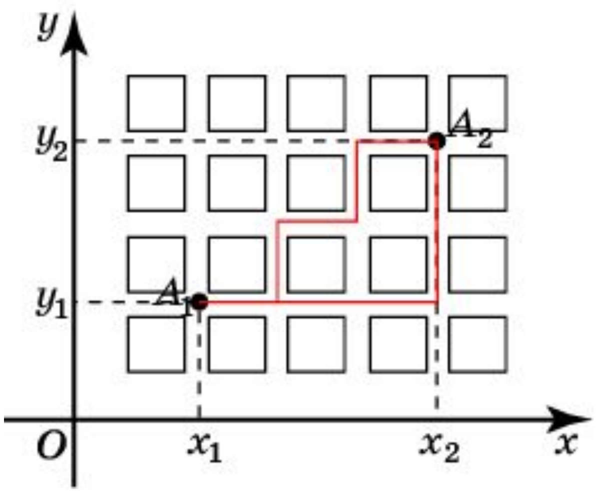
Метрические пространства

Понятия расстояния и метрического пространства являются одними из наиболее важных понятий современной математики.

Обычное расстояние d на координатной плоскости между точками $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ выражается формулой

$$d(A_1, A_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



В некоторых случаях более естественным оказывается другое определение расстояния. Например, в городе с перпендикулярными улицами, показанными на рисунке, расстоянием между точками $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ естественней считать длину пути из $A_1(x_1, y_1)$ в $A_2(x_2, y_2)$ не по прямой, а по улицам. В этом случае расстояние выражается формулой

$$d(A_1, A_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|.$$

Также расстоянием между двумя пунктами на местности можно считать время, затраченное на дорогу из одного пункта в другой и т. д.

Аксиомы метрического пространства

Все эти расстояния удовлетворяют свойствам, принимаемым за аксиомы метрического пространства. А именно

Метрическим пространством называется множество, для любых элементов A_1, A_2 которого определено неотрицательное число $d(A_1, A_2)$, называемое расстоянием, для которого выполняются следующие свойства.

1. $d(A_1, A_2) = 0$ тогда и только тогда, когда A_1 совпадает с A_2.
2. $d(A_1, A_2) = d(A_2, A_1)$ (симметричность).
3. $d(A_1, A_3) \leq d(A_1, A_2) + d(A_2, A_3)$ (неравенство треугольника).

Наличие расстояние позволяет определить некоторые важные геометрические понятия.

Окружность (круг) с центром O и радиусом R – множество элементов A, для которых выполняется равенство (неравенство) $d(A, O) = R$ ($d(A, O) \leq R$).

Отрезок A_1A_2 – множество элементов A, для которых выполняется равенство $d(A_1, A) + d(A, A_2) = d(A_1, A_2)$.

Серединный перпендикуляр к отрезку A_1A_2 – множество элементов A, для которых выполняется равенство $d(A, A_1) = d(A, A_2)$.

Упражнение 1

Для расстояния на координатной плоскости, которое для точек $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ выражается формулой $d(A_1, A_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$, найдите расстояние между точками:

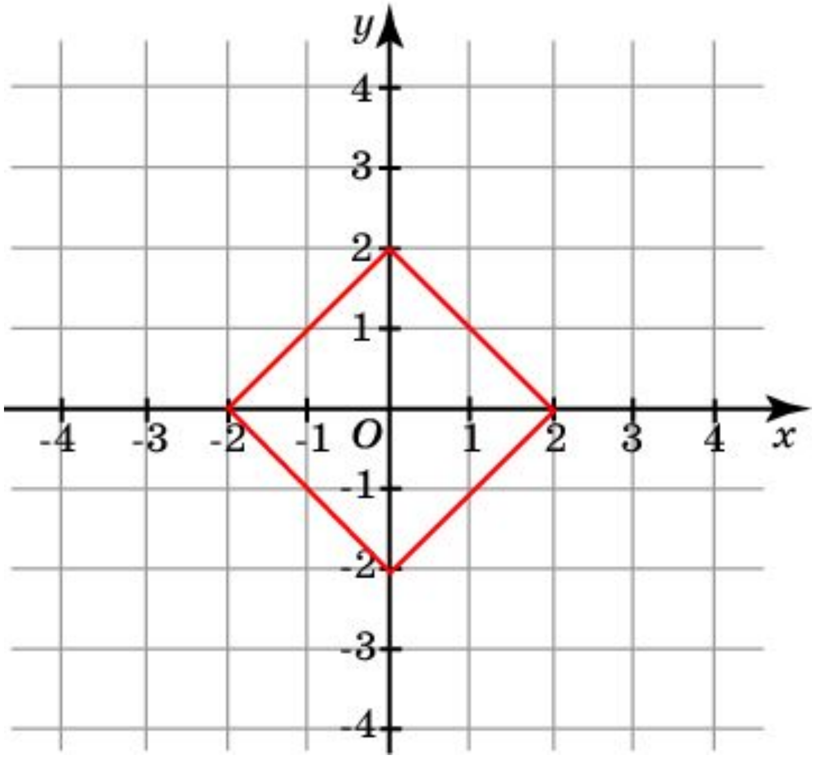
а) $O(0, 0)$, $A(1, 2)$;

б) $A_1(1, 2)$, $A_2(4, 3)$.

Ответ: а) 3; б) 4.

Упражнение 2

Для расстояния на координатной плоскости, которое для точек $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ выражается формулой $d(A_1, A_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$, изобразите окружность с центром $O(0, 0)$ и радиусом 2.



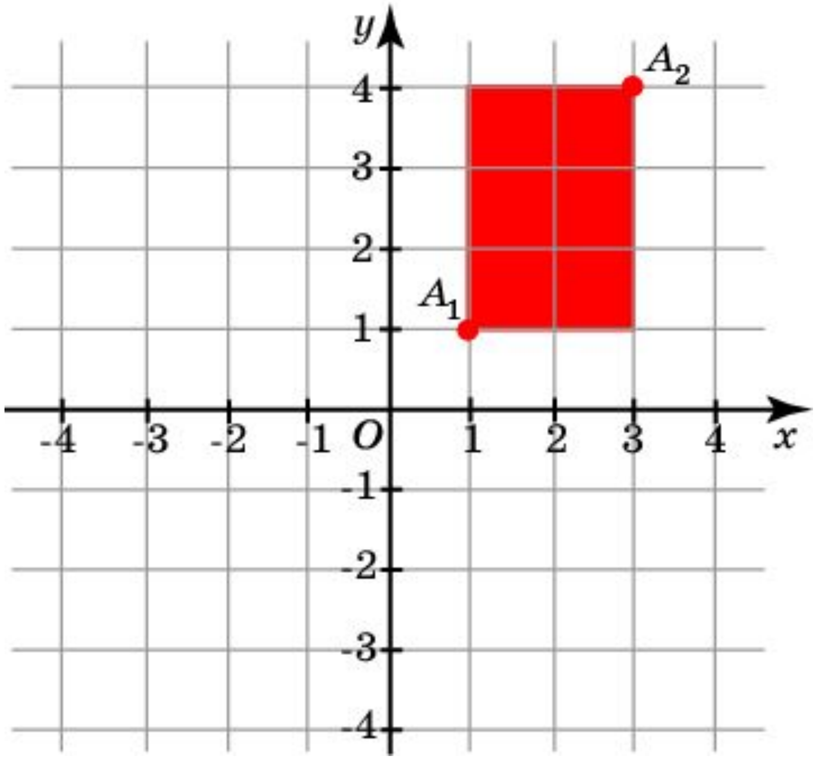
Ответ.

Упражнение 3

Для расстояния на координатной плоскости, которое для точек $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ выражается формулой $d(A_1, A_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$, изобразите отрезок A_1A_2 для точек:

а) $A_1(1, 1)$, $A_2(3, 1)$;

б) $A_1(1, 1)$, $A_2(3, 4)$.



Ответ: а)

Ответ: б)

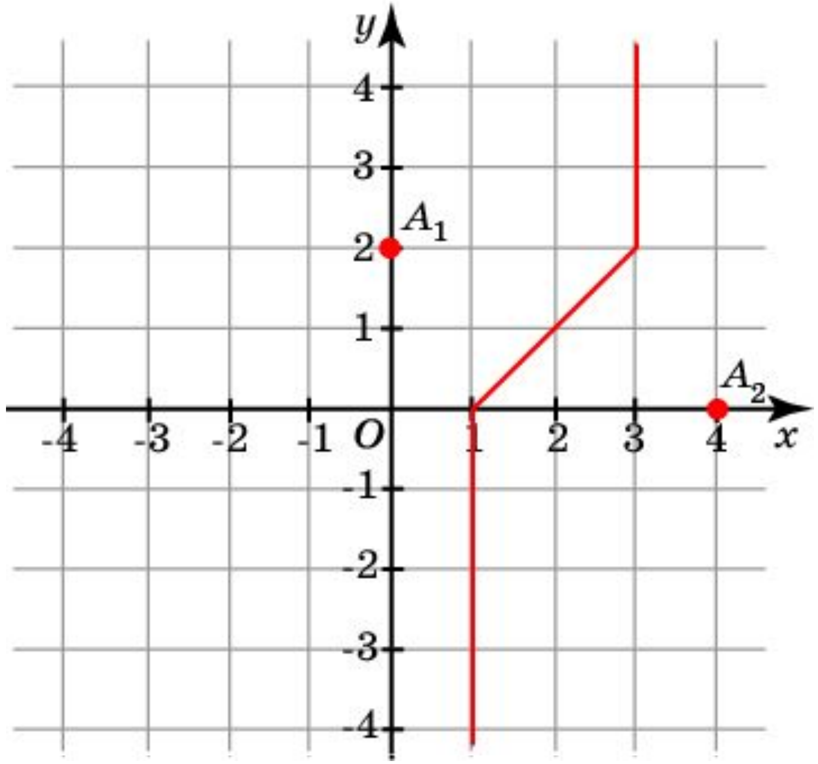
Упражнение 4

Для расстояния на координатной плоскости, которое для точек $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ выражается формулой $d(A_1, A_2) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$, изобразите серединный перпендикуляр к отрезу A_1A_2 для точек:

а) $A_1(0, 0)$, $A_2(4, 0)$;

б) $A_1(0, 2)$, $A_2(2, 0)$;

в) $A_1(0, 2)$, $A_2(4, 0)$.



Ответ: а)

Ответ: б)

Ответ: в)

Упражнение 5

Еще один пример расстояния на координатной плоскости для точек $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ задается формулой

$$d(A_1, A_2) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}.$$

Найдите расстояние между точками:

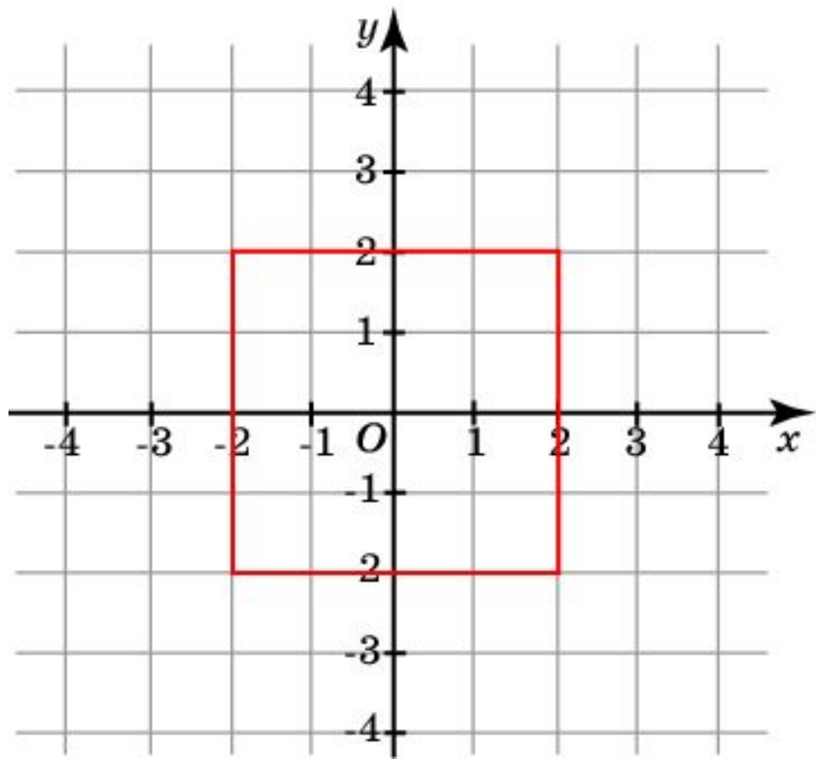
а) $O(0, 0)$, $A(1, 2)$;

б) $A_1(1, 2)$, $A_2(4, 3)$.

Ответ: а) 2; б) 3.

Упражнение 6

Для расстояния на координатной плоскости, которое для точек $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ выражается формулой $d(A_1, A_2) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$, изобразите окружность с центром $O(0, 0)$ и радиусом 2.



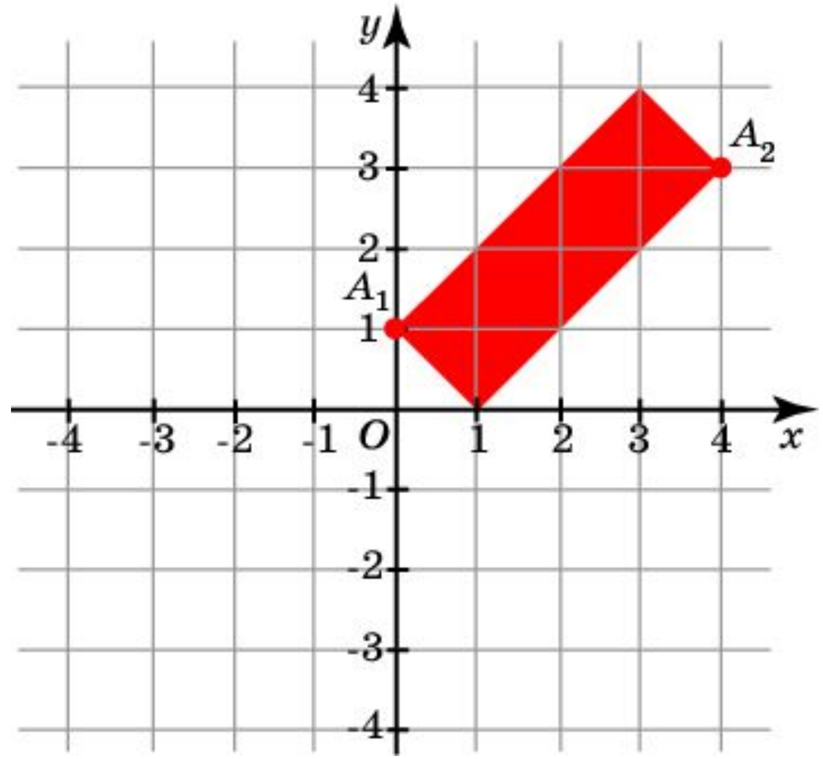
Ответ:

Упражнение 7

Для расстояния на координатной плоскости, которое для точек $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ выражается формулой $d(A_1, A_2) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$, изобразите отрезок A_1A_2 для точек:

а) $A_1(0, 1)$, $A_2(4, 1)$;

б) $A_1(0, 1)$, $A_2(4, 3)$;



Ответ: а)

Ответ: б)

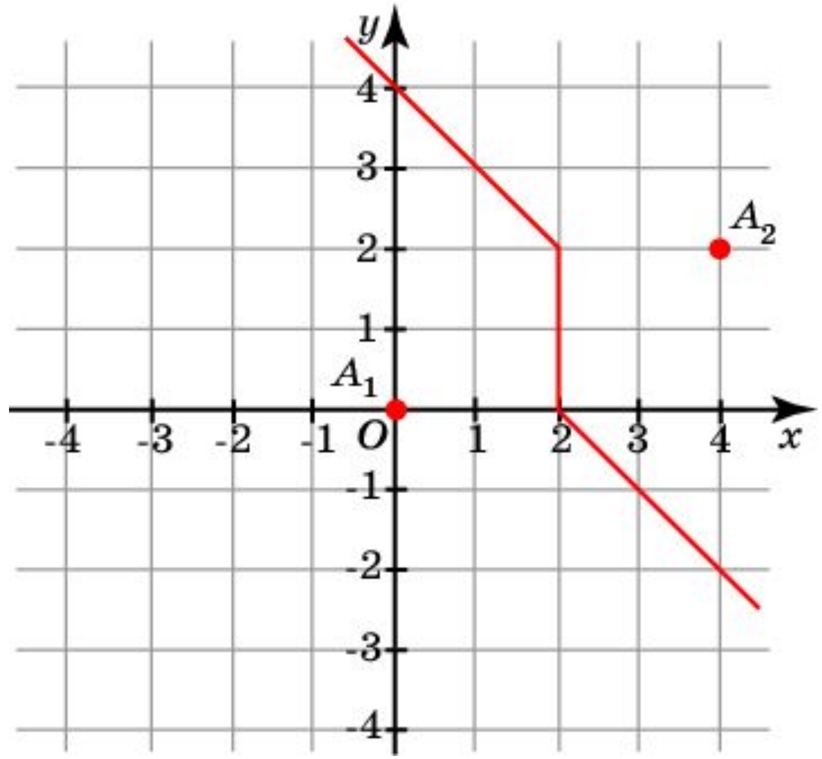
Упражнение 8

Для расстояния на координатной плоскости, которое для точек $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ выражается формулой $d(A_1, A_2) = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$, изобразите серединный перпендикуляр к отрезку A_1A_2 для точек:

а) $A_1(0, 0)$, $A_2(2, 2)$;

б) $A_1(0, 0)$, $A_2(0, 2)$;

в) $A_1(0, 0)$, $A_2(4, 2)$;



Ответ: а)

Ответ: б)

Ответ: в)