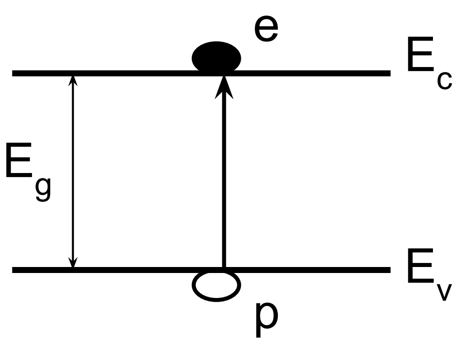
Равновесная статистика носителей в полупроводниках

I) **Собственный полупроводник** (нет легирующих примесей)



$$\overline{N}_{n,c}=\overline{N}_{p,v}\Rightarrow F(T,\text{пар-ры зон})$$

$$\overline{N}_{n,c}=\sum_{\mathbf{k},\sigma}N_F\left(\frac{E_{c,\mathbf{k},\sigma}-F}{T}\right);\quad N_F(x)=\frac{1}{\exp(x)+1}$$

$$N_F\left(\frac{\varepsilon-F}{T}\right)-\textit{среднее число электронов в одночастичном ссостояни сс энергий } \varepsilon$$

$$1-N_F\left(\frac{\varepsilon-F}{T}\right)-\textit{среднее число дырок в одночастичном состоянии с энергией } \varepsilon$$

$$\overline{N}_{p,v}=\sum_{\mathbf{k},\sigma}\left[1-N_F\left(\frac{E_{v,\mathbf{k},\sigma}-F}{T}\right)\right]=\sum_{\mathbf{k},\sigma}N_F\left(\frac{-E_{v,\mathbf{k},\sigma}+F}{T}\right)$$

Для простоты и наглядности считаем зоны невырожденнымы параболическими и изотропными

$$\textit{зона проводимости}:\quad E_{c,\mathbf{k},\sigma}=E_c+\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)};\quad \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}=\frac{\hbar^2k^2}{2m_n}$$

$$\textit{валентная зона}:\quad E_{v,\mathbf{k},\sigma}=E_v-\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(p)};\quad \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(p)}=\frac{\hbar^2k^2}{2m_p};\quad m_p=|m_n|>0$$

Считаем среднее число электронов в валентной зоне

$$\overline{N}_{n,c} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} N_F\left(\frac{E_{c,\mathbf{k},\sigma} - F}{T}\right) = \sum_{\mathbf{k},\sigma} N_F\left(\frac{E_c + \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)} - F}{T}\right) = \sum_{\mathbf{k},\sigma} N_F\left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)} - \xi}{T}\right)$$

$\xi \equiv F - E_c$ - Уровень Ферми, отсчитанный от дна зоны проводимости

$$\overline{N}_{n,c} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \int d\varepsilon \delta\left(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}\right) N_F\left(\frac{\varepsilon - \xi}{T}\right) = \int d\varepsilon g_c(\varepsilon) N_F\left(\frac{\varepsilon - \xi}{T}\right)$$

$g_c(\varepsilon) = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \delta\left(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}\right)$ - Плотность одноэлектронных стационарных состояний

$$g_c(\varepsilon) = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}) = \left[\sum_{\sigma=\pm 1/2} 1\right] \cdot \left[\sum_{\mathbf{k}} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)})\right] = 2\sum_{\mathbf{k}} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}) = 2\frac{V}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}) =$$

$$= 2\frac{V}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \delta\left(\varepsilon - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n}\right) = 2\frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{+\infty} dk k^2 \delta\left(\varepsilon - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n}\right)$$

Замена переменной $x \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n}$

$$g_c(\varepsilon) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m_n}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^{+\infty} dx \sqrt{x} \delta(x - \varepsilon) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \begin{cases} \sqrt{\varepsilon}, & \varepsilon > 0 \\ 0. & \varepsilon \le 0 \end{cases} =$$

$$= \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m_n}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \sqrt{\varepsilon} \begin{cases} 1, & \varepsilon > 0 \\ 0 & \varepsilon \le 0 \end{cases} = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m_n}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot \theta(\varepsilon)$$

$$n = \frac{N_{n,c}}{V} = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\left(\frac{m_n}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^{+\infty} d\varepsilon \, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\exp\left(\dfrac{\varepsilon - \xi}{T}\right) + 1}$$

$$\overline{N}_{p,v} = \sum_{\mathbf{k},\sigma}\left[1 - N_F\left(\frac{E_{v,\mathbf{k},\sigma} - F}{T}\right)\right] = \sum_{\mathbf{k},\sigma} N_F\left(\frac{-E_{v,\mathbf{k},\sigma} + F}{T}\right) = \sum_{\mathbf{k},\sigma} N_F\left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(p)} + F - E_v}{T}\right) = \sum_{\mathbf{k},\sigma} N_F\left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(p)} + E_g + \xi}{T}\right)$$

$$F - E_v = F - E_c + E_c - E_v = E_g + \xi$$

$$\overline{N}_{p,v} = \int d\varepsilon g_c(\varepsilon) N_F\left(\frac{\varepsilon - \xi}{T}\right);$$

Плотность состояний в валентной зоне $g_v(\varepsilon) = \sum_{\mathbf{k},\sigma}\delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(p)}); \quad \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(p)} = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m_p}$

Плотность состояний в зоне проводимости $g_c(\varepsilon) = \sum_{\mathbf{k},\sigma}\delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}); \quad \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)} = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m_n}$

Если $m_n \to m_p$, *то* $g_c(\varepsilon) \to g_v(\varepsilon) \Rightarrow g_v(\varepsilon) = \dfrac{V\sqrt{2}}{\pi^2}\left(\dfrac{m_n}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot \theta(\varepsilon)$

$$p = \frac{N_{p,v}}{V} = \frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\left(\frac{m_p}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^{+\infty} d\varepsilon \, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\exp\left(\dfrac{\varepsilon + E_g + \xi}{T}\right) + 1}$$

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\left(\frac{m_n}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^{+\infty} d\varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\exp\left(\dfrac{\varepsilon-\xi}{T}\right)+1} \\ p &= \frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\left(\frac{m_p}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^{+\infty} d\varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\exp\left(\dfrac{\varepsilon+E_g+\xi}{T}\right)+1} \end{aligned}\right\} \to n = p$$

$$\int_0^{+\infty} d\varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\exp\left(\dfrac{\varepsilon-\xi}{T}\right)+1} = \left(\frac{m_p}{m_n}\right)^{3/2}\int_0^{+\infty} d\varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\exp\left(\dfrac{\varepsilon+E_g+\xi}{T}\right)+1} \Rightarrow F\left(T, E_g, \frac{m_p}{m_n}\right)$$

- Именно отношение масс

Во многих важных для практики ситуациях m_p/m_n~1-10.

В самом грубом приближении $m_p=m_n$

$$\int_0^{+\infty} d\varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\exp\left(\dfrac{\varepsilon-\xi}{T}\right)+1} = \left(\frac{m_p}{m_n}\right)^{3/2}\int_0^{+\infty} d\varepsilon \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\exp\left(\dfrac{\varepsilon+E_g+\xi}{T}\right)+1} \Rightarrow \xi = F - E_c = -\frac{E_g}{2}$$

Уровень Ферми находится в запрещенной зоне!!!

Для электроники наиболее важны невырожденные полупроводники: величина щели столь велика, что при рабочих температурах уровень Ферми лежит в запрещенной зоне и отстоит от краев зон на несколько kT. Тогда

$$\exp\left(-\frac{\xi}{T}\right)>>1\Rightarrow N_F=\frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon-\xi}{T}\right)+1}\approx\exp\left(\frac{\xi}{T}\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{T}\right)$$

- распределение Больцмана

$$\left.\begin{aligned}
n&=\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\left(\frac{m_n}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^{+\infty}d\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{T}\right)\cdot\exp\left(\frac{\xi}{T}\right)\\
p&=\frac{\sqrt{2}}{\pi^2}\left(\frac{m_p}{\hbar^2}\right)^{3/2}\int_0^{+\infty}d\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{T}\right)\cdot\exp\left(-\frac{E_g+\xi}{T}\right)
\end{aligned}\right\}$$

$$\int_0^{+\infty}d\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{T}\right)=\left\{x\equiv\sqrt{\frac{\varepsilon}{T}}\right\}=2T^{3/2}\cdot\int_0^{+\infty}dx x^2\exp(-x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}T^{3/2}$$

$$\left.\begin{aligned}
n&=2\left(\frac{m_nT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\cdot\exp\left(\frac{\xi}{T}\right)\\
p&=2\left(\frac{m_pT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\cdot\exp\left(-\frac{E_g+\xi}{T}\right)
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} n &= 2\left(\frac{m_n T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(\frac{\xi}{T}\right) \\ p &= 2\left(\frac{m_p T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{E_g+\xi}{T}\right) \end{aligned}\right\} \rightarrow n = p$$

$$\exp\left(\frac{2\xi}{T}\right) = \exp\left(-\frac{E_g}{T}\right)\cdot\left(\frac{m_p}{m_n}\right)^{3/2} \Rightarrow \xi = -\frac{E_g}{2} + \frac{3}{4} T \ln\left(\frac{m_p}{m_n}\right)$$

Зависимость от эффективных масс слабая (логарифмическая) => тепловой член порядка T

$$\frac{m_p}{m_n} > 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{m_p}{m_n}\right) > 0 \Rightarrow \xi > -\frac{E_g}{2}$$ - Смещается в сторону зоны провод.

$$\frac{m_p}{m_n} < 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{m_p}{m_n}\right) < 0 \Rightarrow \xi < -\frac{E_g}{2}$$ - Смещается в сторону валентн. зоны

Уровень Ферми смещается в ту сторону, где меньше плотность состояний

$$\xi = -\frac{E_g}{2} + \frac{3}{4} T \ln\left(\frac{m_p}{m_n}\right) \to \begin{cases} n = 2\left(\dfrac{m_n T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(\dfrac{\xi}{T}\right) \\ p = 2\left(\dfrac{m_p T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(-\dfrac{E_g + \xi}{T}\right) \end{cases}$$

$$n = p = n_T^{(0)} \exp\left(-\frac{E_g}{2T}\right)$$

$$n_T^{(0)} = \frac{\left(2\pi\sqrt{m_n m_p}\right)^{3/2}}{4\pi^3\hbar^3}$$

Порядка концентрации, соответствующей одной частице на объем λ^3, где λ – длина дебройлевской волны электрона (дырки)

$$\left.\begin{array}{l} j = \sigma E \\ \sigma \propto n \end{array}\right| \Rightarrow \sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{E_g}{2T}\right)$$

- Активационный характер проводимости

В зоне проводимости Si и Ge изоэнергетические поверхности – эллипсоиды. Их центры не совпадают с центом зоны Бриллюэна => в зоне проводимости есть несколько эквивалентных минимумов с законом дисперсии

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)} = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_{n,x}} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m_{n,y}} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_{n,z}}$$

$$g_c(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{\mathbf{k},\sigma} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}) = 2\sum_{i=1}^{\nu} \sum_{\mathbf{k}} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}) = 2\frac{V}{(2\pi)^3} \sum_{i=1}^{\nu} \int dk_x dk_y dk_z \delta\left(\varepsilon - \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_{n,x}} - \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m_{n,y}} - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_{n,z}} \right)$$

Переходим к новым переменным $k'_x = \dfrac{k_x}{\sqrt{m_{n,x}}}; k'_y = \dfrac{k_y}{\sqrt{m_{n,y}}}; k'_z = \dfrac{k_z}{\sqrt{m_{n,x}}}$

$$\frac{D(k_x, k_y, k_z)}{D(k'_x, k'_y, k'_z)} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial k_x}{\partial k'_x} & \dfrac{\partial k_x}{\partial k'_y} & \dfrac{\partial k_x}{\partial k'_z} \\ \dfrac{\partial k_y}{\partial k'_x} & \dfrac{\partial k_y}{\partial k'_y} & \dfrac{\partial k_y}{\partial k'_z} \\ \dfrac{\partial k_z}{\partial k'_x} & \dfrac{\partial k_z}{\partial k'_y} & \dfrac{\partial k_z}{\partial k'_z} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \sqrt{m_{n,x}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{m_{n,y}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{m_{n,z}} \end{matrix} \right\| = \sqrt{m_{n,x} m_{n,y} m_{n,z}}$$

$$g_c(\varepsilon) = \nu \cdot \frac{2V}{(2\pi)^3} \int dk'_x dk'_y dk'_z \left| \frac{D(k_x, k_y, k_z)}{D(k'_x, k'_y, k'_z)} \right| \delta\left(\varepsilon - \frac{\hbar^2 k'^2_x}{2} - \frac{\hbar^2 k'^2_y}{2} - \frac{\hbar^2 k'^2_z}{2} \right) =$$

$$= \nu \sqrt{m_{n,x} m_{n,y} m_{n,z}} \cdot \frac{2V}{(2\pi)^3} \int dk'_x dk'_y dk'_z \delta\left(\varepsilon - \frac{\hbar^2 k'^2_x}{2} - \frac{\hbar^2 k'^2_y}{2} - \frac{\hbar^2 k'^2_z}{2} \right)$$

$$\frac{g_c(\varepsilon)}{\nu \sqrt{m_{n,x} m_{n,y} m_{n,z}}} = \frac{2V}{(2\pi)^3} \int dk'_x dk'_y dk'_z \delta\left(\varepsilon - \frac{\hbar^2 k'^2}{2} \right)$$

- Плотность состояний для изотропного параболического закона дисперсии с единичной массой

$$g_c(\varepsilon) = \frac{V\sqrt{2}}{\pi^2} \left(\frac{\nu \sqrt{m_{n,x} m_{n,y} m_{n,z}}}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot \theta(\varepsilon)$$

Изотропный параболический закон дисперсии)

$$g_c(\varepsilon) = \frac{V\sqrt{2}}{\pi^2}\left(\frac{m_n}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot \theta(\varepsilon)$$

Элипсоидальный закон дисперсии (Si и Ge)

$$g_c(\varepsilon) = \frac{V\sqrt{2}}{\pi^2}\left(\frac{m_{n,d}}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot \theta(\varepsilon)$$

$$m_{n,d} \equiv \nu\sqrt{m_{n,x} m_{n,y} m_{n,z}}$$

- Эффективная масса плотности состояний (вводится для того, чтобы выражение для сложного закона дисперсии совпадало по форме с выражением для изотропного параболического закона дисперсии)

$$n = 2\left(\frac{m_n T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(\frac{\xi}{T}\right)$$

- Тот же самый вид, что и для простого изотропного параболического закона дисперсии только с другой массой (массой плотности состояний)

Закон дисперсии дырки вблизи максимума валентной зоны Si и Ge

$$\varepsilon_{i,\mathbf{k}}^{(p)} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} \Phi_i(\theta, \varphi);$$ i – нумерует ветви (тяжелые и легкие дырки)

$$g_v(\varepsilon) = \sum_{i,\mathbf{k},\sigma} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{i,\mathbf{k}}^{(p)}) = 2\frac{V}{(2\pi)^3} \sum_i \int d\Omega \int_0^{+\infty} dk k^2 \delta\left(\varepsilon - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} \Phi_i(\theta, \varphi) \right)$$

Замена переменной $x \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m_0} \Phi_i(\theta, \varphi)$

$$g_c(\varepsilon) = \frac{V\sqrt{2}}{4\pi^3 \hbar^3} m_0^{3/2} \sum_i \int d\Omega \Phi^{-3/2}(\theta, \varphi) \int_0^{+\infty} dx \sqrt{x} \delta(x - \varepsilon) = \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \begin{cases} \sqrt{\varepsilon}, & \varepsilon > 0 \\ 0. & \varepsilon \le 0 \end{cases} =$$

$$= \frac{V\sqrt{2}}{\pi^2 \hbar^3} \cdot \left[\frac{m_0^{3/2}}{4\pi} \sum_i \int d\Omega \Phi^{-3/2}(\theta, \varphi) \right] \cdot \sqrt{\varepsilon} \cdot \theta(\varepsilon)$$

$$m_{d,p} = m_0 \left[\frac{1}{4\pi} \sum_i \int d\Omega \Phi^{-3/2}(\theta, \varphi) \right]^{2/3}$$ - Эффективная масса плотности состояний для дырок

$$p = 2\left(\frac{m_{d,p} T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{E_g + \xi}{T} \right)$$ - То же самое выражение, что и для простого изотропного параболического закона дисперсии, только с другой массой (массой плотности состояний)

$$\left.\begin{aligned} n &= 2\left(\frac{m_{d,n}T}{2\pi\hbar^{2}}\right)^{3/2}\cdot\exp\left(\frac{\xi}{T}\right) \\ p &= 2\left(\frac{m_{d,p}T}{2\pi\hbar^{2}}\right)^{3/2}\cdot\exp\left(-\frac{E_g+\xi}{T}\right) \end{aligned}\right\} \to n = p \Rightarrow \xi = -\frac{E_g}{2}+\frac{3}{4}T\ln\left(\frac{m_{d,p}}{m_{d,n}}\right)$$

$$n = p = n_T^{(0)}\exp\left(-\frac{E_g}{2T}\right); \quad n_T^{(0)} = \frac{\left(2\pi\sqrt{m_{d,n}m_{d,p}}\right)^{3/2}}{4\pi^{3}\hbar^{3}}$$

$$m_{n,d} \equiv \nu\sqrt{m_{n,x}m_{n,y}m_{n,z}}; \quad m_{d,p} = m_0\left[\frac{1}{4\pi}\sum_i\int d\Omega\Phi^{-3/2}(\theta,\varphi)\right]^{2/3}$$

Введение эффективных масс плотноси состояний позволило записать выражения для уровня Ферми и равновесных концентраций носителей в том же виде, что и в случае простого изотропного параболического закона дисперсии

В случае произвольного закона дисперсии эффективная масса плотности состояний вводится таким образом, чтобы через нее выражение для концентрации носителей выглядело также, как и в случае простого изотропного параболического закона дисперсии

$$g(\varepsilon) = \frac{2V}{(2\pi)^3}\int d\mathbf{k}\,\delta\left(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{k}}\right)$$

Все k-пространство можно исчерпать, сначала интегрируя по изоэнергетическим поверхностям, а затем суммируя эти поверхности

$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon'$ - Изоэнергетическая поверхность

dS - Элементарная площадь изоэнергетической поверхности

η - Координата, неизменная на изоэнергетической поверхности

$d\varepsilon' = \mathbf{v}\cdot\nabla\varepsilon_{\mathbf{k}}\big|_{\varepsilon_{\mathbf{k}}=\varepsilon'}d\eta;$ $\mathbf{v}$ - Нормаль к изоэнергетический поверхности

$$\mathbf{v}\cdot\nabla\varepsilon_{\mathbf{k}}\big|_{\varepsilon_{\mathbf{k}}=\varepsilon'} = \left|\nabla\varepsilon_{\mathbf{k}}\right|_{\varepsilon_{\mathbf{k}}=\varepsilon'} \Rightarrow d\eta = \frac{d\varepsilon'}{\left|\nabla\varepsilon_{\mathbf{k}}\right|_{\varepsilon_{\mathbf{k}}=\varepsilon'}}$$

$$d\mathbf{p} = dSd\eta = \frac{dS(\varepsilon')d\varepsilon'}{\left|\nabla\varepsilon_{\mathbf{k}}\right|_{\varepsilon_{\mathbf{k}}=\varepsilon'}}$$

$$g(\varepsilon) = \frac{2V}{(2\pi)^3}\int d\varepsilon'\delta\left(\varepsilon - \varepsilon'\right)\int\frac{dS(\varepsilon')}{\left|\nabla\varepsilon_{\mathbf{k}}\right|_{\varepsilon_{\mathbf{k}}=\varepsilon'}} = \frac{2V}{(2\pi)^3}\int\frac{dS(\varepsilon)}{\left|\nabla\varepsilon_{\mathbf{k}}\right|_{\varepsilon_{\mathbf{k}}=\varepsilon}}$$

$$g(\varepsilon)=\frac{2V}{(2\pi)^3}\int\frac{dS(\varepsilon)}{\left|\nabla\varepsilon_{\mathbf{k}}\right|_{\varepsilon_{\mathrm{k}}=\varepsilon}}\rightarrow n=\frac{1}{V}\int d\varepsilon g(\varepsilon)N_F\left(\frac{\varepsilon-\xi}{T}\right)$$

$$n=\frac{2}{(2\pi)^3}\int d\varepsilon\int\frac{dS(\varepsilon)}{\left|\nabla\varepsilon_{\mathbf{k}}\right|_{\varepsilon_{\mathrm{k}}=\varepsilon}}N_F\left(\frac{\varepsilon-\xi}{T}\right)$$

невырожденный полупроводник $\quad N_F\left(\frac{\varepsilon-\xi}{T}\right)\approx\exp\left(\frac{\xi}{T}\right)\left(-\frac{\varepsilon}{T}\right)$

$$n=\frac{1}{4\pi^3}\int d\varepsilon\int\frac{dS(\varepsilon)}{\left|\nabla\varepsilon_{\mathbf{k}}\right|_{\varepsilon_{\mathrm{k}}=\varepsilon}}\left(-\frac{\varepsilon}{T}\right)\cdot\exp\left(\frac{\xi}{T}\right)$$

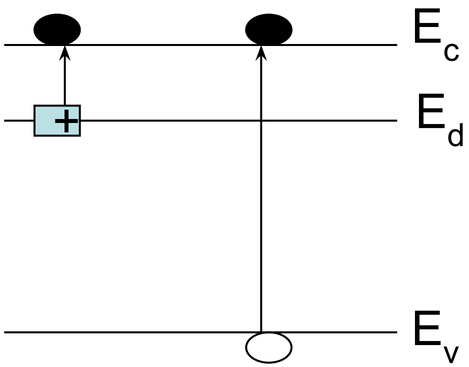
Нужно записать в виде $\quad n=2\left(\frac{m_{d,n}T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\cdot\exp\left(\frac{\xi}{T}\right)$

$$m_{d,n}^{3/2}=\frac{1}{4\pi^3}\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{T}\right)^{3/2}\int d\varepsilon\int\frac{dS(\varepsilon)}{\left|\nabla\varepsilon_{\mathbf{k}}\right|_{\varepsilon_{\mathrm{k}}=\varepsilon}}\left(-\frac{\varepsilon}{T}\right)$$

$$m_{d,n}=\frac{\hbar^2}{2\pi T}\left[\int d\varepsilon\int\frac{dS(\varepsilon)}{\left|\nabla\varepsilon_{\mathbf{k}}\right|_{\varepsilon_{\mathrm{k}}=\varepsilon}}\left(-\frac{\varepsilon}{T}\right)\right]^{2/3}$$

В произвольном случае эффективная масса плотности состояний зависит от температуры

2) **Полупроводник n-типа** (легирован донорами)



Электроны попадают в зону проводимости:

1) За счет переходов из валентой зоны (разрыв валентной связи). В валентной зоне образуются дырки.
2) За счет переходов с донорных уровней (электрон отрывается от донора). Донор становится положительно заряженным ионом

Уравнение на уровень Ферми – условие электронейтральности

Число электронов в зоне проводимости = число дырок в валентной зоне + число вакантных мест на примесных уровнях

Рассматриваем невырожденный полупроводник

$$n = 2\left(\frac{m_n T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(\frac{\xi}{T}\right)$$

$$p = 2\left(\frac{m_p T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{E_g + \xi}{T}\right)$$

Надо найти число вакантных мест на донорных уровнях

$$N_D^+ = \nu \cdot N_D - \overline{N}_{n,d}$$

Электроны на донорных уровнях можно рассматривать как систему с переменным числом частиц, которая находится в равновесии с валентными электронами и электронами проводимости и кристаллической решеткой.

Электроны, локализованные на примесях, нельзя считать невзаимодействующими => нельзя использовать распределение Ферми-Дирака.

Нужно использовать общий подход – считать стат сумму

$\varepsilon_{j,N_j,n(N_j)}$ - Энергия N_j электронов на j-ой примеси

$$E\left(\left\{j, N_j, n(N_j)\right\}\right) = \sum_j \varepsilon_{j,N_j,n(N_j)}; \quad N\left(\left\{j, N_j, n(N_j)\right\}\right) = \sum_j N_j$$

$$Z = \sum_{\left\{j,N_j,n(N_j)\right\}} \exp\left(- \frac{E\left(\left\{j, N_j, n(N_j)\right\}\right) - FN\left(\left\{j, N_j, n(N_j)\right\}\right)}{T} \right) =$$

$$= \sum_{N_1} \sum_{n(N_1)} \sum_{N_2} \sum_{n(N_2)} \ldots \prod_{j=1}^{N_D} \exp\left(- \frac{\varepsilon_{j,N_j,n(N_j)} - F \cdot N_j}{T} \right) = \prod_{j=1}^{N_D} \sum_{N_j=0}^{\nu} \sum_{n(N_j)} \exp\left(- \frac{\varepsilon_{j,N_j,n(N_j)} - F \cdot N_j}{T} \right)$$

$$Z = \prod_{j=1}^{N_d} z_j; \quad z_j = \sum_{N_j=0}^{\nu} \sum_{n(N_j)} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{j,N_j,n(N_j)} - F \cdot N_j}{T} \right)$$

$$\Omega = -T \ln Z; \quad \overline{N}_{n,d} = -\frac{\partial \Omega}{\partial F}$$

Считаем, доноры одинаковыми

$$Z = z^{N_D}$$

Рассматриваем однозарядные доноры (на доноре может локализоваться только один электрон)

$$z = \sum_{N_j=0}^{1} \sum_{n(N_j)} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{N_j,n(N_j)} - F \cdot N_j}{T} \right) = \sum_n 1 + \sum_n \exp\left(-\frac{\varepsilon_n - F}{T} \right)$$

$g_0 = \sum_n 1$ - из-за большого радиуса сильно возбужденных состояний суммирование происходит по конечному числу состояний

Примесный спектр – дискретный. Пронумеруем уровни энергии натуральным числом m

$z = g_0 + \sum_m \beta_m \exp\left(-\frac{\varepsilon_m - F}{T} \right); \quad \beta_m$ - Кратность вырождения m-го уровня энергии

$$z = g_0 + g_1 \exp\left(-\frac{\varepsilon_D - F}{T}\right);$$

$$g_1 = \beta_1 + \sum_m \beta_m \exp\left(-\frac{\varepsilon_m - \varepsilon_1}{T}\right)$$

$$\Omega = -T\ln Z = -TN_D \ln z = -TN_D \ln\left[g_0 + g_1 \exp\left(-\frac{\varepsilon_1 - F}{T}\right)\right]$$

$$\overline{N}_{n,D} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu} = \frac{N_D}{\frac{g_0}{g_1}\exp\left(\frac{\varepsilon_1 - F}{T}\right) + 1};$$

Число заряженных доноров

$$N_D^+ = N_D - \overline{N}_{n,D} = \frac{N_D}{\gamma_D(T)\exp\left(-\frac{\varepsilon_1 - F}{T}\right) + 1}; \quad \gamma_D(T) = \frac{g_1}{g_0}$$ - Фактор вырождения донора

Отсчитываем энергию от дна зоны проводимости

$$\varepsilon_D \equiv -\varepsilon_1 > 0; \quad N_D^+ = \frac{N_D}{\gamma_D(T)\exp\left(\frac{\varepsilon_D + \xi}{T}\right) + 1}$$

Для наглядности пренебрежем возбужденными состояниями и вырождением уровней

$$g_0 = 1; \quad g_1 = \beta_1 = 1 \Rightarrow \gamma_D = 1 \Rightarrow N_D^+ = \frac{N_D}{\exp\left(\frac{\varepsilon_D + \xi}{T}\right) + 1}$$

$$\left.\begin{aligned}
&n = 2\left(\frac{m_n T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(\frac{\xi}{T}\right) \\
&p = 2\left(\frac{m_p T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{E_g + \xi}{T}\right) \\
&n_D^+ = \frac{n_D}{\exp\left(\frac{\varepsilon_D + \xi}{T}\right) + 1}
\end{aligned}\right\} \to n = p + n_D^+$$

$$2\left(\frac{m_n T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} A = 2\left(\frac{m_p T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{A}\exp\left(-\frac{E_g}{T}\right) + \frac{n_D}{A\exp\left(\frac{\varepsilon_D}{T}\right) + 1}; \quad A \equiv \exp\left(\frac{\xi}{T}\right) >> 1$$

Для широкозонного полупроводника $E_g >> \varepsilon_D$

$$2\left(\frac{m_n T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} A\left[A\exp\left(\frac{\varepsilon_D}{T}\right) + 1\right] = n_D$$

$$2\left(\frac{m_n T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} A\left[A\exp\left(\frac{\varepsilon_D}{T}\right)+1\right]=n_D;\ A=\exp\left(\frac{\xi}{T}\right)<<1$$

$$a)\ A\exp\left(\frac{\varepsilon_D}{T}\right)>>1\Rightarrow \varepsilon_D>>T$$

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_n T}\right)^{3/4}\cdot\sqrt{n_D}\cdot\exp\left(-\frac{\varepsilon_D}{2T}\right)$$

$$\xi=-\frac{\varepsilon_D}{2}+\frac{1}{2}T\ln\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_n T}\right)^{3/2}\cdot n_D\right]$$

Обычно множитель во втором слагаемом порядка 1 => второе слагаемое порядка T. Химический потенциал проходит между дном зоны проводимости и основным донорным уровнем

$$n=2\left(\frac{m_n T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} A=2\left(\frac{m_n T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_n T}\right)^{3/4}\cdot\exp\left(-\frac{\varepsilon_D}{2T}\right)\cdot\sqrt{n_D}\propto\sqrt{n_D}$$

$$2\left(\frac{m_n T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} A\left[A\exp\left(\frac{\varepsilon_D}{T}\right)+1\right]=n_D\,;\; A=\exp\left(\frac{\xi}{T}\right)<<1$$

$$a)\; A\exp\left(\frac{\varepsilon_D}{T}\right)<<1\Rightarrow \varepsilon_D <\propto T$$

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_n T}\right)^{3/2} n_D$$

$$\xi = T\ln\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_n T}\right)^{3/2}\cdot n_D\right]$$ - Расположен ниже донорного уровня

$$n=2\left(\frac{m_n T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} A = n_D$$ - Все доноры ионизованны

$$\left.\begin{array}{l}
n = 2\left(\dfrac{m_n T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\cdot\exp\left(\dfrac{\xi}{T}\right)\\[2ex]
p = 2\left(\dfrac{m_p T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\cdot\exp\left(-\dfrac{E_g+\xi}{T}\right)\\[2ex]
n_{соб} = p_{соб} = n_T^{(0)} = \dfrac{\left(2\pi\sqrt{m_{d,n}m_{d,p}}\right)^{3/2}}{4\pi^3\hbar^3}\exp\left(-\dfrac{E_g}{2T}\right)
\end{array}\right| \Rightarrow np = n_{соб}^2$$

Теплоемкость носителей заряда в полупроводниках

Рассматриваем невырожденный собственный полупроводник с простым изотропным параболическим законом дисперсии

$$\textit{зона проводимости}: \quad E_{c,\mathbf{k},\sigma} = E_c + \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)}; \quad \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(n)} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_n}$$

$$\textit{валентная зона}: \quad E_{v,\mathbf{k},\sigma} = E_v - \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(p)}; \quad \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(p)} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_p}; \quad m_p = |m_n| > 0$$

$$E = \sum_{k,\sigma} \frac{E_{c,\mathbf{k},\sigma}}{\exp\left(\frac{E_{c,\mathbf{k},\sigma} - F}{T}\right) + 1} + \sum_{k,\sigma} \frac{E_{v,\mathbf{k},\sigma}}{\exp\left(\frac{E_{v,\mathbf{k},\sigma} - F}{T}\right) + 1} =$$

$$= \sum_{k,\sigma} \frac{E_{c,\mathbf{k},\sigma}}{\exp\left(\frac{E_{c,\mathbf{k},\sigma} - F}{T}\right) + 1} + \sum_{k,\sigma} \left(-E_{v,\mathbf{k},\sigma}\right) \left[1 - \frac{1}{\exp\left(\frac{E_{v,\mathbf{k},\sigma} - F}{T}\right) + 1} - 1\right]$$

$$= \sum_{k,\sigma} \frac{E_{c,\mathbf{k},\sigma}}{\exp\left(\frac{E_{c,\mathbf{k},\sigma} - F}{T}\right) + 1} + \sum_{k,\sigma} \left(-E_{v,\mathbf{k},\sigma}\right) \left[1 - \frac{1}{\exp\left(\frac{E_{v,\mathbf{k},\sigma} - F}{T}\right) + 1}\right] + \sum_{k,\sigma} E_{v,\mathbf{k},\sigma}$$

$$E = E_0 + E_{n,c} + E_{p,v}$$

$$E_0 = \sum_{k,\sigma} E_{v,\mathbf{k},\sigma}$$ - Энергия полностью заполненной валентной зоны

$$E_{n,c} = \sum_{k,\sigma} \frac{E_{c,\mathbf{k},\sigma}}{\exp\left(\frac{E_{c,\mathbf{k},\sigma} - F}{T}\right) + 1}$$ - Энергия электронов проводимости

$$E_{p,v} = \sum_{k,\sigma} \left(-E_{v,\mathbf{k},\sigma}\right) \left[\frac{1}{\exp\left(\frac{-E_{v,\mathbf{k},\sigma} + F}{T}\right) + 1} \right]$$ - Энергия дырок

$$E = E_g N_{e,c} + \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m_n}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot I_3(\xi) + \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m_p}{\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot I_3(-\xi - E_g)$$

$$I_3(x) = \int_0^{+\infty} d\varepsilon \frac{\varepsilon^{3/2}}{\exp\left(\frac{\varepsilon - x}{\theta}\right) + 1}$$

Вырожденный электронный газ

$$I_3(x) = \int_0^{+\infty} d\varepsilon \varepsilon^{3/2} \exp\left(\frac{-\varepsilon + x}{T}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} T^{5/2} \exp\left(\frac{x}{T}\right)$$

$$E = \frac{\left(2\pi\sqrt{m_n m_p} T\right)^{3/2}}{4\pi^3 \hbar^3} \exp\left(-\frac{E_g}{2T}\right)\left(3T + E_g\right)$$

$$c_V = k_B n_T^0 \exp\left(-\frac{E_g}{2T}\right)\left[\frac{15}{2} + 3\left(\frac{E_g}{T}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{E_g}{T}\right)^2\right]$$

$$\textit{Наибольшее значение } c_V \approx k_B n_T^0 \textit{ при } T = E_g$$

$$c_V^{(L)} \approx k_B n_0 \Rightarrow \frac{c_V}{c_V^{(L)}} \approx \frac{n_T^0}{n_0} << 1$$

Электронно-дырочная теплоемкость в полупроводниках мала по сравнению с решеточной

Магнитные свойства электронно-дырочной подсистемы полупроводников

Одночастичные состояния в магнитном поле. Квантование Ландау

Рассматриваем электроны проводимости. Для наглядности считаем, закон дисперсии простым изотропным параболическим

$$E_c(p) = E_c + \frac{p^2}{2m^*}$$

$$\textit{В отсутсвие магнитного поля } \hat{H}_{B=0} = \frac{p^2}{2m^*}$$

$$\textit{При наличии магнитного поля } \mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$$

$$\hat{H}_{\mathbf{B}} = \hat{H}_{\mathbf{B}=0}\left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) + \Delta H$$

$$\Delta H = \frac{g\mu_B}{\hbar} B \cdot \hat{s}_z - \textit{взаимодействие собственного магнитного момента электрона с полем}$$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m^*c} - \textit{магнетон Бора; } \hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{g}{\hbar}\mu_B \hat{\mathbf{s}}; \textit{ для св. эл} - \textit{нов } g = 2; \textit{ В п/п может сильно меняться}$$

$$\textit{из} - \textit{за спин} - \textit{орбитального взаим. Для упрощения записей пусть } g = 2$$

$$\hat{H}_{\mathbf{B}} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + \frac{2\mu_B}{\hbar} B \cdot \hat{s}_z$$

$$\left[\hat{H}_{\mathbf{B}}, \hat{s}_z\right] = 0 \Rightarrow E \textit{ и } s_z - \textit{одновременно измермимы} \Rightarrow \textit{существует базис из общих собственных состояний}$$

В качестве одноэлектронного базиса берем ПОН из стационарных состояний с определенным значением проекции импульса

$$\begin{cases} \hat{H}_{\mathbf{B}}\Psi(\xi) = E\Psi(\xi) \\ \hat{s}_z\Psi(\xi) = \hbar\sigma\Psi(\xi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{H}_{\mathbf{B}}\Psi(\xi) = E\Psi(\xi) \\ \hat{s}_z\Psi(\xi) = \hbar\sigma\Psi(\xi) \end{cases}$$

$$\hat{s}_z\Psi(\xi) = \hbar\sigma\Psi(\xi) \Rightarrow \Psi(\xi) = \chi_\sigma(s_z)\psi(\mathbf{r}); \quad \hat{s}_z\chi_\sigma(s_z) = \hbar\sigma\chi_\sigma(s_z)$$

$$\Psi(\xi) = \chi_\sigma(s_z)\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \left\{\frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + \frac{2\mu_B}{\hbar}B\cdot\hat{s}_z\right\}\Psi(\xi) = E\Psi(\xi)$$

$$\left\{\frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + \mu_B B\cdot(2\sigma)\right\}\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

$$\hat{H}_{\mathbf{r}}\psi(\mathbf{r}) = \varepsilon\psi(\mathbf{r}); \quad \hat{H}_{\mathbf{r}} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2; \quad \varepsilon = E - \mu_B B\cdot(2\sigma)$$

$$\frac{1}{2m^*}\left(\hat{\mathbf{p}}-\frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi(\mathbf{r})=\varepsilon\psi(\mathbf{r});\quad \varepsilon=E-\mu_B B(2\sigma)$$

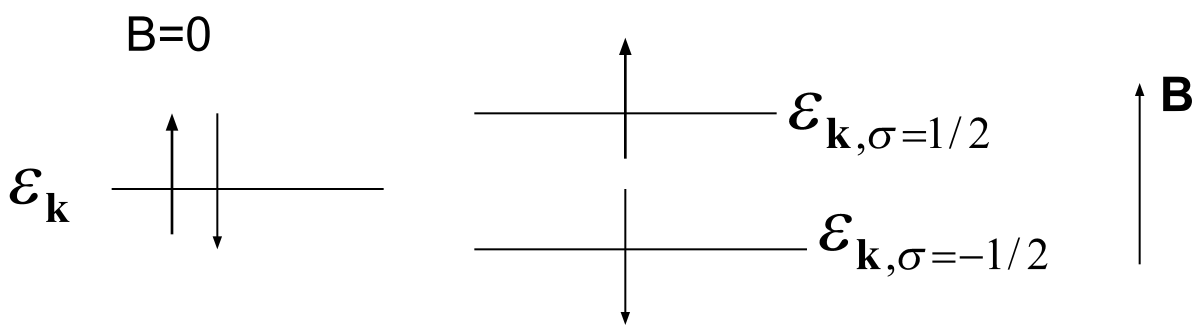
Пренебрежем вкладом $\frac{e}{c}\mathbf{A}$

$$\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m^*}\psi(\mathbf{r})=\varepsilon\psi(\mathbf{r})\Rightarrow\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})=\frac{\exp(i\mathbf{kr})}{\sqrt{V}};\ \varepsilon_{\mathbf{k}}=\frac{\hbar^2k^2}{2m^*}$$

$\Psi_{\mathbf{k},\sigma}(\xi)=\chi_\sigma(s_z)\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r});$ - Такая же как и в отсутствие магнитного поля

$E_{\mathbf{k},\sigma}=\varepsilon_{\mathbf{k}}+\mu_B B(2\sigma)\rightarrow\begin{cases}\varepsilon_{\mathbf{k}}-\mu_B B,\ \sigma=-1/2\\ \varepsilon_{\mathbf{k}}+\mu_B B,\ \sigma=1/2\end{cases}$ - Снялось вырождение по спину

Взаимодействие собственного магнитного момента электрона с магнитным полем не меняет волновую функцию электрона и приводит к спиновому расщеплению уровней (снятию вырождения по спину)



Учет $\frac{e}{c}\mathbf{A}$

Калибровка Ландау $\mathbf{A} = -By\mathbf{e}_x \rightarrow \nabla\mathbf{A} = 0$

$$\frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 \psi = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\left(\hat{\mathbf{p}}\psi + \frac{e}{c}\mathbf{A}\psi\right) =$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}}^2\psi + \frac{e}{c}\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{A}\psi) + \frac{e}{c}\mathbf{A}\hat{\mathbf{p}}\psi + \frac{e^2}{c^2}\mathbf{A}^2\psi\right)$$

$$\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{A}\psi) + \mathbf{A}\hat{\mathbf{p}}\psi = -i\hbar\left(\nabla(\mathbf{A}\psi) + \mathbf{A}\nabla\psi\right) = -i\hbar\left(\psi\nabla\mathbf{A} + 2\mathbf{A}\nabla\psi\right) = 2\mathbf{A}\hat{\mathbf{p}}\psi$$

$$\frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}}^2 + \frac{2e}{c}\mathbf{A}\hat{\mathbf{p}} + \frac{e^2}{c^2}\mathbf{A}^2\right) =$$

$$= \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \frac{eB}{mc}y\hat{p}_x + \frac{m}{2}\frac{e^2B^2}{m^2c^2}y^2$$

$$\hat{H}_{\mathbf{r}}\psi(\mathbf{r}) = \varepsilon\psi(\mathbf{r});$$

$$\hat{H}_{\mathbf{r}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \omega_c y\hat{p}_x + \frac{m\omega_c^2}{2}y^2; \quad \omega_c = \frac{eB}{mc}$$ - Циклотронная частота

$$\hat{H}_{\mathbf{r}}\psi(\mathbf{r}) = \varepsilon\psi(\mathbf{r}); \quad \hat{H}_{\mathbf{r}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} - \omega_c y\hat{p}_x + \frac{m\omega_c^2}{2}y^2; \quad \omega_c = \frac{eB}{mc}$$

$$\begin{cases} \left[\hat{H}_{\mathbf{r}}, \hat{p}_x\right] = 0 \\ \left[\hat{H}_{\mathbf{r}}, \hat{p}_z\right] = 0 \end{cases} \Rightarrow E, p_x, p_z - \textit{одновремен но измеримы}$$

Строим базис из стационарных состояний с определенными проекциями p_x и p_z

$$\begin{cases} \hat{H}_{\mathbf{r}}\psi(\mathbf{r}) = \varepsilon\psi(\mathbf{r}) \\ \hat{p}_x\psi(\mathbf{r}) = p_x\psi(\mathbf{r}) \\ \hat{p}_z\psi(\mathbf{r}) = p_z\psi(\mathbf{r}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{p}_x\psi(\mathbf{r}) = p_x\psi(\mathbf{r}) \\ \hat{p}_z\psi(\mathbf{r}) = p_z\psi(\mathbf{r}) \end{cases} \Rightarrow \psi(\mathbf{r}) = \frac{\exp(ik_x x)}{\sqrt{L}}\frac{\exp(ik_z z)}{\sqrt{L}}\varphi(y) \to \hat{H}_{\mathbf{r}}\psi(\mathbf{r}) = \varepsilon\psi(\mathbf{r})$$

$$\hat{H}_{\mathrm{r}}\psi(\mathbf{r})=\varepsilon\psi(\mathbf{r});\quad \hat{H}_{\mathrm{r}}=\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}-\omega_c y\hat{p}_x+\frac{m\omega_c^2}{2}y^2;\quad \omega_c=\frac{eB}{mc}$$

$$\psi(\mathbf{r})=\frac{\exp(ik_x x)}{\sqrt{L}}\frac{\exp(ik_z z)}{\sqrt{L}}\varphi(y)$$

$$\frac{\exp(ik_x x)}{\sqrt{L}}\frac{\exp(ik_z z)}{\sqrt{L}}\left\{\frac{\hat{p}_y^2\varphi(y)}{2m}-k_x\hbar\omega_c y\varphi(y)+\frac{m\omega_c^2}{2}y^2\varphi(y)+\frac{\hbar^2k_x^2}{2m}\varphi(y)+\frac{\hbar^2k_z^2}{2m}\varphi(y)-\varepsilon\varphi(y)\right\}\equiv 0$$

$$\left\{\frac{\hat{p}_y^2}{2m}+\frac{m\omega_c^2}{2}y^2-k_x\hbar\omega_c y+\frac{\hbar^2k_x^2}{2m}\right\}\varphi(y)=\left(\varepsilon-\frac{\hbar^2k_z^2}{2m}\right)\varphi(y)$$

$$\frac{m\omega_c^2}{2}y^2-k_x\hbar\omega_c y+\frac{\hbar^2k_x^2}{2m}=\frac{m\omega_c^2}{2}\left(y^2-\frac{2}{m\omega_c^2}k_x\hbar\omega_c y+\frac{2}{m\omega_c^2}\frac{\hbar^2k_x^2}{2m}\right)=$$

$$=\frac{m\omega_c^2}{2}\left(y^2-2k_x\frac{\hbar}{m\omega_c}y+\left(k_x\frac{\hbar}{m\omega_c}\right)^2\right)=\frac{m\omega_c^2}{2}\left(y-k_x\ell^2\right)^2;\quad \ell=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}}=\sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$$

$$\left\{\frac{\hat{p}_y^2}{2m}+\frac{m\omega_c^2}{2}\left(y-k_x\ell^2\right)^2\right\}\varphi(y)=\left(\varepsilon-\frac{\hbar^2k_z^2}{2m}\right)\varphi(y)-\text{ЛГО}$$

$$\varepsilon-\frac{\hbar^2k_z^2}{2m}=\hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right);\ \varepsilon=E-\mu_B B(2\sigma)\Rightarrow E=\frac{\hbar^2k_z^2}{2m}+\hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right)+\mu_B B(2\sigma)$$

$$\varphi_n(y)=\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}\,\ell}}\exp\left\{-\frac{y^2}{2\ell^2}\right\}H_n\left(\frac{y}{\ell}\right)$$

(σ, k_z, k_x, n) – Полный набор квантовых чисел одноэлектронных стац. сост.

$$\Psi_{(\sigma,k_z,k_x,n)}(\xi) = \chi_\sigma(s_z) \cdot \frac{\exp(ik_z z)}{\sqrt{L_z}} \cdot \frac{\exp(ik_x x)}{\sqrt{L_x}} \cdot \varphi_n\left(y - k_x \ell^2\right);$$

$$\varphi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}\, \ell}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2\ell^2}\right\} H_n\left(\frac{y}{\ell}\right)$$

$$E_{(\sigma,k_z,n)} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \hbar\omega_c(n + 1/2) + \mu_B B(2\sigma); \quad n = 0,1,2,\ldots \;;$$

$$\omega_c = \frac{|e|B}{mc}; \quad \ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{|e|B}}$$

Происходит квантование движения электрона в плоскости, перпендикулярной магнитному полю – квантование Ландау

Парамагнетизм Паули. Парамагнитный вклад электронов проводимости

Как на магнитных свойствах электронного газа сказывается взаимодействие собственного магнитного момента электрона с магнитным полем?

Пренебрегаем квантованием Ландау $$E_{\mathbf{k},\sigma} = \varepsilon_{\mathbf{k}} + \mu_B B(2\sigma)$$

$$\hat{\mathbf{M}} = \sum_i \hat{\boldsymbol{\mu}}_i; \quad \hat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{e}{m^* c}\hat{\mathbf{s}}$$

$$\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z; \quad \mu_z = \frac{-e}{m_0 c} s_z = -\mu_B 2\sigma$$

$$\mu_z = \begin{cases} \mu_B, & \sigma = -1/2 \\ -\mu_B, & \sigma = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \overline{M}_z = \mu_B \overline{N}_{\sigma=-1/2} - \mu_B \overline{N}_{\sigma=1/2}$$

$$\overline{N}_\sigma = \sum_{\mathbf{k}} \overline{N}_{\mathbf{k},\sigma} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\exp\left(\dfrac{E_{\mathbf{k},\sigma} - \xi}{\theta}\right) + 1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \xi - \textit{скаляр} \\ \mathbf{B} - \textit{аксиальный вектор} \end{array}\right| \Rightarrow \xi(\mathbf{B}) = \xi(\mathbf{B}=0) + CB^2 + \ldots$$

В широком диапазоне полей можно пренебречь зависимостью химического потенциала от магнитного поля

$$E_{\mathbf{k},\sigma} = \varepsilon_{\mathbf{k}} + \mu_B B(2\sigma) \rightarrow \overline{N}_\sigma = \sum_{\mathbf{k}} \overline{N}_{\mathbf{k},\sigma} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\exp\left(\frac{E_{\mathbf{k},\sigma} - F}{\theta}\right) + 1}$$

$$\overline{N}_\sigma = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}} - (F - 2\mu_B B\sigma)}{\theta}\right) + 1}$$

Введем в рассмотени е функцию

$$\Omega(x) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}} - x}{\theta}\right) + 1}$$

- Половина числа частиц в свободном идеальном газе с хим. потенциалом x

$$\overline{N}_\sigma = \Omega(\xi - 2\mu_B B\sigma)$$

Рассмотрим случай $\mu_B B \ll \xi$

$$\overline{N}_\sigma = \Omega(\xi) + \frac{\partial\Omega(\xi)}{\partial\xi}(\xi - 2\mu_B B\sigma - \xi) = \Omega(\xi) - \mu_B B \frac{\partial\Omega(\xi)}{\partial\xi}(2\sigma)$$

$$\overline{N}_{\sigma} = \Omega(\xi) - \mu_B B \frac{\partial \Omega(\xi)}{\partial \xi}(2\sigma) \rightarrow \begin{cases} \overline{N}_{\sigma=-1/2} = \Omega(\xi) + \mu_B B \dfrac{\partial \Omega(\xi)}{\partial \xi} \\ \overline{N}_{\sigma=1/2} = \Omega(\xi) - \mu_B B \dfrac{\partial \Omega(\xi)}{\partial \xi} \end{cases}$$

$$\overline{M}_{\mathbf{B}} = \mu_B \left[\overline{N}_{\sigma=-1/2} - \overline{N}_{\sigma=1/2}\right] = 2\mu_B^2 \frac{\partial \Omega(\xi)}{\partial \xi} \cdot B$$

Металл. $\xi > 0$. *Газ электронов проводимос ти – вырожденны й* $\theta << \varepsilon_F$;

$$\Omega(\xi) = \frac{1}{2} N = V \cdot \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{1}{6\pi^2}\left[\xi^{3/2} + \frac{\pi^2}{8}\frac{T^2}{\xi^{1/2}}\right] \Rightarrow \frac{\partial n(\xi)}{\partial \xi} = V \cdot \frac{m^{3/2}}{\sqrt{2}\hbar^3 \pi^2} \mu^{1/2}\left[1 - \frac{\pi^2}{24}\left(\frac{T}{\xi}\right)^2\right]$$

$$\chi^{M}_{пара} = \frac{1}{V}\frac{\partial \overline{M}_{\mathbf{B}}}{\partial B} = \mu_B^2 \frac{\sqrt{2} m^{3/2}}{\hbar^3 \pi^2} \xi^{1/2}\left[1 - \frac{\pi^2}{24}\left(\frac{T}{\xi}\right)^2\right]$$

$$\xi = \varepsilon_F \left\{1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{\varepsilon_F}\right)^2\right\} \Rightarrow \chi^{M}_{пара} \; \frac{3^{1/3}}{\pi^{4/3}} \frac{\mu_B^2 m \cdot n_0^{1/3}}{\hbar^2}\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{\varepsilon_F}\right)^2\right] > 0 - \textit{парамагнет изм}$$

В металле очень слабая зависимость парамагнитной восприимчивости от температуры (следствие вырожденности газа электронов проводимости)

Невырожденный газ электронов проводимости в п/п

$$n = \frac{\overline{N}_{n,c}}{V} = 2\left(\frac{m_n T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(\frac{\xi}{T}\right)$$

$$\Omega(\xi) = \frac{1}{2}\overline{N}_{n,c} = V\,2\left(\frac{m_n T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(\frac{\xi}{T}\right) \Rightarrow \frac{\partial\Omega(\xi)}{\partial\xi} = V\,\frac{1}{2}\,\frac{n}{T}$$

$$\overline{M}_{\mathbf{B}} = 2\mu_B^2\,\frac{\partial\Omega(\xi)}{\partial\xi}\cdot B = V\cdot\mu_B^2\,\frac{n}{T}$$

$$\chi_{napa}^{(n)} = \frac{\partial}{\partial B}\left(\frac{\overline{M}_{\mathbf{B}}}{V}\right) = \mu_B^2\,\frac{n(T)}{T}$$

Зависимость от температуры - сильная

Парамагнитный вклад свободных дырок

Если валентная зона полностью заполнена, то в соответствии с принципом Паули у половины электронов магнитный момент “направлен” по полю, у половины – против поля. => Суммарный магнитный момент полностью заполненной валентной зоны=0.

При удалении электрона из одночастичного состояния (**k**,σ), магнитный момент валентной зоны=магнитный момент электрона оставшегося без пары (в состоянии (**k**,- σ))= $\mu_B B(-2\sigma)$

Магнитный момент валентных электронов=Магнитный момент дырок.
Дырке нужно приписывать магнитный момент, направленный противоположно магнитному моменту отсутствующего электрона

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}^{(p)} = \frac{e}{m_0 c}\hat{\mathbf{s}}^{(p)}$$

$$s_z^{(p)} = \hbar\sigma \Rightarrow \mu_z^{(p)} = \frac{e\hbar}{2m_0 c}(2\sigma) = \mu_B(2\sigma) = \begin{cases} \mu_B, & \sigma = 1/2 \\ -\mu_B, & \sigma = -1/2 \end{cases}$$

$$\overline{M}_{v,z} = \mu_B\left[\overline{N}_{\sigma=1/2}^{(p)} - \overline{N}_{\sigma=-1/2}^{(p)}\right]$$

$$\overline{N}_{\sigma}^{(p)} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \overline{N}_{v,k,\sigma}^{(p)}$$

$$\overline{N}_{v,k,\sigma}^{(p)} = 1 - N_F\left(\frac{E_{v,\mathbf{k},\sigma}^{(n)} - F}{T}\right) = 1 - \frac{1}{\exp\left(\frac{E_{v,\mathbf{k},\sigma}^{(n)} - F}{T}\right) + 1} = \frac{1}{\exp\left(\frac{-E_{v,\mathbf{k},\sigma}^{(n)} + F}{T}\right) + 1} = N_F\left(\frac{-E_{v,\mathbf{k},\sigma}^{(n)} + F}{T}\right)$$

Нет магнитного поля

Простой изотропный параболический з – н дисперсии

$$\overset{0}{E}{}_{V,\mathbf{k}}^{(n)} = E_v - \frac{p^2}{2m_p}; \quad m_p > 0 - \text{масса дырки}$$

$$\hat{H}_{\mathbf{0}}^{(n)} = E_v - \frac{\hat{p}^2}{2m_p}$$

В магнитном поле

$$\hat{H}^{(n)} = E_v - \frac{1}{2m_p}\left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + \frac{2\mu_B}{\hbar} B\hat{s}_z$$

Пренебрегаем вкладом $\frac{e}{c}\mathbf{A}$

$$\hat{H}^{(n)} = E_v - \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_p} + \frac{2\mu_B}{\hbar} B\hat{s}_z$$

$$\hat{H}^{(n)} = E_v - \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_p} + \frac{2\mu_B}{\hbar} B\hat{s}_z$$

$$\Psi(\xi) = \chi_\sigma(s_z)\psi(\mathbf{r}); \quad \hat{s}_z\chi_\sigma = \hbar\sigma\chi_\sigma$$

$$\left\{E_v - \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_p} + \mu_B B(2\sigma)\right\}\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

$$-\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_p}\psi(\mathbf{r}) = \left(E - E_v - \mu_B B(2\sigma)\right)\psi(\mathbf{r})$$

$$\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_p}\psi(\mathbf{r}) = \left(-E + E_v + \mu_B B(2\sigma)\right)\psi(\mathbf{r})$$

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\exp(i\mathbf{kr})}{\sqrt{V}}; \quad -E^{(n)}_{v,\mathbf{k},\sigma} = -E_v + \varepsilon^{(p)}_{\mathbf{k}} - \mu_B B(2\sigma);$$

$$\varepsilon^{(p)}_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m_p}$$ -Энергия свободной дырки

$$-E_{v,\mathbf{k},\sigma}^{(n)} = -E_v - \varepsilon_{\mathbf{k}}^{(p)} - \mu_B B(2\sigma) \to \overline{N}_{v,k,\sigma}^{(p)} = N_F\left(\frac{-E_{v,\mathbf{k},\sigma}^{(n)} + F}{T}\right)$$

$$\overline{N}_{v,k,\sigma}^{(p)} = N_F\left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(p)} + F - E_v - \mu_B B(2\sigma)}{T}\right)$$

$$F - E_v = F - E_c + E_c - E_v = \xi + E_g \Rightarrow \overline{N}_{v,k,\sigma}^{(p)} = N_F\left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(p)} + E_g + \xi - \mu_B B(2\sigma)}{T}\right)$$

$$\overline{N}_{\sigma}^{(p)} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} \overline{N}_{v,k,\sigma}^{(p)} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} N_F\left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(p)} + E_g + \xi - \mu_B B(2\sigma)}{T}\right)$$

$$\Omega_p(x) = \sum_{\mathbf{k}} N_F\left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(p)} + E_g + \xi}{T}\right)$$

- Половина числа дырок в свободном полупроводнике с уровнем Ферми x

$$\overline{N}_{\sigma}^{(p)} = \Omega_p\left(\xi - \mu_B B(2\sigma)\right)$$

Случай $\mu_B B(2\sigma) << \xi$

$$\overline{N}_{\sigma}^{(p)} = \Omega_p(\xi) - \frac{\partial \Omega_p(\xi)}{\partial \xi}\mu_B B(2\sigma)$$

$$\overline{M}_{v,z} = \mu_B\left[\overline{N}_{\sigma=1/2}^{(p)} - \overline{N}_{\sigma=-1/2}^{(p)}\right] = -2(\mu_B)^2 \frac{\partial \Omega_p(\xi)}{\partial \xi} B$$

$$\chi_{napa}^{(p)} = \frac{\partial}{\partial B}\left(\frac{\overline{M}_{v,z}}{V}\right) = -\frac{1}{V} 2(\mu_B)^2 \frac{\partial \Omega_p(\xi)}{\partial \xi}$$

$$\chi_{napa}^{(p)} = -\frac{1}{V} 2\mu_B^2 \frac{\partial\Omega_p(\xi)}{\partial\xi}$$

$$\Omega_p(x) = \sum_{\mathbf{k}} N_F\left(\frac{\varepsilon_{\mathbf{k}}^{(p)} + E_g + \xi}{T}\right)$$

- Половина числа дырок в свободном полупроводнике с уровнем Ферми x

Вырожденный полупроводник

$$p = \frac{\overline{N}_{p,v}}{V} = 2\left(\frac{m_p T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{E_g + \xi}{T}\right)$$

$$\Omega_p(x) = \frac{1}{2}\overline{N}_{p,v} = V \cdot \left(\frac{m_p T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{E_g + \xi}{T}\right) = -\frac{V}{2}\frac{p}{T}$$

$$\chi_{napa}^{(p)} = \mu_B^2 \frac{p(T)}{T}; \quad \chi_{napa}^{(n)} = \left(\mu_B^{(n)}\right)^2 \frac{n(T)}{T};$$

Диамагнетизм Ландау свободных носителей в полупроводнике

Как квантование Ландау сказывается на газе свободных носителей полупроводника?

Рассмотрим электроны проводимости. Для наглядность пренебрежем взаимодействием собственного магнитного момента электрона с полем.

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2$$

$$\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z;$$

$$\Psi(\mathbf{r}, s_z) = \chi_\sigma(s_z)\psi(\mathbf{r}); \quad \hat{s}_z\chi_\sigma(s_z) = \hbar\sigma\chi_\sigma(s_z); \, \sigma = \pm\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

Калибровка Ландау $\mathbf{A} = -By\mathbf{e}_x$

$$\psi_{(k_z,k_x,n)}(\mathbf{r}) = \frac{\exp(ik_z z)}{\sqrt{L}}\frac{\exp(ik_x x)}{\sqrt{L}}\varphi_n\left(y - \ell^2 k_x\right); \quad \varphi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}\,\ell}}\exp\left(-\frac{y^2}{2\ell^2}\right)H_n\left(\frac{y}{\ell}\right)$$

$$E_{(k_z,n)} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right); \quad n = 0,1,2,\ldots \; ; \quad \omega_c = \frac{|e|B}{mc}; \quad \ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_c}} = \sqrt{\frac{\hbar c}{|e|B}}$$

$(\sigma, k_z, k_x, n)-$ Полный набор квантовых чисел для одноэл. стац. состояний

Вырождение по проекции спина с кратностью $g_\sigma = 2$

Вырождение по k_x

Какова кратность вырождения по k_x?

Центр осциллятора должен находиться внутри объема металла

$$0 < k_x \ell^2 < L \Rightarrow 0 < k_x < \frac{L}{\ell^2}$$

$$g_{k_x} = \sum_{k_x} 1 = \frac{L}{2\pi} \int_0^{L/\ell^2} dk_x = \frac{L^2}{2\pi \ell^2}$$

Находим плотность одночастичных состояний

$$g(\varepsilon) = \sum_{(\sigma, k_z, k_x, n)} \delta\left(\varepsilon - \varepsilon_{(k_z, n)}\right) = \left(\sum_{\sigma=\pm 1/2} 1\right) \cdot \left(\sum_{k_x} 1\right) \sum_n \sum_{k_z} \delta\left(\varepsilon - \varepsilon_{(k_z, n)}\right) =$$

$$= \frac{L^2}{\pi \ell^2} \sum_{k_z} \delta\left(\varepsilon - \varepsilon_{(k_z, n)}\right) = \frac{L^2}{\pi \ell^2} \sum_n \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \delta\left(\varepsilon - \varepsilon_{(k_z, n)}\right) \leftarrow \varepsilon_{(k_z, n)} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \tilde{\varepsilon}_n ; \tilde{\varepsilon}_n = \tilde{\varepsilon}_n = \hbar \omega_c (n + 1/2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \delta\left(\varepsilon - \varepsilon_{(k_z, n)}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \delta\left(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right) = -\int_{+\infty}^{0} dk_z \delta\left(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right) + \int_0^{+\infty} dk_z \delta\left(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right) =$$

$$= 2 \int_0^{+\infty} dk_z \delta\left(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right) = \left\{x \equiv \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}\right\} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} \delta\left(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n - x\right) = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} \frac{\Theta(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n)}{\sqrt{\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n}}$$

$$g(\varepsilon) = \frac{V}{2\pi^2 \ell^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} \sum_n \frac{\Theta(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n)}{\sqrt{\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n}}$$

- особенности. Должны сказаться на измеряемых величинах

$$g(\varepsilon) = \frac{V}{2\pi^2\hbar^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2}\sum_n \frac{\Theta(\varepsilon-\tilde{\varepsilon}_n)}{\sqrt{\varepsilon-\tilde{\varepsilon}_n}} \to \Omega = -T\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon\, g(\varepsilon)\ln\left(1+\exp\left(\frac{\xi-\varepsilon}{T}\right)\right)$$

$$\Omega = -T\,\frac{V}{2\pi^2\hbar^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2}\sum_n \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \frac{\Theta(\varepsilon-\tilde{\varepsilon}_n)}{\sqrt{\varepsilon-\tilde{\varepsilon}_n}}\ln\left(1+\exp\left(\frac{\xi-\varepsilon}{T}\right)\right) =$$

$$= -T\,\frac{V}{2\pi^2\hbar^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2}\sum_n \int_{\tilde{\varepsilon}_n}^{+\infty} d\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\varepsilon-\tilde{\varepsilon}_n}}\ln\left(1+\exp\left(\frac{\xi-\varepsilon}{T}\right)\right) =$$

$$\Omega = -T\,\frac{V}{2\pi^2\hbar^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2}\sum_n J_n; \quad J_n = \int_{\tilde{\varepsilon}_n}^{+\infty} d\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\varepsilon-\tilde{\varepsilon}_n}}\ln\left(1+\exp\left(\frac{\xi-\varepsilon}{T}\right)\right)$$

$$J_n = \int\limits_{\tilde{\varepsilon}_n}^{+\infty} d\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n}} \ln\left(1 + \exp\left(\frac{\xi - \varepsilon}{T}\right)\right)$$

Интегрируем по частям

$$J_n = \int\limits_{\tilde{\varepsilon}_n}^{+\infty} d\varepsilon \frac{1}{\sqrt{\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n}} \ln\left(1 + \exp\left(\frac{\xi - \varepsilon}{T}\right)\right) = 2\int\limits_{\tilde{\varepsilon}_n}^{+\infty} d\left(\sqrt{\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n}\right) \ln\left(1 + \exp\left(\frac{\xi - \varepsilon}{T}\right)\right) =$$

$$= 2\lim_{\varepsilon \to +\infty}\left\{\sqrt{\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n}\ln\left(1 + \exp\left(\frac{\xi - \varepsilon}{T}\right)\right)\right\} - 2\lim_{\varepsilon \to \tilde{\varepsilon}_n}\left\{\sqrt{\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n}\ln\left(1 + \exp\left(\frac{\xi - \varepsilon}{T}\right)\right)\right\} -$$

$$-2\int\limits_{\tilde{\varepsilon}_n}^{+\infty} d\left(\sqrt{\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n}\right)\frac{d}{d\varepsilon}\ln\left(1 + \exp\left(\frac{\xi - \varepsilon}{T}\right)\right) = 2\lim_{\varepsilon \to +\infty}\left\{\sqrt{\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n}\left(\exp\left(\frac{\xi - \varepsilon}{T}\right) + \square \quad\right)\right\} -$$

$$-2\int\limits_{\tilde{\varepsilon}_n}^{+\infty} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n}\, \frac{\exp\left(\frac{\xi - \varepsilon}{T}\right)}{\exp\left(\frac{\xi - \varepsilon}{T}\right) + 1}\left(-\frac{1}{T}\right) =$$

$$= \frac{2}{T}\int\limits_{\tilde{\varepsilon}_n}^{+\infty} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n}\, \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \xi}{T}\right) + 1} = \frac{2}{T}\int\limits_{\tilde{\varepsilon}_n}^{+\infty} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n}\, N_F\left(\frac{\varepsilon - \xi}{T}\right)$$

$$J_n = \frac{2}{T}\int_{\tilde{\varepsilon}_n}^{+\infty} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n}\, N_F\left(\frac{\varepsilon - \xi}{T}\right)$$

Вырожденный полупроводник

$$N_F\left(\frac{\varepsilon - \xi}{T}\right) \approx \exp\left(\frac{\xi}{T}\right)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{T}\right)$$

$$J_n = \frac{2}{T}\exp\left(\frac{\xi}{T}\right)\int_{\tilde{\varepsilon}_n}^{+\infty} d\varepsilon \sqrt{\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n}\,\exp\left(-\frac{\varepsilon}{T}\right)$$

Замена переменной $x \equiv \sqrt{\dfrac{\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_n}{T}} \rightarrow d\varepsilon = 2Txdx$

$$J_n = 4T^{1/2}\exp\left(\frac{\xi}{T}\right)\exp\left(-\frac{\tilde{\varepsilon}_n}{T}\right)\int_{\tilde{\varepsilon}_n}^{+\infty} dx x^2 \exp\left(-x^2\right) = T^{1/2}\sqrt{\pi}\exp\left(\frac{\xi}{T}\right)\exp\left(-\frac{\tilde{\varepsilon}_n}{T}\right)$$

$$\tilde{\varepsilon}_n = \frac{\hbar\omega_c}{2} + \hbar\omega_c n \Rightarrow J_n = \sqrt{\pi}T^{1/2}\exp\left(\frac{\xi}{T}\right)\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)\exp(-\gamma n); \quad \gamma = \frac{\hbar\omega_c}{T}$$

$$\Omega = -T\frac{V}{2\pi^2\hbar^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2}\sum_n J_n = -\frac{Vm\omega_c\sqrt{\pi}}{2\pi^2\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{1/2} T^{3/2}\exp\left(\frac{\xi}{T}\right)\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)\sum_{n=0}^{+\infty}\exp(-\gamma n) =$$

$$= -VTn\frac{\gamma\exp\left(-\dfrac{\gamma}{2}\right)}{1-\exp(-\gamma)}$$

$$n = 2\left(\frac{m_n T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\cdot\exp\left(\frac{\xi}{T}\right)$$

$$\frac{\Omega}{V} = -Tn\frac{\gamma\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)}{1-\exp(-\gamma)};\quad \gamma = \frac{\hbar\omega_c}{T}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\delta W = Ada \\
&A = -\frac{\partial\Omega}{\partial B} \\
&\delta W = M_B dB
\end{aligned}\right| \Rightarrow M_B = -\frac{\partial\Omega}{\partial B}$$

$I)\gamma >> 1 \Rightarrow \hbar\omega_c >> T$ - Уровни Ландау хорошо разрешены

$$\frac{\Omega}{V} = -Tn\gamma\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$\frac{M_B}{V} = -\frac{\partial\Omega}{\partial B} = Tn\left(1-\frac{\gamma^2}{2}\right)\frac{\partial\gamma}{\partial B}\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) = -Tn\frac{\gamma^2}{2}\frac{\hbar e}{mcT}\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) =$$

$$= -\mu_B\left(\frac{m_0}{m_n}\right)n\exp\frac{\gamma^2}{2}\left(-\frac{\gamma}{2}\right) < 0 - \textit{диамагнети зм}$$

В невырожденном полупроводнике в квантующем магнитном поле (уровни Ландау хорошо разрешены) диамагнитные свойства электронов проводимости очень слабы!!! (сравните с металлом)

$$\frac{\Omega}{V} = -Tn\frac{\gamma\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)}{1-\exp(-\gamma)}; \quad \gamma = \frac{\hbar\omega_c}{T}; \quad M_B = -\frac{\partial\Omega}{\partial B}$$

$I)\gamma << 1 \Rightarrow \hbar\omega_c << T$ - Уровни Ландау не разрешены

$$\frac{\gamma\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)}{1-\exp(-\gamma)} = \frac{2\gamma/2}{\exp\left(\frac{\gamma}{2}\right)-\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\gamma/2}{sh\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\gamma/2}{\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{3!}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^3+\dots} =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{6}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2+\dots} \approx 1-\frac{1}{6}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 = 1-\frac{1}{6}\left(\frac{\hbar e}{2m_n cT}\right)^2 B^2 = 1-\frac{\mu_B^2}{6}\left(\frac{m_0}{m_n}\right)^2\frac{1}{T^2}B^2$$

$$\frac{\Omega}{V} = \frac{\Omega_0}{V}+\frac{\Omega_B}{V}; \quad \frac{\Omega_0}{V} = -nT; \quad \frac{\Omega_B}{V} = \frac{1}{6}\left(\frac{m_0}{m_n}\right)^2\frac{\mu_B^2 n}{T}B^2$$

$$\frac{M_B}{V} = -\frac{\partial\Omega/V}{\partial B} = -\frac{1}{3}\left(\frac{m_0}{m_n}\right)^2\frac{\mu_B^2 n}{T}B < 0 - \text{диамагнетизм};$$

$$\chi_{диа}^{(n)} = \frac{\partial}{\partial B}\frac{M_B}{V} = -\frac{1}{3}\left(\frac{m_0}{m_n}\right)^2\frac{\mu_B^2 n}{T}$$

$\chi_{пара}^{(n)} = \mu_B^2\frac{n}{T} \Rightarrow \chi_{диа}^{(n)} = -\frac{1}{3}\left(\frac{m_0}{m_n}\right)^2\chi_{пара}^{(n)}$ - Такое же соотношение, как и в металле

Диамагнитный вклад дырок

Нет магнитного поля

Простой изотропный параболиче ский з – н дисперсии

$$\overset{0}{E}{}^{(n)}_{V,\mathbf{k}} = E_v - \frac{p^2}{2m_p}; \quad m_p > 0 - \textit{масса дырки}$$

$$\hat{H}^{(n)}_{\mathbf{0}} = E_v - \frac{\hat{p}^2}{2m_p}$$

В магнитном поле

$$\hat{H}^{(n)} = E_v - \frac{1}{2m_p}\left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 \Rightarrow \left\{E_v - \frac{1}{2m_p}\left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\right\}\Psi = E\Psi$$

$$\left\{\frac{1}{2m_p}\left(\hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2\right\}\Psi = \{-E + E_v\}\Psi$$

$$\Psi = \chi_\sigma(s_z)\frac{\exp(ik_z z)}{\sqrt{L}}\frac{\exp(ik_x x)}{\sqrt{L}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}\,\ell_p}}\exp\left(-\frac{(y - k_x\ell_p^2)^2}{2\ell_p^2}\right)H_n\left(\frac{y - k_x\ell_p^2}{\ell_p}\right)$$

$$-E^{(n)}_{v,k_z,k_x,n} = -E_v + \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}_{k_z,n}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(p)}_{k_z,n} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_p} + \hbar\boldsymbol{\omega}_{c,p}\left(n + \frac{1}{2}\right) - \textit{энергия дырки}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{c,p} = \frac{eB}{m_p c} - \textit{циклотронн ая частота дырки}; \quad \ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m_p\boldsymbol{\omega}_{c,p}}}$$

$$-E^{(n)}_{v,k_z,k_x,n}=-E_v+\varepsilon^{(p)}_{k_z,n}$$

$$\Omega^{(n)}_v=-T\sum_{\sigma,k_z,k_x,n}\ln\left\{1+\exp\left(\frac{F-E^{(n)}_{v,k_z,k_x,n}}{T}\right)\right\}=-T\sum_{\sigma,k_z,k_x,n}\ln\left\{\exp\left(\frac{F-E^{(n)}_{v,k_z,k_x,n}}{T}\right)\left[1+\exp\left(-\frac{F-E^{(n)}_{v,k_z,k_x,n}}{T}\right)\right]\right\}=$$

$$=F\sum_{\sigma,k_z,k_x,n}1-\sum_{\sigma,k_z,k_x,n}E^{(n)}_{v,k_z,k_x,n}-T\sum_{\sigma,k_z,k_x,n}\ln\left\{1+\exp\left(-\frac{F-E^{(n)}_{v,k_z,k_x,n}}{T}\right)\right\}$$

$\sum_{\sigma,k_z,k_x,n}1$ *– число состояний в валентной зоне (константа)*

$\sum_{\sigma,k_z,k_x,n}E^{(n)}_{v,k_z,k_x,n}$ *– энергия полностью заполненной валентной зоны (константа)*

$$\Omega^{(n)}_v=-T\sum_{\sigma,k_z,k_x,n}\ln\left\{1+\exp\left(-\frac{F-E^{(n)}_{v,k_z,k_x,n}}{T}\right)\right\}\leftarrow -E^{(n)}_{v,k_z,k_x,n}=-E_v+\varepsilon^{(p)}_{k_z,n}$$

$$\Omega^{(n)}_v=-T\sum_{\sigma,k_z,k_x,n}\ln\left\{1+\exp\left(-\frac{\xi+E_g+\varepsilon^{(p)}_{k_z,n}}{T}\right)\right\}$$

Вырожденный полупроводник $\exp\left(-\frac{\xi+E_g+\varepsilon^{(p)}_{k_z,n}}{T}\right)<<1$

$$\Omega^{(n)}_v=-T\sum_{\sigma,k_z,k_x,n}\exp\left(-\frac{\xi+E_g+\varepsilon^{(p)}_{k_z,n}}{T}\right)=-T\int d\varepsilon g_p(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\xi+E_g+\varepsilon}{T}\right)$$

$$g_p(\varepsilon)=\sum_{\sigma,k_z,k_x,n}\exp\left(\varepsilon-\varepsilon^{(p)}_{k_z,n}\right)$$

Электроны проводимости $E^{(n)}_{v,k_z,k_x,n} = E_c + \varepsilon^{(n)}_{k_z,n}$;

$$\Omega^{(n)}_v = -T\sum_{\sigma,k_z,k_x,n} \ln\left\{1+\exp\left(\frac{F-E^{(n)}_{v,k_z,k_x,n}}{T}\right)\right\} = -T\sum_{\sigma,k_z,k_x,n} \ln\left\{1+\exp\left(\frac{\xi-\varepsilon^{(n)}_{k_z,n}}{T}\right)\right\}$$

Вырожденный полупроводник $\exp\left(\frac{\xi}{T}\right) << 1$

$$\Omega^{(n)}_v = -T\sum_{\sigma,k_z,k_x,n} \exp\left(\frac{\xi-\varepsilon^{(n)}_{k_z,n}}{T}\right) = -T\int d\varepsilon g_n(\varepsilon)\exp\left(\frac{\xi-\varepsilon}{T}\right)$$

$$g_n(\varepsilon) = \sum_{\sigma,k_z,k_x,n} \exp\left(\varepsilon-\varepsilon^{(n)}_{k_z,n}\right)$$

Электроны проводимости

$$\Omega_c^{(n)} = -T\,\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_n T}\right)^{3/2} n\int d\varepsilon g_n(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{T}\right)$$

$$g_n(\varepsilon) = \sum_{\sigma,k_z,k_x,n} \exp\left(\varepsilon - \varepsilon_{k_z,n}^{(n)}\right)$$

$$\varepsilon_{k_z,n}^{(n)} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_n} + \hbar\omega_{c,n}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\omega_{c,n} = \frac{eB}{m_n c}$$

$$n = 2\left(\frac{m_n T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(\frac{\xi}{T}\right)$$

Электроны валентной зоны (дырки)

$$\Omega_v^{(n)} = -T\,\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_p T}\right)^{3/2} n\int d\varepsilon g_p(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{T}\right)$$

$$g_p(\varepsilon) = \sum_{\sigma,k_z,k_x,n} \exp\left(\varepsilon - \varepsilon_{k_z,n}^{(p)}\right)$$

$$\varepsilon_{k_z,n}^{(p)} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_p} + \hbar\omega_{c,p}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\omega_{c,p} = \frac{eB}{m_p c}$$

$$p = 2\left(\frac{m_p T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \cdot \exp\left(-\frac{\xi + E_g}{T}\right)$$

$$\left.\begin{matrix} m_n \to m_p \\ n \to p \end{matrix}\right| \Rightarrow \Omega_c^{(n)} \to \Omega_c^{(p)} \Rightarrow \chi_{диа}^{(n)} \to \chi_{диа}^{(p)}$$

I)квантующее магнитное поле $\hbar\omega_c >> T$

$$\chi_{диа}^{(n)} \propto \exp\left(-\frac{\hbar\omega_{c,n}}{2T}\right)$$

$$\chi^{(n)} = \chi_{диа}^{(n)} + \chi_{пара}^{(n)} \approx \chi_{пара}^{(n)} = \mu_B^2 \frac{n}{T}$$

$$\chi_{диа}^{(p)} \propto \exp\left(-\frac{\hbar\omega_{c,p}}{2T}\right)$$

$$\chi^{(p)} = \chi_{диа}^{(p)} + \chi_{пара}^{(p)} \approx \chi_{пара}^{(p)} = \mu_B^2 \frac{p}{T}$$

$$\chi = \chi^{(n)} + \chi^{(p)} = \frac{\mu_B^2}{T}\left[n + p\right]$$

$I)$ *уровни Ландау замазаны* $\hbar\omega_c << T$

$$\chi_{диа}^{(n)} = -\frac{1}{3}\left(\frac{m_0}{m_n}\right)^2 \chi_{пара}^{(n)} = -\frac{1}{3}\mu_B^2\left(\frac{m_0}{m_n}\right)^2 \frac{n}{T}$$

$$\chi^{(n)} = \chi_{диа}^{(n)} + \chi_{пара}^{(n)} = \mu_B^2 \frac{n}{T}\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{m_0}{m_n}\right)^2\right]$$

$$\chi_{диа}^{(p)} = -\frac{1}{3}\left(\frac{m_0}{m_p}\right)^2 \chi_{пара}^{(p)} = -\frac{1}{3}\mu_B^2\left(\frac{m_0}{m_p}\right)^2 \frac{p}{T}$$

$$\chi^{(p)} = \chi_{диа}^{(p)} + \chi_{пара}^{(p)} = \mu_B^2 \frac{p}{T}\left[1-\frac{1}{3}\left(\frac{m_0}{m_p}\right)^2\right]$$

$$\chi = \chi^{(n)} + \chi^{(p)} = \frac{\mu_B^2}{T}\left[\left\{1-\frac{1}{3}\left(\frac{m_0}{m_n}\right)^2\right\}n + \left\{1-\frac{1}{3}\left(\frac{m_0}{m_p}\right)^2\right\}p\right]$$