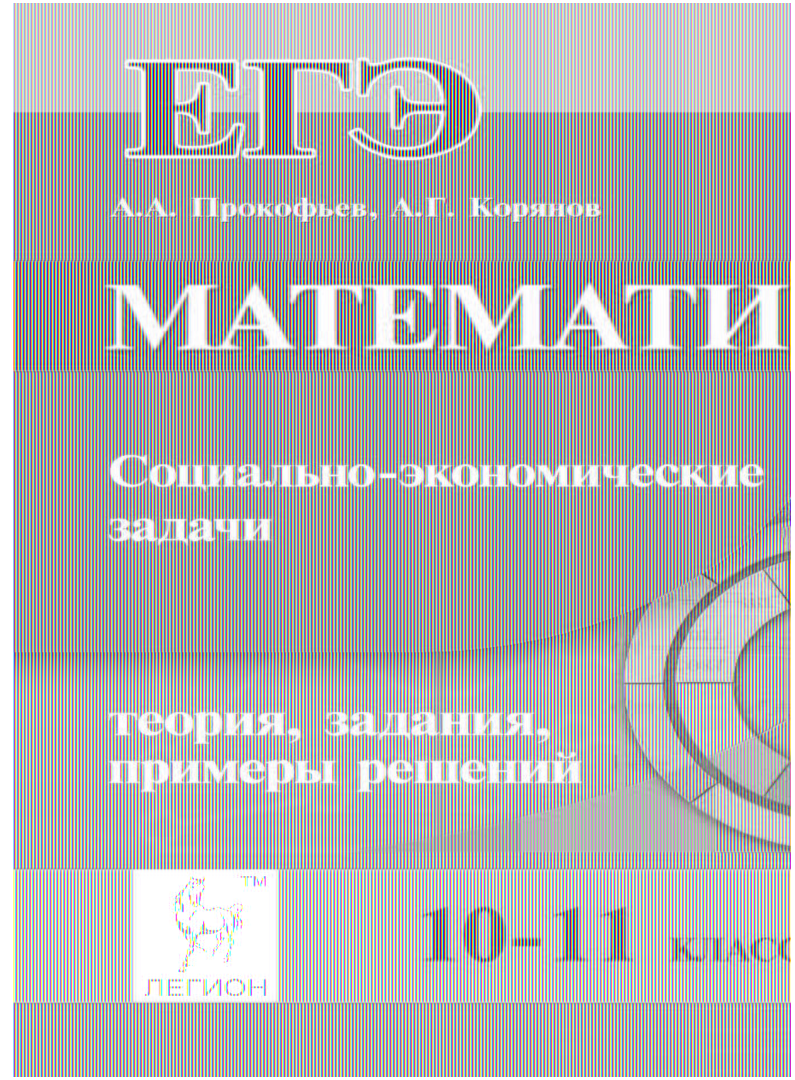
ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЕГИОН™
www.legionr.ru
Приказом Минобрнауки РФ №729 от 14.12.2009
пособия издательства «Легион» допускаются к использованию
в общеобразовательных учреждениях

Ростов-на-Дону
(863) 303-05-50

Экономическая задача на ЕГЭ по математике (профильный уровень)

Ханин Дмитрий Игоревич

[Математика. ЕГЭ. Задача с экономическим содержанием.]



[Математика. ЕГЭ. Социально-экономические задачи: теория, задания, примеры решений. 10-11 классы.]

Математика. Генератор тестов по спецификации ЕГЭ-2016. Профильный уровень (CD-диск).

Ссылка на диск в интернет-магазине http://www.legionr.ru/books/?SECTION_ID=33&ELEMENT_ID=4179

Кредиты

Задача 30 декабря 2014 года Сергей Михайлович взял в банке 800 000 рублей в кредит. План выплаты кредита — 30 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2% на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивают долг на 2%), затем Сергей Михайлович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Сергей Михайлович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 360 000 рублей?

Решение.

Предположим, что первые месяцы Сергей Михайлович будет выплачивать ровно по $360\,000$ рублей.

После первого месяца:
$1{,}02 \cdot 800\,000 = 816\,000$ рублей,
$816\,000 - 360\,000 = 456\,000$ рублей.

После второго месяца:
$1{,}02 \cdot 456\,000 = 465\,120$ рублей,
$465\,120 - 360\,000 = 105\,120$ рублей.

После третьего месяца:
$1{,}02 \cdot 105\,120 = 107\,222{,}4$ рублей,
$107\,222{,}4 - 107\,222{,}4 = 0$.

Ответ: 3

Задача

Клиент взял 15 960 000 рублей в кредит под 30% годовых. По истечении каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 30%), затем клиент переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы клиент выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение. Пусть искомый ежегодный платёж — x рублей.

Долг в конце первого года:
$1{,}3 \cdot 15960000 - x = (20748000 - x)$ рублей.

В конце второго:
$(1{,}3 \cdot (20\,748\,000 - x) - x) = 26\,972\,400 - 2{,}3x$ рублей.

В конце третьего:
$1{,}3(26\,972\,400 - 2{,}3x) - x = 35\,064\,120 - 3{,}99x$ рублей.

$35\,064\,120 - 3{,}99x = 0$
$x = 8\,788\,000$

Ответ: 8 788 000 рублей

Задача

Семён взял в кредит 12 000 рублей на 6 лет под 1% годовых (это означает, что в конце каждого года банк увеличивает долг на 1%). Составьте план погашения кредита по схеме с дифференцированными платежами (по истечении каждого расчётного года сумма долга уменьшается на одну и ту же величину).

Решение:

год	долг	процентный платёж	выплата долга	годовой взнос
	12000	1%		
1	10000	120	2000	2120
2	8000	100	2000	2100
3	6000	80	2000	2080
4	4000	60	2000	2060
5	2000	40	2000	2040
6	—	20	2000	2020
		420	12000	12420

Задача

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 18 млн рублей?

Решение

n — срок кредита (целое число лет).

Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$10,\ \frac{10(n-1)}{n}, \ldots,\ \frac{10\cdot 2}{n},\ \frac{10}{n},\ 0.$$

Последовательность процентов на остаток долга

$$2,\ \frac{2(n-1)}{n},\ \ldots\ \frac{2\cdot 2}{n},\ \frac{2\cdot 1}{n}$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$2+\frac{10}{n},\ \frac{2(n-1)+10}{n},\ldots,\ \frac{4+10}{n},\ \frac{2+10}{n}.$$

Всего следует выплатить

$$10+2\cdot\left(\frac{n+(n-1)+\ldots+2+1}{n}\right)=10+2\cdot\frac{n+1}{2}=n+11(\text{млн рублей}).$$

Общая сумма выплат равна 18 млн рублей, поэтому $n=7$.

Ответ: 7.

Критерии

Содержание критерия, задание 17	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: — неверный ответ из-за вычислительной ошибки; — верный ответ, но решение недостаточно обосновано	2
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

$S = K\left(1+\frac{P}{100}\right)^N$ – имеем формулу для расчета кредита.

S (окончательная сумма) – из условия 18 000 000 (18 млн. руб.)

K (первоначальная сумма (т. е. сумма кредита)). 10 000 000 (10 млн. руб.)

P – (процентная ставка) = 20%

N – (число периодов: в данном случае число целых лет) = ?

$18\,000\,000 = 10\,000\,000\left(1+\frac{20}{100}\right)^N$

$18\,000\,000 = 10\,000\,000 \cdot (1,2)^N$

$18 = 10 \cdot (1,2)^N$

$9 = 5 \cdot 1,2^N$, $\quad 1,2^N = \frac{9}{5}$. $\quad N = 4$.

Докажем правильность ответа на практике.

1) 10 млн + 20% – (18 млн : 4) = 12 000 000 – 4 500 000 = 7 500 000 (ост. долга)

2 год) 7 500 000 + 20% – 4 500 000 = 4 500 000 (ост. долга)

3 год) 4 500 000 + 20% – 4 500 000 = 900 000 (ост. долга)

4 год) 900 000 + 20% – 4 500 000 < 0, т. е. долг полностью погашен ⇒ кредит возьмут на 4 года.

ответ: 4.

Оценка эксперта: 0 баллов

Задача 15-го января был выдан кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения. Текущий долг (ТД) выражается в процентах от кредита.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
ТД	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивается на 4%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение:

Пусть S — сумма кредита; $x_1, x_2, \ldots, x_6$ — выплаты в первой половине февраля, марта и т.д. Составим уравнения, которые отражают график погашения кредита.

$$\text{На } 15.02: \quad 1{,}04S - x_1 = 0{,}9S,$$

$$\text{На } 15.03: \quad 1{,}04 \cdot 0{,}9S - x_2 = 0{,}8S,$$

$$\text{На } 15.04: \quad 1{,}04 \cdot 0{,}8S - x_3 = 0{,}7S,$$

$$\text{На } 15.05: \quad 1{,}04 \cdot 0{,}7S - x_4 = 0{,}6S,$$

$$\text{На } 15.06: \quad 1{,}04 \cdot 0{,}6S - x_5 = 0{,}5S,$$

$$\text{На } 15.07: \quad 1{,}04 \cdot 0{,}5S - x_6 = 0.$$

Сложим все уравнения.

$$1{,}04S\cdot(1+0{,}9+\ldots+0{,}5)-(x_1+x_2+\ldots+x_6) = S\cdot(0{,}9+0{,}8+\ldots+0{,}5).$$

Пусть $X = x_1 + x_2 + \ldots + x_6$ — общая сумма выплат.

Поскольку $5 + 6 + \ldots + 9 = \frac{5+9}{2}\cdot 5 = 35$, имеем уравнение

$$1{,}04S \cdot 4{,}5 - X = S \cdot 3{,}5,$$

$$X = S \cdot (1{,}04 \cdot 4{,}5 - 3{,}5) = 1{,}18S.$$

Таким образом, общая сумма выплат на 18% больше суммы самого кредита.

Ответ: 18.

Решение. Пусть S – сумма кредита.

2-й способ

$0{,}04 \cdot (S + 0{,}9S + 0{,}8S + 0{,}7S + 0{,}6S + 0{,}5S) = 0{,}04 \cdot 4{,}5S = 0{,}18S.$

Переплата составит 18%.

Ответ: 18

Вклады

Задача

Семён Петрович положил 8000 рублей в сберегательный банк. По истечении года к его вкладу были добавлены деньги, начисленные в качестве процентов, и, помимо этого, Семён Петрович увеличил свой вклад на 1360 рублей. Ещё через год он решил снять 1440 рублей, а остальные 9360 рублей положил на новый срок. Чему равна процентная ставка в этом банке?

Решение. Пусть процентная ставка в этом банке равна $p\%$. Тогда через год вклад Семёна Петровича будет

$\left(8000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) + 1360\right)$ рублей.

По условию получаем уравнение

$$\left(8000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) + 1360\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - 1440 = 9360.$$

Отсюда $\left(8000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) + 1360\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - 10\,800 = 0,$

$$8000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 + 1360 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - 10\,800 = 0.$$

$$8000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 + 1360 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - 10\,800 = 0.$$

Пусть $1 + \dfrac{p}{100} = x \;\; (x > 0)$, тогда

$8000 \cdot x^2 + 1360 \cdot x - 10\,800 = 0,$

$100 \cdot x^2 + 17 \cdot x - 135 = 0,$

$$x_{1,2} = \frac{-17 \pm \sqrt{289 + 54\,000}}{200} = \frac{-17 \pm 233}{200}.$$

$$x = \frac{216}{200} = \frac{108}{100} = 1 + \frac{8}{100}.$$

Это означает, что $p = 8$.

Ответ: 8%.

Задача

Банк предлагает два вида вкладов, «Стабильный» и «Прогрессивный». Вклад «Стабильный» имеет процентную ставку 10% годовых. Вклад «Прогрессивный» — 6% за первый год и p%, начиная со второго года. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Найдите наименьшее целое p, при котором трёхлетний вклад «Прогрессивный» окажется выгоднее, чем «Стабильный».

Решение. Пусть размер вклада равен S.

Вклад «Стабильный» через 3 года — $(1{,}1)^3S$.

Вклад «Прогрессивный» после первого года будет $(1{,}06)S$, после второго года — $(1 + p/100) \cdot (1{,}06) \cdot S$, а после третьего года — $(1 + p/100)^2 \cdot (1{,}06) \cdot S$.

«Прогрессивный» вклад выгоднее, когда

$$(1 + p/100)^2 \cdot 1{,}06 \cdot S > (1{,}1)^3S;$$

$$(1 + p/100)^2 \cdot 1{,}06 \cdot S > (1{,}1)^3 S;$$

$$(1 + p/100)^2 > \frac{(1{,}1)^3}{1{,}06};$$

$$\left(\frac{100 + p}{100}\right)^2 > \frac{1{,}331}{1{,}06};$$

$$(100 + p)^2 > \frac{1{,}331 \cdot 100^2}{1{,}06} = \frac{1\,331\,000}{106} = 12\,556{,}6\ldots;$$

$$100 + p > \sqrt{12\,556{,}6\ldots}.$$

$$100 + p > \sqrt{12\,556{,}6\ldots}.$$

Число p целое, тогда $(100 + p)$ — тоже целое. Вычислим два последовательных целых числа, между которыми лежит $\sqrt{12\,556{,}6\ldots}$.

$$110^2 = 12\,100,\ 111^2 = 12\,321,\ 112^2 = 12\,554,\ 113^2 = 12\,769,$$

значит $112^2 < 12\,556{,}6\ldots < 113^2$. Отсюда

$$112 < \sqrt{12\,556{,}6\ldots} < 113.$$

Так как $(100 + p)$ целое число, то $100 + p \geqslant 113$, $p \geqslant 13$. Значит, нам подходит любое $p \geqslant 13$, а наименьшее подходящее p равно 13.

Ответ: 13.

Задача

Клиент сделал вклад в банке в размере 200 тысяч рублей со ставкой 10%. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Клиент хочет в начале 3 и 4 года пополнить вклад на одно и то же целое число тысяч рублей (назовем это пополнение вклада *довклад*) так, чтобы к концу 4 года по вкладу было начислено не менее 100 тысяч рублей. При каком наименьшем размере довклада это возможно?

Решение. Обозначим размер довклада за x тысяч рублей.

Изначальный вклад к концу 4 -го года 200 $\cdot (1{,}1)^4$ тысяч рублей.

Довклад, сделанный в начале третьего года — $x \cdot (1{,}1)^2$ тысяч рублей.

Довклад, сделанный в начале 4 года — $x \cdot 1{,}1$ тысяч рублей.

Через 4 года на счету

$$200 \cdot (1{,}1)^4 + x \cdot (1{,}1)^2 + x \cdot 1{,}1 \text{ (тысяч рублей)},$$

а начисления по вкладу составят

$$200 \cdot (1{,}1)^4 + x \cdot (1{,}1)^2 + x \cdot 1{,}1 - (200 + 2x) \text{ (тысяч рублей)}.$$

Начисления не меньше 100 тысяч рублей, поэтому

$$200 \cdot (1{,}1)^4 + x \cdot (1{,}1)^2 + x \cdot 1{,}1 - (200 + 2x) \geqslant 100,$$

$$0{,}31x + 92{,}82 \geqslant 100,$$

$$0{,}31x \geqslant 7{,}18,$$

$$x \geqslant 23{,}1\ldots.$$

Наименьшее целое x, при котором это неравенство верное: $x = 24$.

Ответ: 24 тысячи рублей.

Свойства функций и экстремальные значения

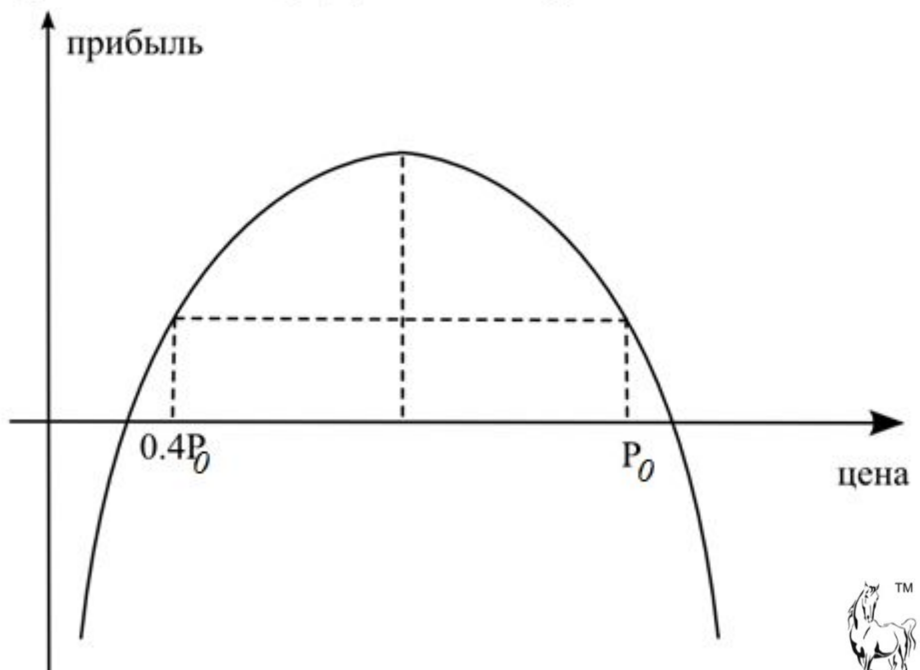
Задача

Зависимость объема Q (в шт.) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 12000 - P$, $2000 \leqslant P \leqslant 12000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $2500Q$ + 1 000 000 рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 60%, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Прибыль: **<u>Решение:</u>**

$$f(P) = PQ - (2500Q + 1\,000\,000) = -P^2 + 14500P - 31\,000\,000$$

Пусть первоначальная цена равнялась P_0. После снижения на 60% цена стала равняться $0{,}4P_0$. Графиком функции $y = f(P)$ является парабола с ветвями, направленными вниз, поэтому наибольшее значение прибыль будет достигать в вершине параболы. Так как $f(P_0) = f(0{,}4P_0)$, то вершина параболы будет находиться в точке $\dfrac{P_0 + 0{,}4P_0}{2} = 0{,}7P_0$. Это означает, что нужно увеличить цену товара с $0{,}4P_0$ до $0{,}7P_0$, то есть на $\dfrac{0{,}7P_0 - 0{,}4P_0}{0{,}4P_0} \cdot 100\% = 75\%$.



Ответ: 75.

Задача

Крупный бизнесмен является владельцем двух заводов, выпускающих одинаковую продукцию. На втором заводе используется более современное оборудование, позволяющее за одинаковое время с первым заводом производить больше продукции, чем на первом заводе. Известно, что если рабочие первого завода трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $2t$ единиц товара. А если рабочие второго завода трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $5t$ единиц товара. На обоих заводах за каждый час работы рабочему платят 500 рублей. Какое наибольшее число единиц продукции можно будет выпустить на обоих заводах при условии, что заработную плату на предстоящую неделю можно будет выплатить в размере 1 450 000 рублей?

Решение:

Пусть суммарное недельное рабочее время на первом заводе равно x^2, а на втором заводе y^2. Тогда, согласно условию задачи, на заводах произведут соответственно $2x$ и $5y$ единиц продукции, а суммарное количество будет $K = 2x + 5y$. Согласно условию, за эту работу надо оплатить рабочим сумму $(x^2 + y^2) \cdot 500$ рублей. Так как есть возможность оплатить 1 450 000 рублей, то

$$(x^2 + y^2) \cdot 500 = 1\ 450\ 000,$$

$$x^2 + y^2 = 2900,\ y^2 = 2900 - x^2,$$

$$K(x) = 2x + 5y = 2x + 5 \cdot \sqrt{2900 - x^2}.$$

Найдем наибольшее значение K(x) с помощью производной.

$$K'(x) = 2 - \frac{5 \cdot 2x}{2\sqrt{2900 - x^2}},$$

$$K'(x) = 0,\ 2 - \frac{5x}{2900 - x^2} = 0,$$

$$2\sqrt{2900 - x^2} = 5x,\ 4(2900 - x^2) = 25x^2,\ x^2 = 400,\ x = 20.$$

Заметим, что $K'(x) > 0$ при $x < 20$ и $K'(x) < 0$ при $x > 20$, поэтому в точке $x = 20$ будет наибольшее значение.

$$y = \sqrt{2900 - x^2},\ y = 50,$$

$$K(20) = 2 \cdot 20 + 5 \cdot 50 = 290.$$

Ответ: 290.

Задача

Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 3 года?

Решение:

Прибыль за год:

$$f(x) = px - (0{,}5x^2 + 2x + 6) = -0{,}5x^2 + (p - 2)x - 6,$$

Вершина параболы:

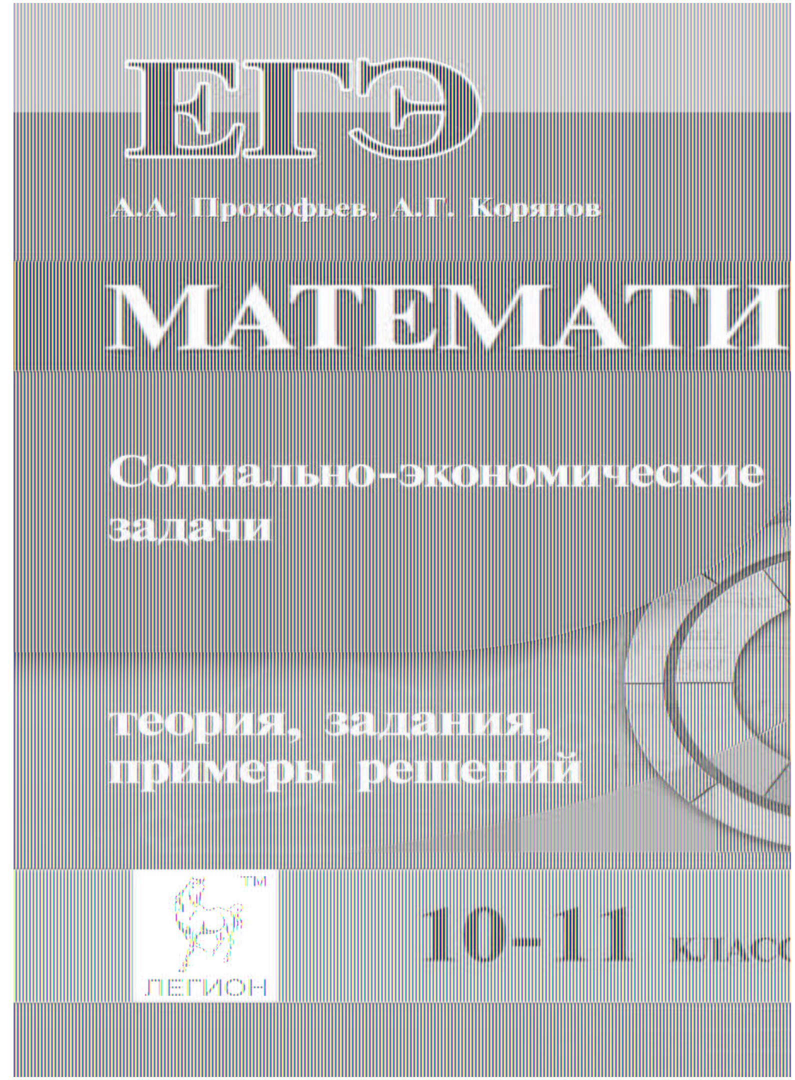
$$x_0 = p - 2,\ y_0 = \frac{1}{2}\Big((p - 2)^2 - 12\Big),$$

Условие окупаемости:

$$3y_0 \geqslant 78,\ p = 10.$$

Ответ: 10.

[Математика. ЕГЭ. Задача с экономическим содержанием.]



[Математика. ЕГЭ. Социально-экономические задачи: теория, задания, примеры решений. 10-11 классы.]

Математика. Генератор тестов по спецификации ЕГЭ-2016. Профильный уровень (CD-диск).

Ссылка на диск в интернет-магазине http://www.legionr.ru/books/?SECTION_ID=33&ELEMENT_ID=4179

Книги можно заказать в нашем интернет-магазине на сайте:
www.legionr.ru

Спрашивайте
в книжных магазинах города!

Издательство регулярно проводит онлайн-семинары авторов пособий с педагогами.

По завершении каждого вебинара участники получают электронные сертификаты.

Ссылки для участия вы сможете найти на сайте издательства www.legionr.ru

Все вебинары издательства «Легион» носят обучающий характер

legionrus@legionrus.com

Вступайте в группу

«Издательство «Легион»

онтакте, на одноклассниках

и в сети acebook.

Видео вебинаров смотрите н .

Адрес для корреспонденции:

344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550

Спасибо за внимание!