Основы вычислительной математики

Предмет

Разработка, исследование и практическое применение методов и алгоритмов приближенного решения типовых математических задач.

Литература:

- Б.П. Демидович, И.А. Марон «Основы вычислителной математики»
- Г.И. Марчук «Методы вычислительной математики»

Основные источники погрешностей

Погрешности, возникающие при решении математических зада имеют различную природу.

Источники неустранимой погрешности:

1) Погрешность задачи (математическая модель),
2) Погрешность начальная (исходные данные, наличие физических констант).

Источники устранимой погрешности:

1) Погрешность метода (остаточная погрешность),
2) Погрешность округления (конечность разрядной сетки),
3) Погрешность действий (+, -, *, /).

Тема 1. Приближенные числа

- Определение 1. Приближенным числом называется число, незначительно отличающееся от точного и заменяющее последнее в вычислениях. Приближенное число будем обозначать ‘a’, точное число буквой ‘A’.
- Определение 2. Погрешностью приближенного числа ‘a’ (Δa) называют разность A-a. То есть $\Delta a = A - a$
- Определение 3. Абсолютной погрешностью числа ‘a’ называют модуль погрешности, то есть $\Delta = |A-a|$.
- Определение 4. Предельной абсолютной погрешностью приближенного числа называют любое число Δ_a не меньшее ее абсолютной погрешности ($\Delta_a \geq \Delta$).
  - $\Delta = |A-a| \leq \Delta_a$
- /*   Стремятся выбрать его как можно меньшим в сложившихся условиях. */

Соотношения, вытекающие из определений

- $\Delta = |A - a| \le \Delta_a$ --> $a - \Delta_a \le A \le a + \Delta_a$

Пример. Определим предельную погрешность числа 3.14, заменяющего число π , если известно, что $3.14 < \pi < 3.15$.

Так как число π может быть любой точкой из интервала (3.14, 3.15), длина которого 0.01, то погрешность числа 3.14 может быть любой величиной из интервала (0.0, 0.01). В силу определения, предельная абсолютная погрешность должна быть не меньше любого из этих чисел, а тогда получаем $\Delta_a = 0.01$.

Если *сложившиеся условия* немного поменять $3.14 < \pi < 3.142$, то можно получить лучшую оценку абсолютной погрешности, а именно: $\Delta_a = 0.002$.

- Определение 5. Относительной погрешностью δ приближенного числа а называют отношение абсолютной погрешности к модулю точного значение, т. е. $\delta = \Delta / |A|$.
- Определение 6. Предельной относительной погрешностью δ_a приближенного числа считают любое число, не меньшее относительной погрешности δ.

Соотношения, вытекающие из определений.

$$\frac{\Delta}{|A|} \le \delta_a \qquad \text{Следовательно,} \qquad \Delta \le |A|\delta_a$$

Таким образом, за предельную абсолютную погрешность числа *a* можно принять

$$\Delta_a = |A|\,\delta_a$$

Так как на практике $A \approx a$, то часто пользуются формулой:

$$\Delta_a = |a|\delta_a$$

Тогда границы точного числа:

$$A = a(1 \pm \delta_a)$$

Взаимосвязь абсолютной и относительной погрешностей

Будем считать, что $A>0$, $a>0$, $\Delta_a < a$. Тогда можно записать

1) $\delta = \Delta/A \le \Delta_a /(a - \Delta_a)$. Отсюда следует, что, зная предельную абсолютную погрешность Δ_a, можно определить предельную относительную погрешность как

$$\delta_a = \Delta_a / (a - \Delta_a)$$

Аналогично получаем

2) $\Delta = A^*\delta \le (a + \Delta)\delta_a$ □ $\Delta \le a^* \delta_a + \Delta * \delta_a$ Отсюда получаем, $\Delta(1- \delta_a) \le a^* \delta_a$ далее $\Delta \le a^* \delta_a /(1 - \delta_a)$. Значит, зная предельную относительную погрешность δ_a можно получить предельную абсолютную погрешность

$$\Delta_a = a^* \delta_a /(1 - \delta_a).$$

Упрощенный вариант полученных формул. Если принять, что $\Delta_a << a$, $\delta_a << 1$, тогда $\delta_a = \Delta_a / a$, $\Delta_a = a^* \delta_a$.

Десятичная запись, значащие цифры, число верных знаков

Всякое число в десятичной система счисления можно представить в виде

$$a = \alpha_m 10^{m} + \alpha_{m-1} 10^{m-1} + \alpha_{m-2} 10^{m-2} + \ldots + \alpha_{m-n+1} 10^{m-n+1} + \ldots \quad ,$$

где $\alpha_m \neq 0$.

Определение 7. Значащей цифрой числа называют любую цифру в ее записи, отличную от нуля, и ноль, если он стоит между ненулевыми цифрами, или служит для обозначение сохраненных разрядов.

Примеры.

$$b = 7 \cdot 10^{-3} + 0 \cdot 10^{-4} + 1 \cdot 10^{-5} + 0 \cdot 10^{-6} = \underline{0},\underline{00}7010$$

$$c = 2 \cdot 10^{9} + 0 \cdot 10^{8} + 0 \cdot 10^{7} + 3 \cdot 10^{6} + 0 \cdot 10^{5} = 2003\underline{000000}$$

$345\,000$ **- не меньше трёх значащих цифр**

$3.45 \cdot 10^{5}$ **- три значащие цифры**

$3.4500 \cdot 10^{5}$ **- пять значащих цифр**

Десятичная запись, значащие цифры, число верных знаков

Пример. 0.002080 Первых три нуля – незначащие, остальные нули - значащие. Последний потому, что он сигнализирует, что число записано с точностью до миллионных.

0.002080 и 0.00208 не равноценны

0.002080 – четыре значащие цифры
0.00208 -- три значащие цифры