Уральский федеральный университет

Математика

Лекция 5

Уральский федеральный университет

§ 7. Линейные пространства со скалярным произведением

В линейном пространстве L над полем R определено скалярное произведение, если любой упорядоченной паре $x,y \in L$ по некоторому правилу поставлено в соответствие *действительное число*, которое обозначается через (x, y) и при этом выполняются следующие условия (аксиомы скалярного произведения):

1. $\forall x, y \in L \quad (x, y) = (y, x)$;
2. $\forall x, y \in L, \forall \lambda \in R \quad (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
3. $\forall x, y, z \in L \quad (x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
4. $\forall x \in L \quad (x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Действительное линейное пространство, в котором определено скалярное произведение, называется ***евклидовым пространством*** и обозначается E.

Например, $\left\langle V_3; \left(\ , \right) \right\rangle$ в котором

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) -$$

трехмерное евклидово пространство геометрических векторов.

Некоторые метрические понятия в евклидовом пространстве

1. Норма (длина) элемента: $\| x \| \overset{\Delta}{=} \sqrt{(x, x)}.$

Свойства нормы:

а) $\forall x \in E \;\; \| x \| \geq 0,$ причем $\| x \| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \theta;$

б) $\forall x \in E, \;\lambda \in \mathbb{R} \;\;\; \| \lambda x \| = | \lambda | \cdot \| x \|;$

в) $\forall x, y \in E \;\;\; \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|.$

2. Метрика (расстояние) элементов:

$$d(x,y) \overset{\Delta}{=} \|x-y\| = \sqrt{(x-y,x-y)}.$$

Свойства метрики:

а) $\forall x, y \in E \quad d(x,y) \geq 0, \; d(x,y)=0 \;\Leftrightarrow\; x=y;$

б) $\forall x, y \in E \quad d(x,y) = d(y,x);$

в) $\forall x, y, z \in E \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$

3. Угол между элементами: $\left(\widehat{x,y}\right) = \varphi \in [0,\pi],$
который определяется по формуле

$$\cos\left(\widehat{x,y}\right) = \cos\varphi \overset{\Delta}{=} \frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}, \; (x \neq \theta, \;\; y \neq \theta).$$

В евклидовом пространстве можно определить *ортогональность* элементов: $x \perp y \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} (x, y) = 0.$

Некоторые метрические соотношения в E

1. Неравенство Коши-Буняковского:

$$\forall x, y \in E \quad |(x, y)| \le \|x\| \cdot \|y\|.$$

2. Неравенство Минковского:

$$\forall x, y \in E \quad \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|.$$

3. Теорема Пифагора:

$$x \perp y \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Пусть L – линейное пространство над полем C.

Отображение $(\ ,\ ): L \times L \to C$ называется скалярным произведением в L, если $\forall x,y,z \in L,\ \forall \lambda \in C$:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
2. $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$;
3. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
4. $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Комплексное линейное пространство со скалярным произведением называется ***унитарным пространством*** и обозначается U.

Выражение скалярного произведения через координаты перемножаемых векторов

Пусть в U_n задан произвольный фиксированный базис

$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ и пусть элементы $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i,\ y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varepsilon_j.$

Тогда $$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varepsilon_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \bar{\beta}_j \left(\varepsilon_i, \varepsilon_j \right).$$

Обозначив $\left(\varepsilon_i, \varepsilon_j \right) = g_{ij}$, получим $$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \bar{\beta}_j g_{ij}.$$

Матрица $\left(g_{ij}\right)_{n\times n}$ называется матрицей Грама в базисе ($\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$) и обозначается G.

Матрица Грама базисных элементов ($\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$) задает скалярное произведение в этом базисе.

Скалярное произведение элементов x и y в базисе ($\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$) пространства U_n можно записать в матричной форме:

$$\left(x,y\right)=X^T G\overline{Y},$$

где

$$X=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}.$$

Замечание. В евклидовом пространстве E_n скалярное произведение элементов x и y в произвольном базисе $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ равно $(x,y)=X^T G Y.$

Теорема о необходимых и достаточных условиях линейной зависимости системы векторов в евклидовом пространстве: система элементов $A=\{a_1,\dots,a_k\}\subset E_n$ линейно зависима тогда и только тогда, когда $\det G(a_1,\dots,a_k)=0.$

Следствие. Система элементов $A=\{a_1,\dots,a_k\}$ – линейно независимая тогда и только тогда, когда $\det G(a_1,\dots,a_k)\neq 0.$

Теорема имеет место для унитарного пространства.

Ортогональная система элементов и ее свойства

Пусть $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ – система элементов унитарного (евклидова) пространства U (E).

A – ортогональная система элементов тогда и только тогда, когда $\forall i, j \in \{1, \ldots, k\}$ $(a_i, a_j) = 0, i \neq j.$

Теорема 1. Если $A=\{a_1, \ldots, a_k\}$ – ортогональная система ненулевых элементов, то A – линейно независимая система.

Теорема 2. Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_k\} \subset U$ и $b \in U$,

$$\forall i \in \{1, \ldots, k\}\ a_i \perp b \Rightarrow \left(\forall \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i \perp b \right).$$

Замечание. Если элемент b ортогонален каждому элементу из $L = \langle a_1, \cdots, a_k \rangle$, то говорят, что b ортогонален подпространству L и записывают $b \perp L$.

Нормированность элемента

Элемент $a \in U$ называется *нормированным*, если его норма $\| a \| = 1$.

Любой ненулевой элемент a можно нормировать, умножив его на некоторое число $\lambda \neq 0$.

Действительно, по условию нормировки элемента:

$$\| \lambda \cdot a \| = | \lambda | \cdot \| a \| = 1 \Rightarrow | \lambda | = \frac{1}{\| a \|}.$$

$$\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{(a,a)}}$$ – нормирующий коэффициент.

Система $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ называется *ортонормированной* (ОНС), если $\forall i,\ j\in\{1,2,\ldots,k\}:$

$$\left(a_i,a_j\right)=\delta_{ij}=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j.\end{cases}$$

Матрица Грама векторов ОНС равна единичной матрице.

Базис в унитарном (евклидовом) пространстве называется ортонормированным (ОНБ), если его элементы образуют ортонормированную систему.

В ОНБ $(e_1,\ldots, e_n)$ пространства U_n скалярное произведение векторов x и y равно $\left(x,\, y\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_i\,,$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \left(e_1, \ldots, e_n\right) X,\; y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j = \left(e_1, \ldots, e_n\right) Y.$$

В ОНБ евклидова пространства E_n скалярное произведение векторов x и y равно $\left(x,\, y\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = X^T Y.$

Теорема о существовании ОНБ. В унитарном (евклидовом) $n-$мерном пространстве существует ОНБ.

Для построения ортогонального базиса применяют процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

Пусть $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ – произвольный базис в U_n. Тогда

$$e_1 = \varepsilon_1, \quad e_k = \varepsilon_k + \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_{k\,i} e_i, \quad k \in \{2, \ldots, n\},$$ где $$\lambda_{k\,i} = -\frac{(\varepsilon_k, e_i)}{(e_i, e_i)},$$

образуют ортогональный базис U_n.