD} h + \frac{1}{3} S_{ADC} h + \frac{1}{3} S_{ABC} h =$$

$$= \frac{1}{3} h (S_{AFD} + S_{ADC} + S_{ABC}) = \boxed{\frac{1}{3} S_{осн.} h}$$

Теорема: ***Объём усечённой пирамиды, высота которой h, а площади оснований равны S и S_1 вычисляется по формуле.***

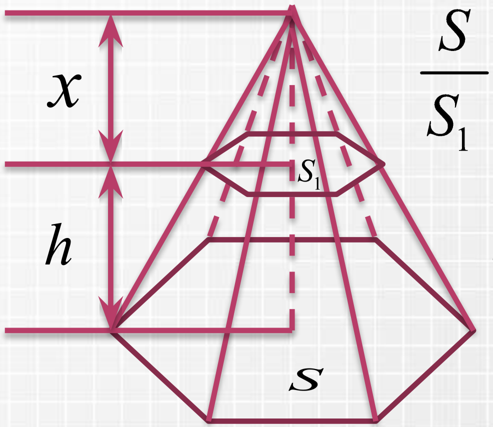


$$V=\frac{1}{3}h\cdot(S+S_1+\sqrt{S\cdot S_1})$$

- **Объем усеченной пирамиды будем рассматривать как разность объемов полной пирамиды и той, что отсечена от нее плоскостью, параллельной основанию**

Объем полной пирамиды $V=\frac{1}{3}Sh$

$$V=\frac{1}{3}Sh+\frac{1}{3}Sx-\frac{1}{3}S_1x=\frac{1}{3}Sh+\frac{1}{3}x(S-S_1) \quad (1)$$



$$\frac{S}{S_1}=\frac{(h+x)^2}{x^2} \rightarrow \sqrt{S}x=\sqrt{S_1}h+\sqrt{S_1}x \rightarrow$$

$$\sqrt{S}x-\sqrt{S_1}x=\sqrt{S_1}h$$

$$x=\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}$$

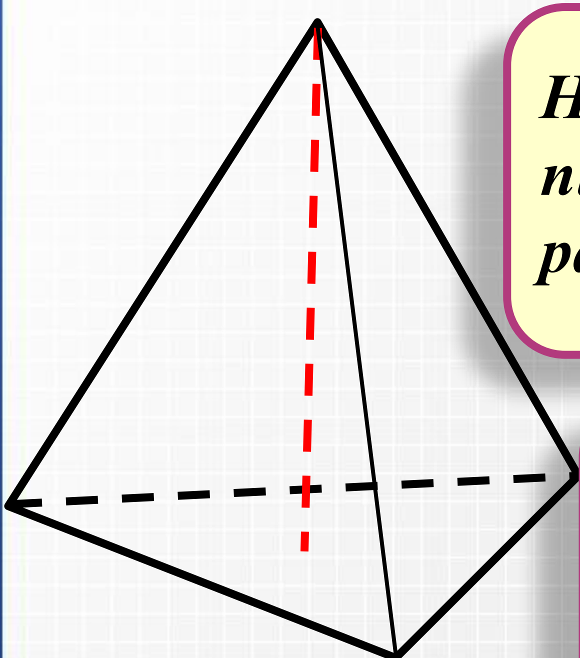
Подставляем в уравнение 1

$$V=\frac{1}{3}Sh+\frac{1}{3}(S-S_1)\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}$$

$$\frac{1}{3}Sh+\frac{1}{3}(\sqrt{S}-\sqrt{S_1})(\sqrt{S}+\sqrt{S_1})\frac{h\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{3}Sh+\frac{1}{3}S_1h+\frac{1}{3}h\sqrt{SS_1}=\frac{1}{3}h(S+S_1+\sqrt{SS_1})$$

Задачи по готовым чертежам



Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а высота равна $\sqrt{3}$.

Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 2, а объем равен $\sqrt{3}$.

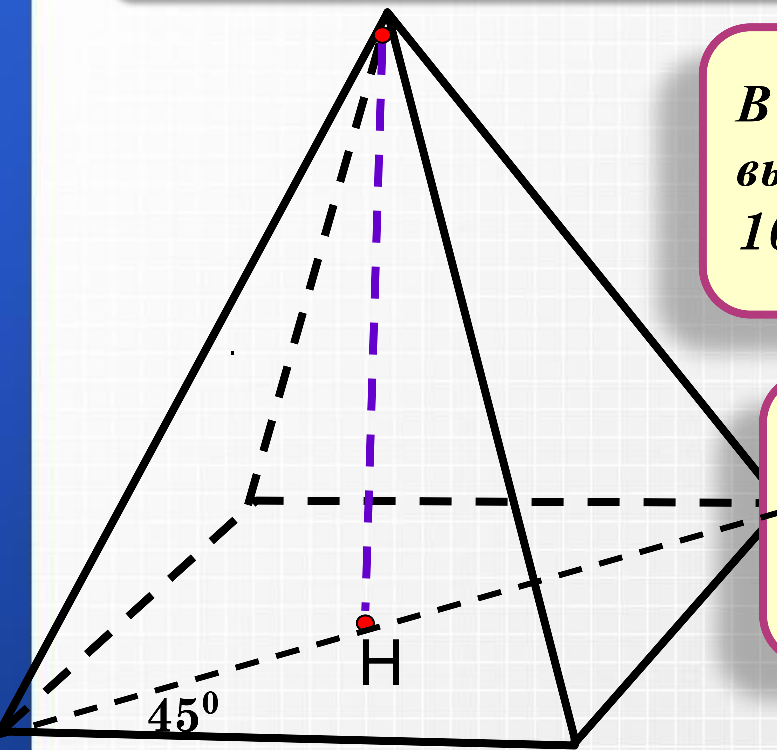
$$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{4}$$

$$h = \frac{3V}{S_{осн}} = \frac{3 \cdot 4\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 3$$

В 13	0	,	2	5	

В 13	3				

Задачи по готовым чертежам



В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6, сторона основания равна 10. Найдите ее объем.

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot 6 = 200$$

В правильной четырехугольной пирамиде высота равна 6, боковое ребро равно 10. Найдите ее объем.

$$\cos 45^0 = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AB}{16}$$

$$AB = 8\sqrt{2}$$

$$V = \frac{1}{3}\left(8\sqrt{2}\right)^2 \cdot 6 = 256$$

В 13	2	5	6			

Задачи (база)

Сторона основания правильной треугольной пирамиды … образует с плоскостью … найдите объем пирамиды.

V =18

Высота правильной треугольной пирамиды равна … с плоскостью … найдите объем пирамиды.

V = 192

Задачи (профиль)

Объем треугольной пи[illegible] частью правильной шестиуго[illegible] равен 8. Найдите объем шестиугольн[illegible] пирам[illegible]ды.

V = 48

От треугольной пирамиды, объем [illegible]оторой равен 12, отсечена треу[illegible]ью, проходящей через верши[illegible]о основания. Найдите объем отсечен[illegible]й треугольной пирамиды.

V =3