

# **ПРОИЗВОДНАЯ. НЕСТАНДАРТНЫЕ ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ.**

**Подготовил студент 1 курса  
ВГТУ**

**группы Тээ– 2**

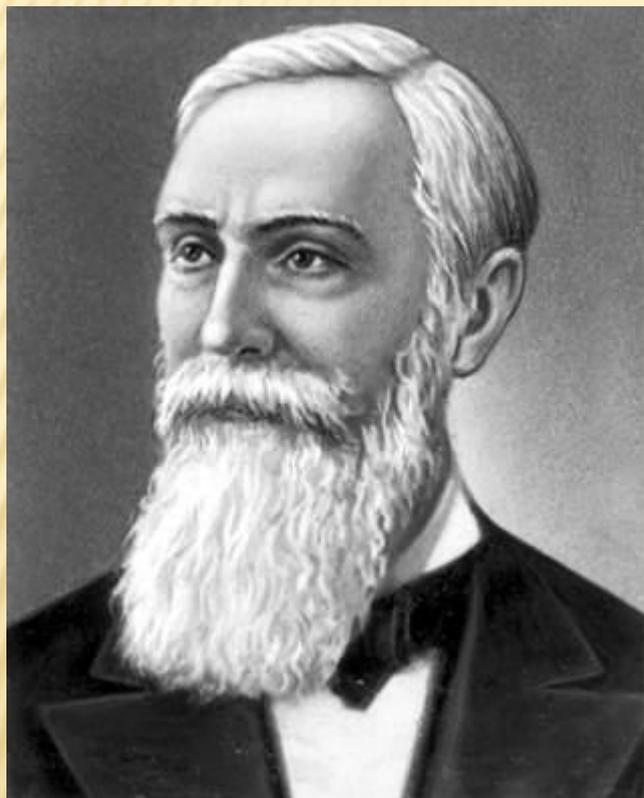
**Поздняков Павел**

**Викторович**

---

---

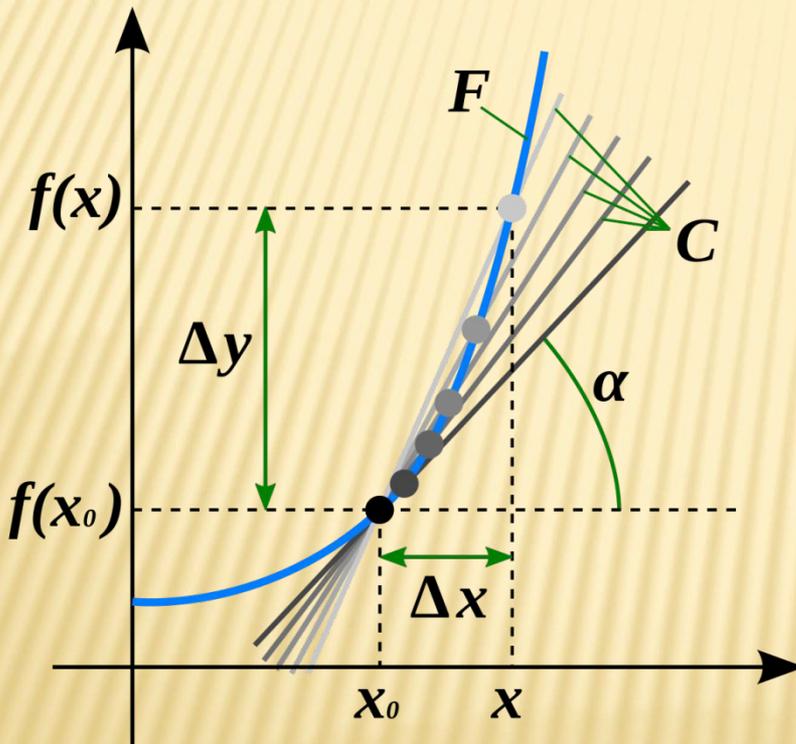
**Каждый человек время от времени оказывается в ситуации, когда надо отыскать наилучший способ решения какой-либо задачи, и математика становится средством решения проблем организации производства, поисков оптимальных решений. Важным условием повышения эффективности производства и жизнедеятельности, улучшения качества жизни является широкое внедрение математических методов в технику и практику.**



Российский математик  
19 века Панфутий  
Львович Чебышев  
говорил, что  
«особенную важность  
имеют те методы науки,  
которые позволяют  
решать задачу, общую  
для всей практической  
деятельности человека,  
например, как  
располагать своими  
средствами для  
достижения наибольшей  
выгоды».

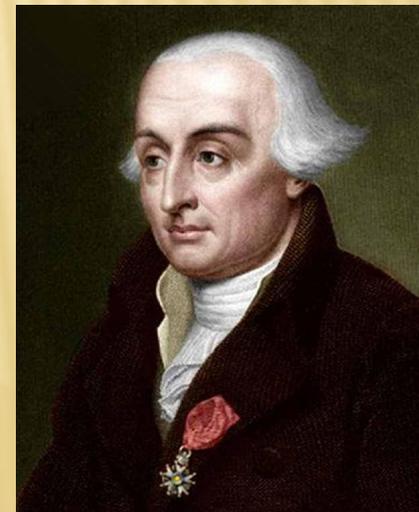
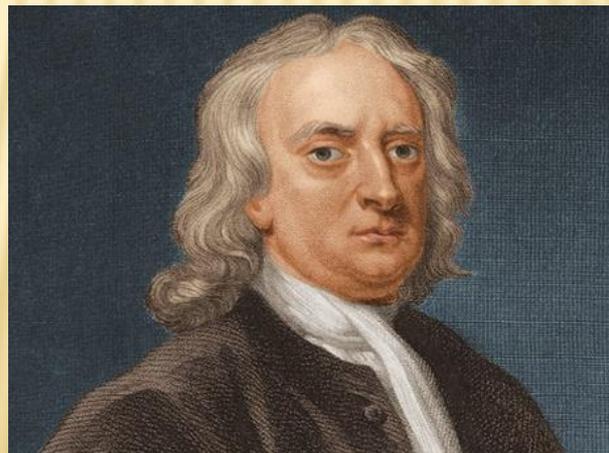
Это задачи

# ОДНИМ ИЗ ВАЖНЕЙШИХ ПОНЯТИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЯВЛЯЕТСЯ ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ.



Именно с помощью дифференциального счисления эффективно решаются многие практические задачи. Производная характеризует скорость изменения функции по отношению к изменению независимой переменной.

Честь открытия основных законов математического анализа принадлежит английскому физику и математику Исааку Ньютону и немецкому математику, физику, философу Лейбницу. Термин производная и современные обозначения  $y'$ ,  $f'$  ввёл Ж. Лагранж в 1797г.



# ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ:

---

производная функции как модель, определяющая способы и методы нахождения оптимального значения функции, описывающей реальный процесс.

Ведущая цель - показать значимость производной не только в математике, но и в других науках, её важность в современной жизни и практической деятельности.

## Методы исследования:

- сбор фактов (изучение литературы)
- качественный анализ, синтез, сравнение, обобщение полученной информации.
- самостоятельное решение практических задач методами дифференциального счисления, анализ и сравнение результатов с реальной действительностью.

# ЗАДАЧИ:

---

- 1) рассмотреть применение производной в практической деятельности;
- 2) подбор задач на экстремум из различных областей науки, техники и практики;
- 3) показать применение производной к решению конкретных практических задач а также продемонстрировать широкий спектр возможностей её применения.

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

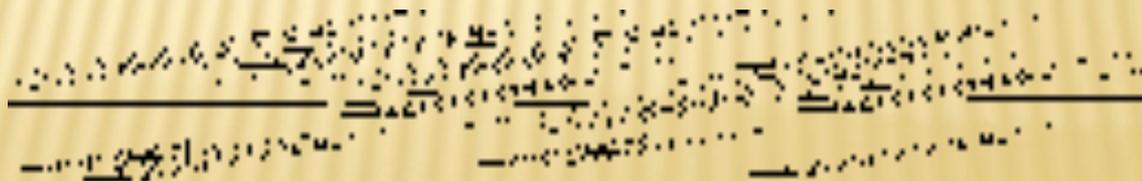
---

**– это описание окружающего нас мира, выполненное на математическом языке. Производная помогает нам успешно решать не только математические задачи, но и задачи практического характера в разных областях науки и техники**

# ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

---

— понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции в данной точке. Определяется как предел отношения приращения функции к приращению её аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если такой предел существует. Функцию, имеющую конечную производную (в некоторой точке), называют дифференцируемой (в данной точке).



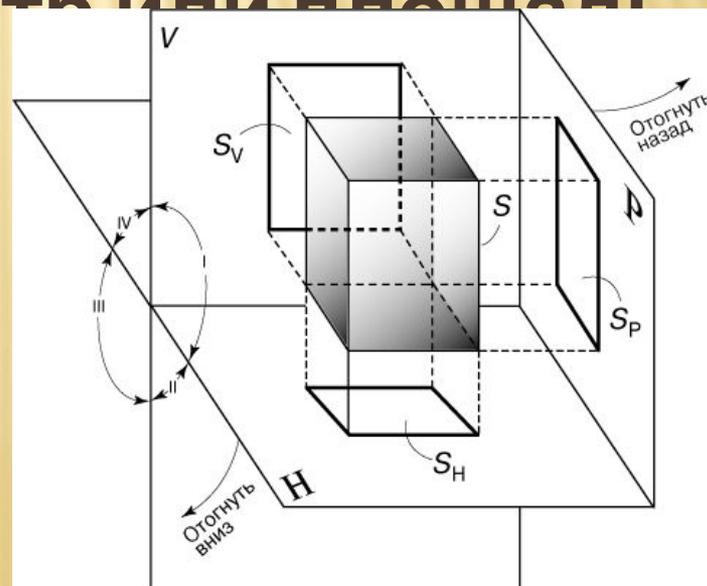
---

**Производная функции используется всюду, где есть неравномерное протекание процесса: это и неравномерное механическое движение, и переменный ток, и химические реакции и радиоактивный распад вещества и т.д.**

**Среди многих задач, решаемых с помощью производной, наиболее важной является задача нахождения экстремума функции и связанная с ней задача нахождения наибольшего (наименьшего) значения соответствующих функций.**

# В ГЕОМЕТРИИ

производная позволяет решить огромный класс задач, в которых требуется найти наибольшее или наименьшее значение функции. В качестве функции могут рассматриваться периметр или площадь фигуры или, например, объем тела, а аргументом функции служит какой-либо параметр фигуры или тела – длина стороны, угол между сторонами и



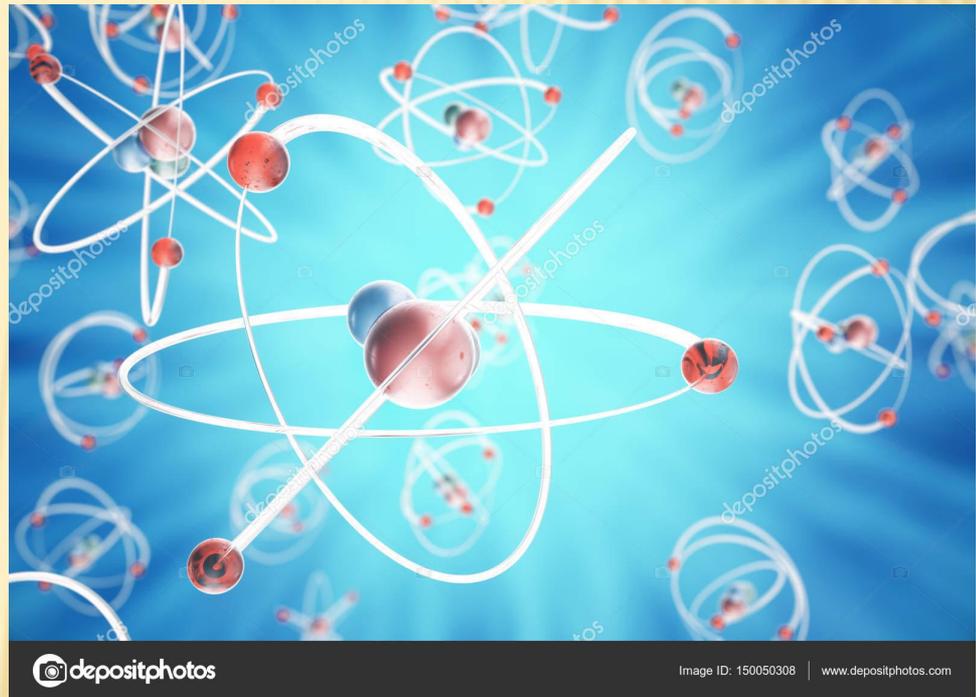
# В МЕХАНИКЕ

С ПОМОЩЬЮ  
ПРОИЗВОДНОЙ  
ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ  
СКОРОСТЬ  
НЕРАВНОМЕРНОГО  
ПРЯМОЛИНЕЙНОГО  
ДВИЖЕНИЯ

$$v = S'(t),$$

И УСКОРЕНИЕ  
КАК ПРОИЗВОДНАЯ  
СКОРОСТИ

$$a = v'(t),$$



# В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

---

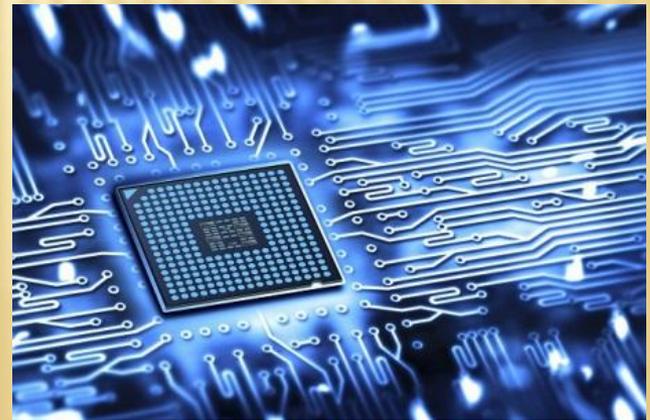
Количественной характеристикой электрического тока является сила тока.

В цепи электрического тока электрический заряд меняется с течением времени по закону  $q=q(t)$ .

Сила тока есть производная заряда  $q$  по



$$I=q'(t)$$



**В электротехнике в основном используется А работа переменного тока.**

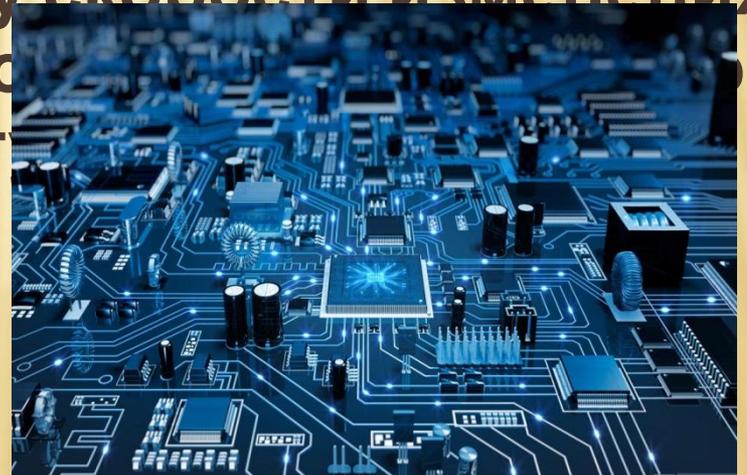
---

**Получение переменного электрического тока основано на законе электромагнитной индукции, формулировка которого содержит производную магнитного потока.**

**Согласно закону электромагнитной индукции Фарадея :**

**ЭДС индукции в контуре, находящемся в переменном магнитном поле, равна по величине и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока через по ограничивает данный конт**

$$E_{\text{инд}} = -\Phi'(t)$$



# В ХИМИИ

---

Производную в химии используют для определения скорости химической реакции, одного из решающих факторов, который нужно учитывать во многих областях научно-производственной деятельности.

Если  $Q(t)$  – закон изменения количества вещества, вступившего в химическую реакцию, то скорость  $v(t)$  химической реакции в момент времени  $t$  является производной:

$$v(t) = Q'(t).$$



# В БИОЛОГИИ

---

Производная определяет скорость изменения популяции (это совокупность особей данного вида, занимающих определённый участок территории внутри ареала вида, свободно скрещивающихся между собой и частично или полностью изолированных от других популяций).

$P = x'(t)$  где,  $x(t)$  - численность в момент времени  $t$ ,  $P(t)$  – скорость изменения популяции,

$P(t_0)$  – относительный прирост в данный момент.



# В ГЕОГРАФИИ

---

Производная помогает рассчитать:

1. Некоторые значения в сейсмографии
2. Особенности электромагнитного поля земли
3. Радиоактивность ядерно-геофизических показателей
4. Многие значения в экономической географии
5. Вывести формулу для вычисления численности населения на территории в момент времени  $t$ .



# В ЭКОНОМИКЕ

Дифференциальное исчисление – аппарат для экономического анализа. Базовая задача экономического анализа – изучение связей экономических величин в виде функций. Производная в экономике решает важные вопросы:

1. В каком направлении изменится доход государства при увеличении налогов или при введении таможенных пошлин?
2. Увеличится или уменьшится выручка фирмы при увеличении цены на её продукцию?
3. Отзывчивость производственной функции (выход продукта на единицу затрат)
4. Скорость и темпы изменения показателей.

Также с помощью экстремума функции (производной) в экономике можно найти наивысшую производительность труда, максимальную прибыль, максимальный выпуск и минимальные



# В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

производная определяет

1) В строительстве мостов

зависимость нагрузочного момента в расчетной точке от расстояния до ближайшей опоры моста, что является залогом прочности и безопасности моста.

2) в архитектуре, строительстве и эксплуатации зданий - распределение нагрузки для устойчивости конструкции и оптимальное использование



# ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНЫЙ ТРАНСПОРТ

---

**с помощью производной определяется интенсивность нагрузки железнодорожного пути от длины поезда и его загрузки.**



# **ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ**

---

**Решение практических задач  
методами  
дифференциального  
счисления, анализ и  
сравнение результатов с  
реальной  
действительностью.**

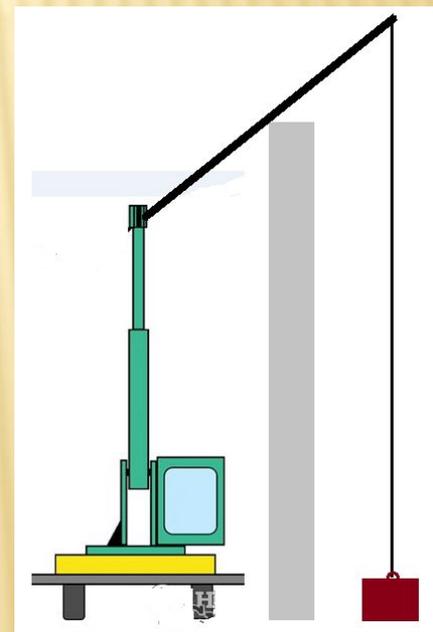
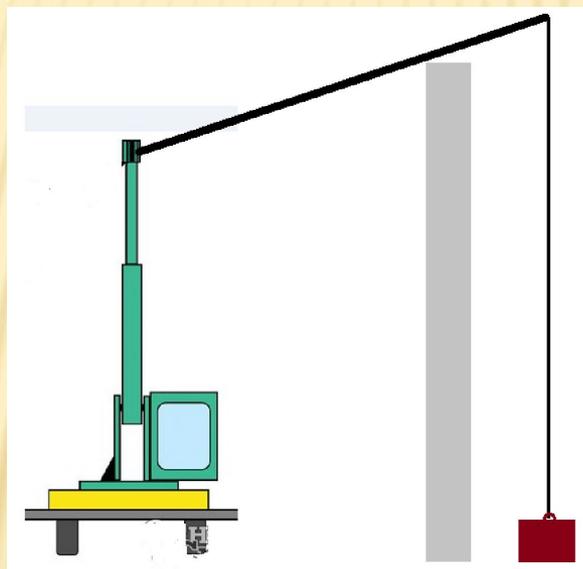
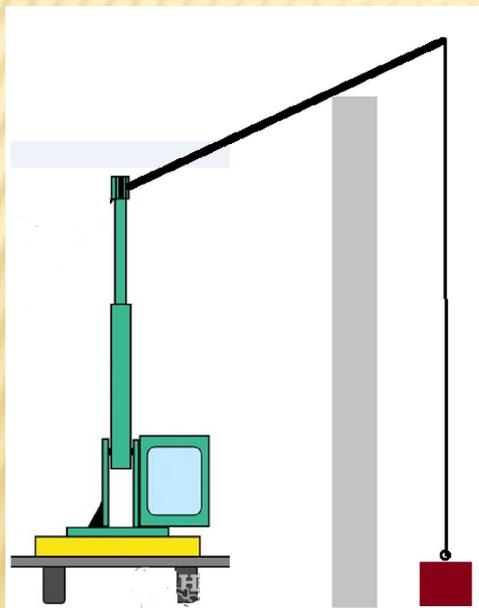
# СТРОИТЕЛЬСТВО

---

**1. По одну сторону стены высотой 30 м по горизонтальной площадке ездит кран. По другую сторону стены на расстоянии 10 м от неё лежит груз. Башня крана имеет высоту 20 м, а его стрела, прикрепленная к верхней точке башни, может быть расположена под любым углом к горизонту. При какой наименьшей длине стрелы кран может поднять груз через стену? (длина троса не ограничена)**

## РЕШЕНИЕ.

ОЧЕВИДНО, ЧТО НЕОБХОДИМАЯ ДЛИНА  
СТРЕЛЫ ЗАВИСИТ ОТ РАССТОЯНИЯ  
МЕЖДУ КРАНОМ И СТЕНОЙ. ЭТО  
ПОКАЗЫВАЕТ ОПЫТ:



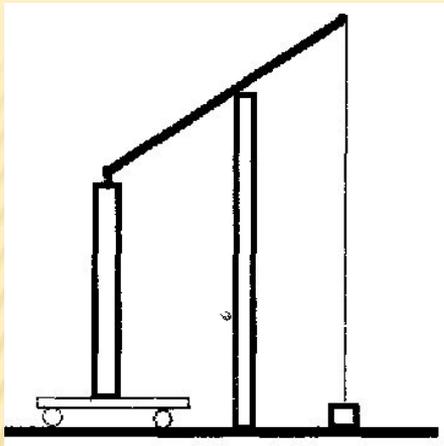
# ПОСТРОИМ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ

---

Пусть  $x$  м – расстояние от тележки крана до стены,

Рассмотрим функцию  $f(x) = \sqrt{x^2 + 10^2} \cdot \left(1 + \frac{10}{x}\right)$  на промежутке  $(0; \infty)$  на наименьшее значение.

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 100}} \cdot \left(1 + \frac{10}{x}\right) + \sqrt{x^2 + 100} \cdot \left(-\frac{10}{x^2}\right)$$



$$f'(x) = 0 \text{ если } \frac{x^3 - 1000}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 100}} = 0$$

**$x=10$  – стационарная точка функции.**

**Производная меняет знак с «минуса» на «плюс» в точке  $x=10$**

**Значит,  $x=10$  - точка минимума**

$$\boxtimes = \sqrt{10^2 + 10^2} \cdot \left(1 + \frac{10}{10}\right) = \sqrt{200} \cdot 2 = 10\sqrt{2} \approx 28,3$$

**Ответ: 28,3 м**

# ВОДОСНАБЖЕНИЕ

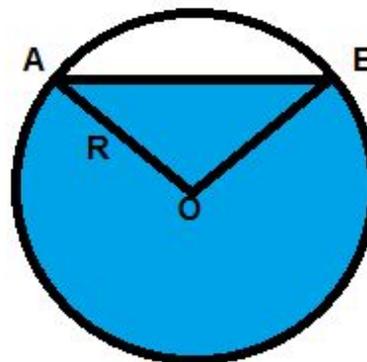
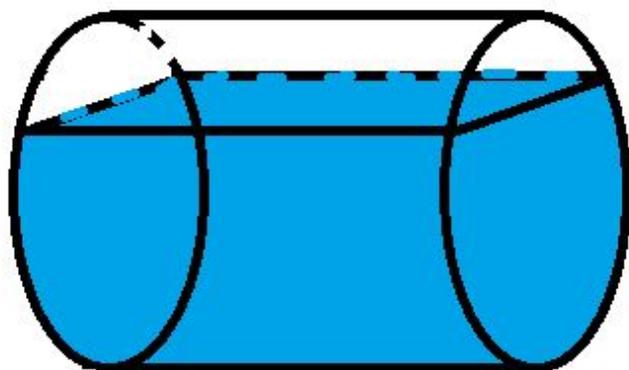
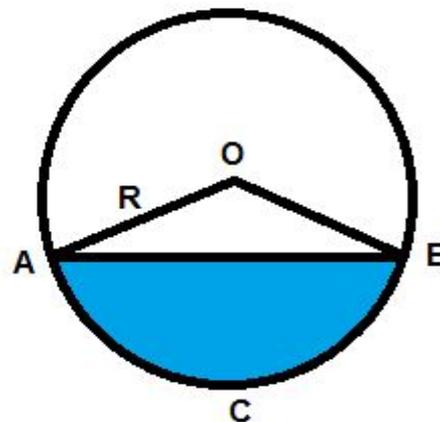
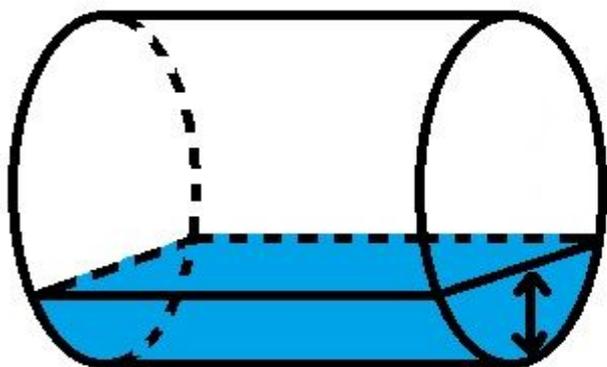
---

2. По трубе, сечение которой круг с радиусом  $R$ , течет вода. При каком заполнении трубы водой скорость течения (при неизменных других условиях) будет наибольшая?

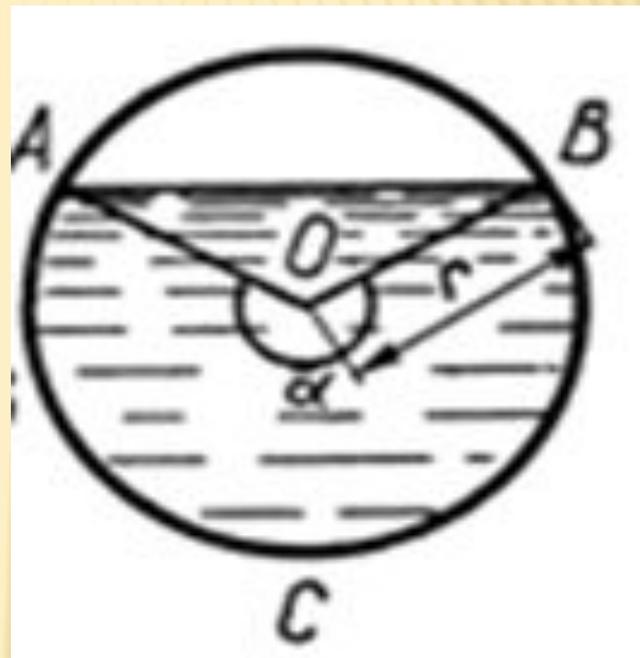
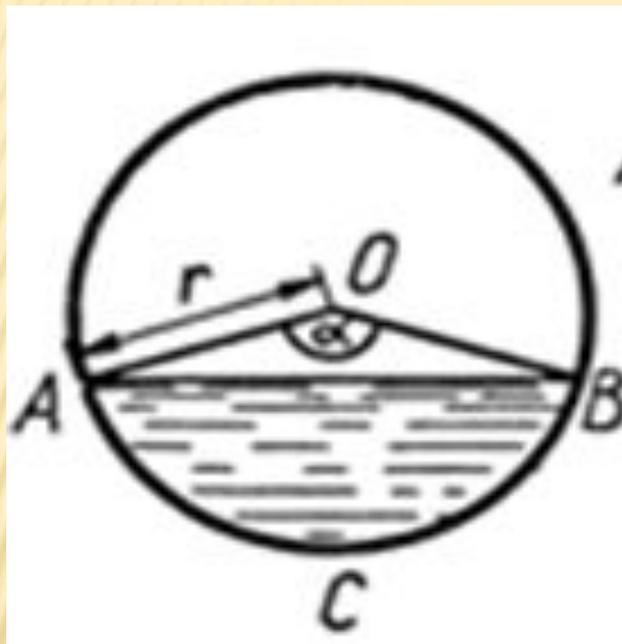


# РЕШЕНИЕ

Расчетным путём доказано, что скорость течения пропорциональна так называемому гидравлическому радиусу профиля сечения (заполненного водой).



# ПОСТРОИМ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ



**Гидравлическим радиусом профиля называется отношение площади живого сечения к длине смоченного (подводного) периметра профиля.**

Воспользуемся обозначениями:

$\alpha$  - центральный угол сегмента заполнения трубы водой (в радианах).  $F$ -площадь этого сегмента и  $R$ - гидравлический радиус.

Тогда площадь сектора  $OACB$  равна  $S = \frac{r^2}{2} \cdot \alpha$ , а площадь треугольника  $AOB$  равна  $S_1 = \frac{r^2 \cdot \sin \alpha}{2}$ ,

$$F = S_{\text{сегмента}} = S_{\text{сектора}} - S_{OAB}$$

Смоченный периметр равен  $P = r \cdot \alpha$ , а значит,

$$R = \frac{S - S_1}{P} \cdot R = \frac{r^2}{2} (\alpha - \sin \alpha) : (r \alpha) = \frac{r}{2} \left( 1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)$$

$$R' = \frac{r}{2} \left( \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha^2} \right), \quad \frac{r}{2} \left( \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha^2} \right) = 0,$$

$\sin \alpha - \alpha \cos \alpha = 0$ , при  $\alpha \neq 0$ .

Решив уравнение, получим

$\alpha \approx 4,5$  рад или  $\alpha \approx 258^\circ$ .

Производная  $R'(\alpha)$  при переходе через  $\alpha \approx 4,5$ , меняет знак с «+» на «-».

Значит, при  $\alpha \approx 4,5$  гидравлический радиус, а значит, и скорость течения будет наибольшей.

Нетрудно рассчитать, что в этом случае заполнение трубы составляет около 82%.

Ответ: заполнение трубы 82%.

# АРХИТЕКТУРА

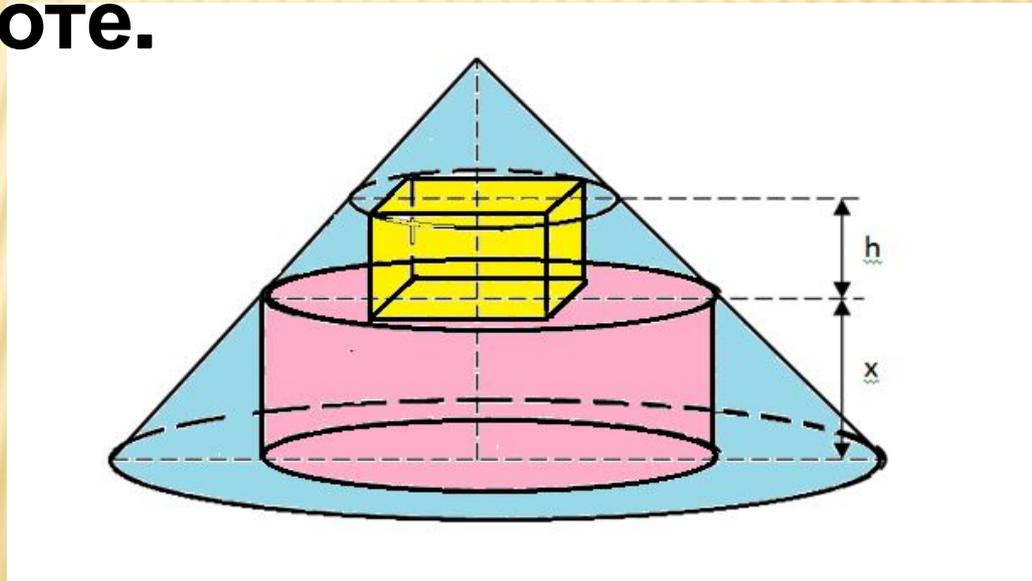
3. Архитектурное бюро проектирует строительство культурно-развлекательного центра в виде конуса. Нижний ярус должен иметь форму цилиндрического зала, а верхний - форму правильной четырехугольной призмы. Остальное – подсобные помещения. При какой высоте цилиндрической части объем второго яруса будет равен объему первого яруса? Найти этот объем яруса в форме призмы, если высота всего комплекса –  $H$ , радиус цилиндрического яруса –  $R$ .



# РЕШЕНИЕ

---

Для устойчивости конструкции отношение длины диагонали основания призмы к ее высоте должно быть равно отношению длины диаметра цилиндра к его высоте.





Определим функцию объёма призматической части в зависимости от высоты цилиндрической части  $x$

$$V(x) = \frac{4R^2(H-x)^4(H-x)x}{2H^2} = \frac{2R^2(H-x)^5x}{H^2}.$$

Производная данной функции имеет вид:

$$V'(x) = \frac{2R^2(-5(H-x)^4x + (H-x)^5)}{H^2} = \frac{2R^2(H-x)^4(H-6x)}{H^2}.$$

Производная функции меняет знак с «минуса» на «плюс» при переходе через точку  $x = \frac{H}{6}$ .

Следовательно  $x = \frac{H}{6}$  - точка максимума функции объёма призмы.

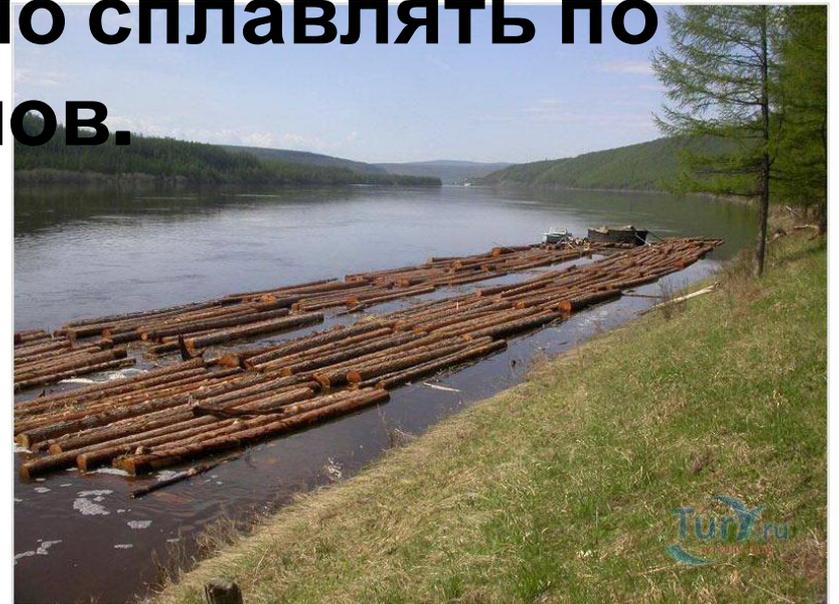
$$V = \frac{2HR^2\left(\frac{5H}{6}\right)^5}{6H} = \frac{2R^2H^5}{6^5}.$$

Ответ: при  $\frac{H}{6}$ ,  $V_{max} = \frac{2R^2H^5}{6^5}$ .

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕК. СПЛАВ ЛЕСА.

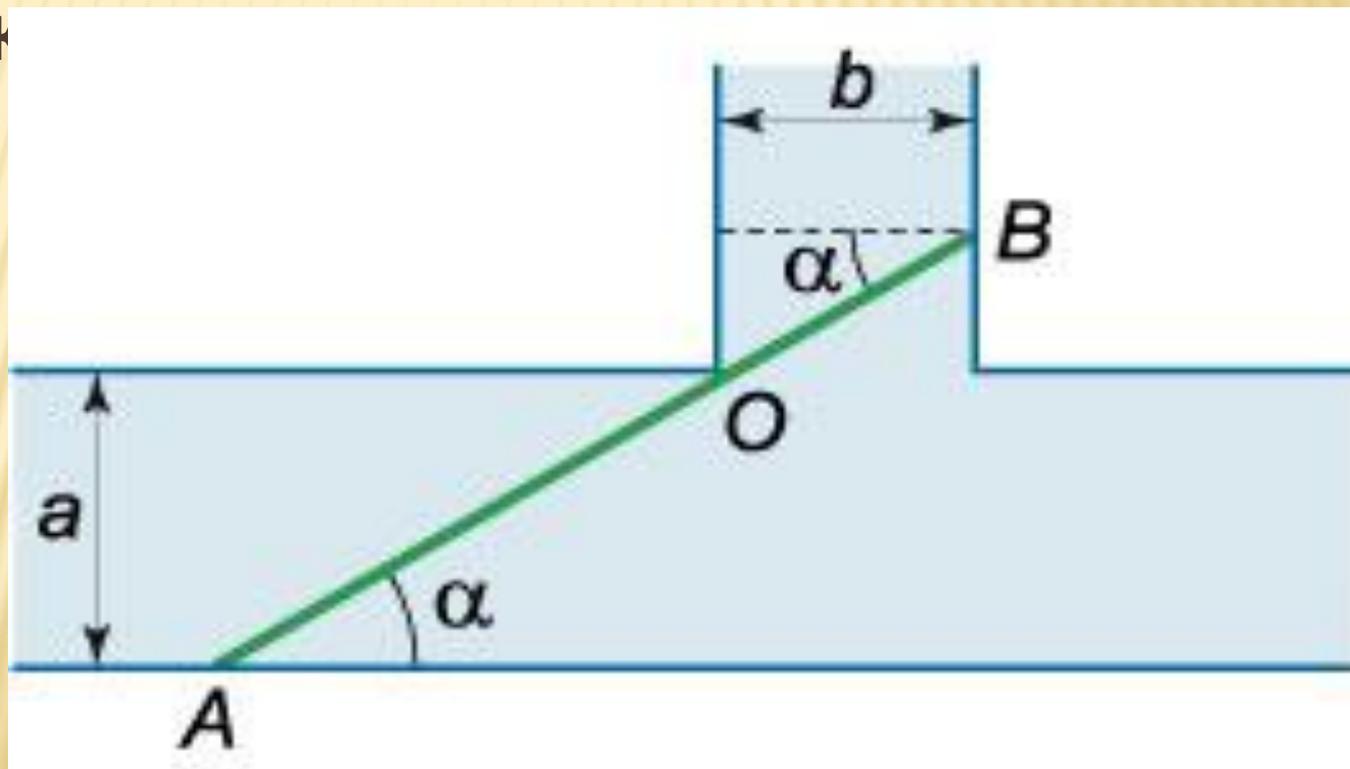
---

**4. Два канала шириной  $a$  и  $b$  соединяются друг с другом под прямым углом. Определить наибольшую длину бревен, которые можно сплавлять по данной системе каналов.**



# РЕШЕНИЕ:

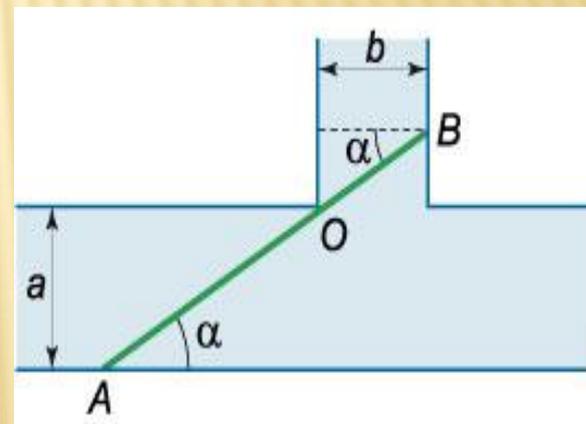
Опыт показывает, что возможность сплава зависит от длины бревна и от ширины к



# ПОСТРОИМ МАТЕМАТИЧЕСКУЮ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ

Пусть положение бревна описывается углом  $\alpha$ , как показано на рисунке. Максимально возможная длина бревна  $L$  зависит от угла  $\alpha$ :

$$L = |AO| + |OB| = \frac{a}{\sin \alpha} + \frac{b}{\cos \alpha} = L(\alpha).$$



Находим производную функции  $L(\alpha)$ :

$$L'(\alpha) = \left(-\frac{a}{\sin^2 \alpha}\right) \cdot \cos \alpha - \frac{b}{\cos^2 \alpha} \cdot (-\sin \alpha)$$

□  $\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$  - критическая точка функции.

---

Можно убедиться, что при переходе через данное критическое значение  $\alpha$  производная меняет знак с минуса на плюс, т.е. найденная точка является точкой минимума функции  $L(\alpha)$ .

Ясно, что длина бревна должна быть меньше указанного значения, чтобы осуществить поворот из одного канала в другой.

Теперь можно записать окончательное выражение для максимально возможной длины бревна:

$$L_{\max} = \left( a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Ответ:  $L_{\max} = \left( a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}.$

# ВЫВОД:

---

- 1) Знание нестандартных методов и приёмов решения задач способствует развитию нового, нешаблонного мышления, которое можно успешно применять в различных сферах человеческой деятельности.**
- 2) Производная помогает нам успешно решать не только математические задачи, но и задачи практического характера в разных областях науки и техники.**
- 3) Среди многих задач, решаемых с помощью производной, наиболее важной является задача нахождения экстремума функции и связанная с ней задача нахождения наибольшего (наименьшего) значения соответствующих функций.**