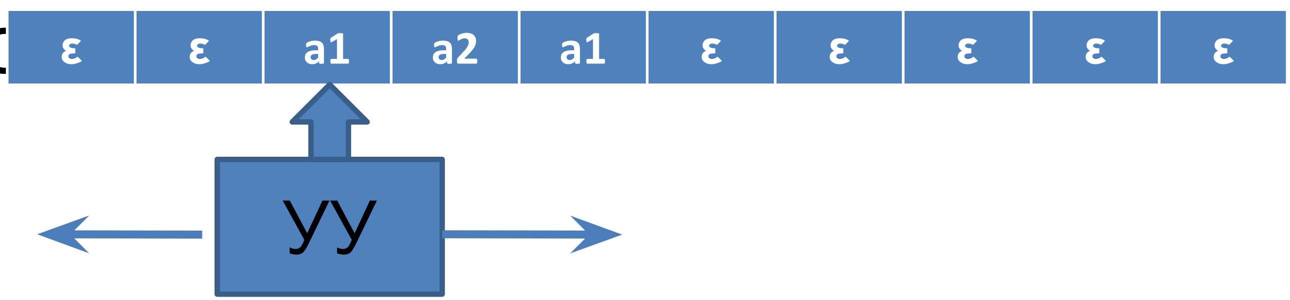
Машина Тьюринга как формальная модель алгоритма

Глава 4, стр. 89

Неформальное определение машины Тьюринга

- Машина Тьюринга (МТ) — это автомат, который имеет потенциально бесконечную в обе стороны ленту, считывающую головку и управляющее устро



- Конечное множество состояний УУ: $Q=\{q_1,\ldots, q_n\}$.
- Алфавит: $\Sigma= \{a_1,\ldots,a_m\}$.

Формальное определение машины Тьюринга

- **Определение 1.** Алфавит —некоторое конечное множество символов.

Определение 2. Цепочка над алфавитом —это последовательность символов алфавита.

Например, над алфавитом $\sum = \{0,1\}$, содержащим два символа 0 и 1 одна из цепочек имеет вид 00010.

Определение 4.3. Длина цепочки —это число символов в цепочке.

Длина пустой цепочки равна нулю. Обычно пустая цепочка обозначается $\mathcal{E}$. Таким
образом, $|\varepsilon| = 0$, а $|00010| = 5$.

Множество всех цепочек над алфавитом Σ обозначается Σ^*.

Следует отметить, что пустая цепочка $\mathcal{E}$ является цепочкой над любым алфавитом. Например, множество всех цепочек над алфавитом $\{0,1\}$ — это множество $\{0,1\}^* = \{\varepsilon, 0, 1, 01,10, 11, 000, 001, 010, \dots\}$.

Определение 4.4. Языком над алфавитом Σ называется некоторое подмножество множества Σ^*.

Определение 4.5. Конкатенацией цепочек *x* и *y* называется цепочка, полученная приписыванием символов цепочки *y* к цепочке *x* справа.

Для произвольной цепочки *x* и пустой цепочки $\mathcal{E}$ справедливо равенство $x\,\mathcal{E} = \mathcal{E}\,x = x$.

Формальное определение машины Тьюринга

Определение 6. Машиной Тьюринга называется семерка вида:

$$T = (K, \Sigma, \delta, p_0, f, a_0, a_1),$$

где
K — конечное множество состояний,
Σ — алфавит ленты,
p_0 — начальное состояние,
f — заключительное состояние,
a_0 — символ для обозначения пустой ячейки (если это не будет вызывать неоднозначности, будем обозначать его $\mathcal{E}$), $a_0 \in \Sigma$
a_1 — специальный символ — разделитель цепочек на ленте (обычно для этой цели будем использовать знак "*"), $a_1 \in \Sigma$
δ — функция переходов, которая описывает поведение машины Тьюринга и представляет собой отображение вида

$$\delta: K \times \Sigma \rightarrow K \times \Sigma \times S$$

где $S = \{R, L, E\}$ — направления сдвига головки по ленте.

В определении машины Тьюринга можно выделить следующие характерные черты

1. имеется вычислитель — сама машина Тьюринга;
2. машина Тьюринга работает по тактам, что соответствует дискретности выполнения алгоритма;
3. соблюдается требование конечности алгоритма, т.к. множества K и Σ конечны, а, следовательно, конечно и отображение δ;
4. требование детерминированности Машины Тьюринга соответствует детерминированности отображения – (это значит, что множество команд машины Тьюринга не содержит различных команд с одинаковыми левыми частями). Таким образом, можно сделать следующий вывод: для согласования определения машины Тьюринга с требованиями к алгоритму требуется рассматривать только детерминированные машины Тьюринга.

Это требование уже учтено в определении функции переходов как

$$\delta: K \times \Sigma \to K \times \Sigma \times S$$

Функция переходов недетерминированной машины Тьюринга могла бы иметь вид

$$\delta: K \times \Sigma \to K \times 2^{\Sigma \times S} \text{ или } \delta: K \times \Sigma \to 2^{K \times \Sigma \times S}$$

Конфигурация МТ

Определение 7. Конфигурацией машины Тьюринга $T = (K, \Sigma, \delta, p_0, f, a_0, a_1)$ называется

$$t = \langle \alpha q a \beta \rangle$$

где
α — цепочка слева от головки, $\alpha \in \Sigma^*$;
q — состояние машины Тьюринга, $q \in K$;
a — символ под головкой, $a \in \Sigma$;
β — цепочка справа от головки, $\beta \in \Sigma^*$.
Например, конфигурация $\langle 11 * 1 q_6 ** \rangle$ означает, что машина Тьюринга находится в состоянии q_6, имеет на ленте цепочку 11*1**, причем, слева от головки находится часть этой цепочки 11*1, читающая головка обозревает символ *, справа от головки находится цепочка *.
Элемент функции переходов $qa \to pbr$ (где $q, p \in K, a, b \in \Sigma, r \in S$) называется командой машины Тьюринга и описывает один такт ее функционирования. Один такт работы означает следующее: если в состоянии q машина Тьюринга обозревает на ленте символ a, то она переходит в состояние p, записывает вместо a новый символ b и сдвигает головку в направлении r.

Определение 8. Конфигурация $\langle \alpha q a \beta \rangle$ непосредственно переходит в конфигурацию $\langle \alpha_n q_n a_n \beta_n \rangle$, если новая конфигурация получилась в результате применения одной команды к исходной конфигурации:

1. команда $qa \to q_n a_n E$, тогда $\alpha = \alpha_n;\ \beta = \beta_n;$
2. команда $qa \to q_n bR$, тогда
   а) $\beta \neq \varepsilon, \beta = a_n \beta_n, \alpha_n = \alpha b,$
   б) $\beta = \varepsilon, a_n = a_0$ (или ε), $\beta_n = \varepsilon, \alpha_n = \alpha b,$
3. команда $qa \to q_n bL$, тогда
   а) $\alpha \neq \varepsilon, \alpha = \alpha_n a_n, \beta_n = b\beta,$
   б) $\alpha = \varepsilon, a_n = a_0$ (или ε), $\alpha_n = \varepsilon, \beta_n = b\beta,$
4. если в множестве команд отсутствует команда с левой частью *qa;* то машина Тьюринга оказывается блокированной, т.е. она никак не реагирует на символ *a* и до бесконечности продолжает оставаться в одной и той же конфигурации.

   Обозначим непосредственный переход

$$\langle \alpha q a \beta \rangle \Rightarrow \langle \alpha_n q_n a_n \beta_n \rangle$$

Определение 4.9. Конфигурация t переходит в конфигурацию p (обозначается $t \Rightarrow p$), если существуют такие конфигурации $t_1, t_2, \dots, t_k$, что

$$t \Rightarrow t_1 \Rightarrow t_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow t_k \Rightarrow p$$

Определение 4.10. Конфигурация $\langle \alpha p_0 a \beta \rangle$ машины Тьюринга $T = (K, \Sigma, \delta, p_0, f, a_0, a_1)$, содержащая начальное состояние p_0, называется начальной, а конфигурация содержащая заключительное состояние f, называется заключительной, причем если в данной конфигурации цепочка α слева от головки пустая ($\alpha = \varepsilon$), то соответственно начальная конфигурация называется стандартной начальной конфигурацией, а заключительная — стандартной заключительной.

Определение 4.11. Машина Тьюринга $T = (K, \Sigma, \delta, p_0, f, a_0, a_1)$ перерабатывает цепочку φ в цепочку ϕ, если, действуя из начальной конфигурации, имея цепочку φ на ленте, машина Тьюринга переходит в заключительную конфигурацию, имея цепочку ϕ на ленте:

$$\varphi_1 p_0 \varphi_2 \overset{*}{\Rightarrow} \phi_1 f \phi_2, \text{где } \varphi_1 \varphi_2 = \varphi, \phi_1 \phi_2 = \phi$$

Если начальная и заключительная конфигурации стандартные, то процесс переработки цепочки φ в цепочку ϕ называется правильной переработкой:

$$p_0 \varphi \overset{*}{\Rightarrow} f \phi$$

Способы представления машины Тьюринга:

1. перечисление множества команд
2. задание машины Тьюринга в виде графа
3. формирование таблицы переходов

Правила формирования команд

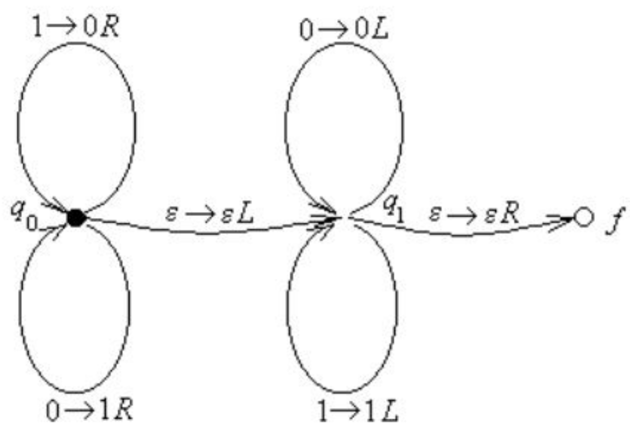
1. начальному пункту алгоритма ставится в соответствие начальное состояние q_0 машины Тьюринга;
2. циклы в алгоритме реализуются так, чтобы последнее действие цикла соответствовало переходу в то состояние, которое соответствует началу цикла;
3. последовательное выполнение пунктов алгоритма обеспечивается переходом в соответствующие этим пунктам смежные состояния;
4. последний пункт алгоритма вызывает переход в заключительное состояние f.

Пример

- Построим машину Тьюринга, которая для заданной цепочки из 0 и 1 строит ее инверсию, т.е. заменяет в цепочке все знаки 0 на 1 и знаки 1 на 0.

$$
\begin{gathered}
q_0 1 \longrightarrow q_0 0 R \\
q_0 0 \longrightarrow q_0 1 R \\
q_0 \varepsilon \longrightarrow q_1 \varepsilon L \\
q_1 0 \longrightarrow q_1 0 L \\
q_1 1 \longrightarrow q_1 1 L \\
q_1 \varepsilon \longrightarrow f \varepsilon R
\end{gathered}
$$

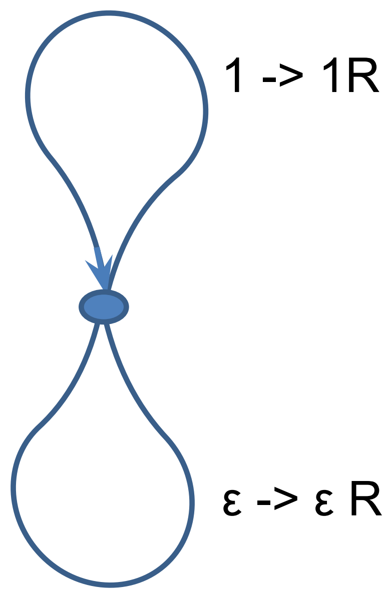
Здесь алфавит ленты $\Sigma = \{0,1,\varepsilon\}$, множество состояний $K = \{q_0, q_1, f\}$



	ε	0	1
q_0	$q_1 \varepsilon L$	$q_0 1 R$	$q_0 0 R$
q_1	$f \varepsilon R$	$q_1 0 L$	$q_1 1 L$

Пример

- Машина, работающая бесконечно на цепочке из 1



Задачи

- Дана цепочка символов из алфавита $\Sigma = \{a, b, c, \varepsilon\}$. Заменить все символы a на b, b на c, c на a.

Функции, вычислимые по Тьюрингу

Можно на любом алфавите рассматривать машины Тьюринга, которые:

- никогда не прекращают работу
- на любых исходных данных машина Тьюринга всегда закончит свою работу через конечное число шагов
- на некоторых исходных данных машина Тьюринга работает бесконечно, а на некоторых завершает работу

Определение 4.12. Машина Тьюринга

$$T = (K, \Sigma, \delta, p_0, f, a_0, a_1)$$

вычисляет функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если выполняются следующие условия:

1) для любых $x_1, x_2, \dots, x_n$, принадлежащих области определения *Dom*(*f*) функции *f*, машина Тьюринга из начальной конфигурации, имея на ленте представление аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$, переходит в заключительную конфигурацию, имея на ленте представление значения функции:

$$A_1 q_0 A_2 \overset{*}{\Rightarrow} B_1 q_z B_2$$

$$A_1 A_2 = 1^{x_1} * \cdots * 1^{x_n}$$

$$B_1 B_2 = 1^{f(x_1, x_2, \dots, x_n)}$$

2) для любых $x_1, x_2, \dots, x_n$, не принадлежащих *Dom*(*f*) , машина Тьюринга *T* из начальной конфигурации, имея на ленте представление аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$, работает бесконечно:

$$A_1 q_0 A_2 \overset{*}{\Rightarrow} \infty$$

Определение 4.13. Если начальная конфигурация является стандартной начальной конфигурацией, а заключительная — стандартной заключительной, то говорят, что машина Тьюринга правильно вычисляет функцию f:

$$q_0 1^{x_1} * \cdots * 1^{x_n} \overset{*}{\Rightarrow} q_z 1^{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

$$q_0 1^{x_1} * \cdots * 1^{x_n} \overset{*}{\Rightarrow} \infty$$

Определение 4.14. Функция называется **вычислимой** (правильно вычислимой), если существует машина Тьюринга, вычисляющая (правильно вычисляющая) эту функцию.

Таким образом, для того, чтобы доказать вычислимость функции, а в перспективе и существование алгоритма, необходимо построить соответствующую машину Тьюринга. Непосредственные построения трудоемки, а часто представляют практически невыполнимый процесс в силу громоздкости и необозримости такого построения. Поэтому необходимо рассмотреть операции над машинами Тьюринга, чтобы получить инструменты для построения сложных машин Тьюринга из простых машин.

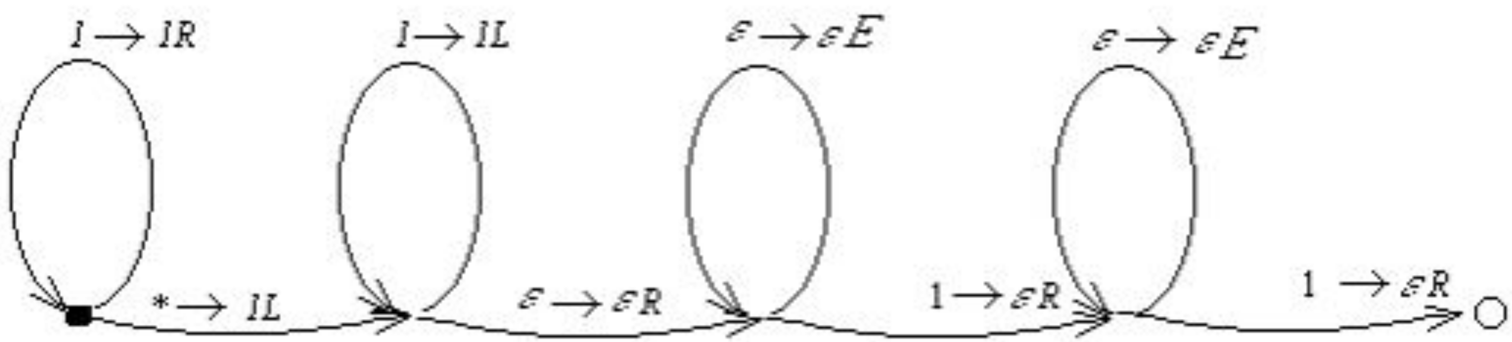
Пример. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию

$$f(x, y) = x + y - 1.$$

В соответствии с определением требуемая машина Тьюринга должна выполнять следующие действия:

$$q_0 \overset{*}{\Rightarrow} \begin{cases} \infty, & x + y = 0 \\ q_z 1^{x+y-1}, & x + y - 1 > 0 \end{cases}$$

Указанные действия выполняет следующая машина Тьюринга:



Теорема 4.1. Композиция двух вычислимых функций есть функция вычислимая.

Доказательство. Пусть $g(x) = f_2(f_1(x))$, где f_1, f_2 — правильно вычислимые функции. Тогда существуют две машины Тьюринга, правильно вычисляющие f_1 и f_2:

$$T_1 = (K_1, \Sigma_1, \delta_1, p_{0_1}, p_{z_1}, a_{0_1}, a_{1_1})$$
$$T_2 = (K_2, \Sigma_2, \delta_2, p_{0_2}, p_{z_2}, a_{0_2}, a_{1_2})$$

Если нужно, переобозначим символы пустой ячейки и разделителя так, чтобы они совпадали: $a_{0_1} = a_{0_2}$, $a_{1_1} = a_{1_2}$, а также переобозначим K_1 и K_2 так, чтобы они не пересекались.

Построим машину Тьюринга:

$$T = (K_1 \cup K_2 \setminus \{p_{z1}\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \Big|_{p_{z1}}^{p_{02}} (\delta_1 \cup \delta_2), p_{01}, p_{z2}, a_0, a_1).$$

Построенная машина Тьюринга *T* выполняет следующие действия:

$$p_{01} 1^x \overset{*}{\Rightarrow}_{(T_1)} p_{z1} 1^{f_1(x)} = p_{02} 1^{f_1(x)} \overset{*}{\Rightarrow}_{(T_2)} p_{z2} 1^{f_2(f_1(x))}.$$

Если $g(x)$ не определена в точке x — это значит, что не определена либо $f1(x)$, либо $f2(t)$, где $t = f1(x)$. В этом случае T зациклится соответственно либо на первом участке, работая как $T1$, либо на втором, работая как $T2$.

Определение 4.15. Машина Тьюринга *T* называется композицией машин Тьюринга T_1 и T_2, если она построена по правилам из Теоремы 4.1.

Теорема 4.2. Композиция *n* правильно вычислимых функций $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., $f_n(x)$, есть правильно вычислимая функция $f_1\big(f_2(\dots f_n(x)\dots)\big)$.

Доказательсво. Воспользуемся принципом математической индукции. Для *n* =2 теорема доказана — это теорема 1. Пусть теорема справедлива для некоторого $n \geq 2$, докажем ее для *n* + 1. Имеется композиция $\mathrm{g(x)} = f_1\left(f_2\big(\dots f_{n+1}(x)\big)\right)$. Функция $f_2\big(\dots f_{n+1}(x)\big)$ является композицией *n* вычислимых функций и, следовательно, вычислима по индуктивному предположению. Тогда композиция $f_1(g(x))$ двух вычислимых функций $f_1(x)$ и $g(x)$ является вычислимой по теореме 1.

Машина Тьюринга с полулентой

- Рассмотренные нами определения машины Тьюринга использовали бесконечную ленту в обе стороны. Это значит, что на ленте нельзя оставить какие-нибудь данные, которые машина Тьюринга не будет использовать при движении влево или вправо. Ограничим ленту с одной стороны и покажем, что машина Тьюринга с полулентой (левой или правой) эквивалентна машина Тьюринга с бесконечной в обе стороны лентой.
- **Теорема 4.3.** Функция, правильно вычислимая на машине Тьюринга с обычной лентой, правильно вычислима на машине Тьюринга с правой полулентой.
- **Теорема 4.4.** Функция, правильно вычислимая на машине Тьюринга с обычной лентой, правильно вычислима на машине Тьюринга с левой полулентой.

Определение 4.16. Машина Тьюринга вычисляет функцию f с восстановлением, если

$$p_0 1^{x_1} * \cdots * 1^{x_n} \overset{*}{\Rightarrow} p_z 1^{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)} 1^{x_1} * \cdots * 1^{x_n}$$

Теорема 4.5. Всякая правильно вычислимая функция правильно вычислима с восстановлением.

Доказательство. Пусть $f(x)$ — правильно вычислимая функция, тогда существует машина Тьюринга

$$T_f: p_0 1^{x_1} * \cdots * 1^{x_n} \overset{*}{\Rightarrow} p_z 1^{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$$

Тогда по теореме о левой полуленте существует машина Тьюринга T_f^{left}, вычисляющая функцию $f(x)$ на левой полуленте. Построим вспомогательную машину Тьюринга, которая копирует исходные данные на ленте:

$$T_{copy}: p_0 A \overset{*}{\Rightarrow} p_0 A \Delta A, \text{где } A \in \{1,*\}^*$$

Теперь рассмотрим композицию машин Тьюринга T_{copy} и T_f^{left}

$$\begin{aligned} T_{copy} \cdot T^{left}: \ & p_0 1^{x_1} * \ldots * 1^{x_n} \overset{*}{\Rightarrow} p_z 1^{x_1} * \ldots * 1^{x_n} \triangle \ 1^{x_n} * \ldots * 1^{x_n} \\ & \Rightarrow p_z 1^{f(x_1,\ldots,x_n)} \triangle \ 1^{x_1} * \ldots * 1^{x_n} \end{aligned}$$

В заключение построим машину Тьюринга T_1, которая заменяет маркер Δ на знак разделителя * . Композиция $T_{copy} \cdot T^{left} \cdot T_1$ выполняет требуемые действия в соответствии с определением 4.16.

Теорема 4.6. Суперпозиция вычислимых функций — вычислимая функция.