•Решение задач с монетами

21. **В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.**

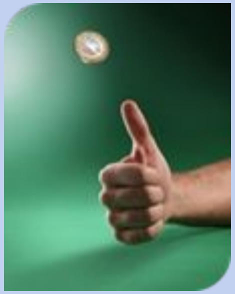
Решение

Ответ: 

I способ (метод перебора комбинаций)

Монету бросают 2 раза.

Обозначения: О – выпадение орла, Р – выпадение решки, {О Р}- выпадение орла в первом броске, решки – во втором.

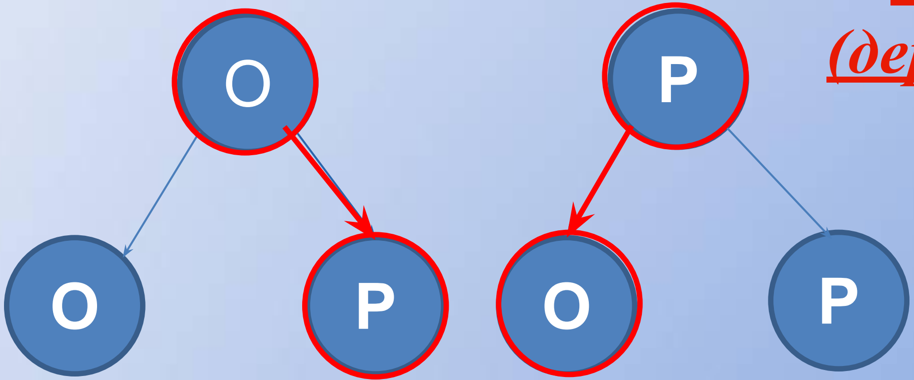


$n = 4$ – число всех возможных исходов:

$m = 2$ – число благоприятных исходов (выпадение орла ровно один раз)

{О О}
{О Р}
{Р О}
{Р Р}

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{4} = 0{,}5$$



II способ

(дерево возможных вариантов)

$m = 4$ $n = 2$

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{2}{4}=0,5$$

IIIспособ

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B),$$

*где событие **C** – орел выпал в двух испытаниях ровно 1 раз; событие **A** – орел выпал в первом испытании и не выпал во втором; событие **B** – орел выпал во втором испытании и не выпал в первом;*

$p = ½$– вероятность выпадения орла в одном испытании,
$q =1 – ½ = ½$ – вероятность не выпадения орла (выпадения решки).

$$P(A)=p\cdot q=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P(B)=q\cdot p=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$P(C)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}=0,5$$

IVспособ

По формуле Бернулли

$$P(A)=C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$P(A)=\frac{C_n^k}{2^n}$$

вероятность одного успеха (к=1) в двух испытаниях (n=2), если p = ½ – вероятность выпадения орла в одном испытании, q =1 – ½ = ½ – вероятность не выпадения орла (выпадения решки).

$$P(A)=C_2^1 p^1 q^{2-1}=\frac{2!}{1!(2-1)!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

Или по второй формуле:

$$P(A)=\frac{C_2^1}{2^2}=\frac{2}{4}=0{,}5.$$

Ответ: 0,5

22. ***Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда «Меркурий» играет по очереди с командами «Марс», «Юпитер», «Уран». Найти вероятность того, что во всех матчах право владеть мячом получит команда «Меркурий».***

Решение

Ответ:

I способ (перебора комбинаций)

Монету бросают 3 раза.
Для команды «Меркурий» возможные исходы в трех бросках →

{О О О}
{Р О О}
{О Р О}
{О О Р}
{Р Р О}
{Р О Р}
{О Р Р}
{Р Р Р}

$n = 8$ – число всех возможных исходов;

$m = 1$ – число благоприятных исходов (выпадение орла в трех бросках).

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{8}=0{,}125$$

II способ

По формуле Бернулли *вероятность трех успехов (к = 3) в трех испытаниях (n = 3):*

$$P(A) = C_n^k p^k q^{n-k} = C_3^3 p^3 q^{3-3} = \frac{3!}{3!(3-3)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

III способ

Применим правило умножения вероятностей независимых событий.

Вероятность выпадения орла в каждом случае равна ½. Значит, вероятность того, что орел выпадет все три раза, равна:

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Ответ: 0,125

23. ***Перед началом матча по футболу судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд будет первой владеть мячом. Команда «Байкал» играет по очереди с командами «Амур», «Енисей», «Иртыш». Найти вероятность того, что команда «Байкал» будет первой владеть мячом только в игре с «Амуром».***

Ответ:

Решение

Монету бросают 3 раза.
Для команды «Байкал» возможные исходы в трех бросках →

{О О О}
{Р О О}
{О Р О}
{О О Р}
{Р Р О}
{Р О Р}
{О Р Р}
{Р Р Р}

$n = 8$ – число всех возможных исходов;

$m = 1$ – число благоприятных исходов (выпадение орла в первой игре).

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Ответ: 0,125

24. ***У Пети в кармане лежат шесть монет: четыре монеты по рублю и две монеты по два рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что теперь две двухрублевые монеты лежат в одном кармане.***

Ответ:

Решение

Iспособ (метод перебора вариантов):

Пронумеруем монеты: рублевые – 1, 2, 3, 4;
двухрублевые – 5, 6.

n = 20 – *число всех исходов*

Взять три монеты можно так:
(числа в порядке возрастания, чтобы не пропустить комбинацию) →

m = 8 – *число благоприятных исходов (комбинации, в которых монеты 5 и 6 (двухрублевые) не взяты или взяты обе)*

{123}	{234}
{124}	{235}
{125}	{236}
{126}	{245}
{134}	{246}
{135}	{256}
{136}	{345}
{145}	{346}
{146}	{356}
{156}	{456}

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{8}{20}=0,4$$

I способ (комбинаторный):

P(C) = P(A) + P(B), где событие C – двухрублевые монеты лежат в одном кармане;

событие A – двухрублевые монеты остались в кармане, а переложил рублевые;

событие B – переложил обе двухрублевые монеты и одну рублевую;

события A и B несовместные.

$$P(A) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = 0{,}2$$

$$P(B) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = 0{,}2$$

$$P(C) = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$$

III способ (непосредственного вычисления вероятности):

Монеты окажутся в одном кармане, если переложены три рублевые или две рублевые и одна двухрублевая монета. Переложить их последовательно можно четырьмя способами (обозначения: рублевая – 1, двухрублевая – 2) :

1 1 1

$$P_1 = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$$

1 2 2

$$P_2 = \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{15}$$

2 2 1

$$P_3 = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{1}{15}$$

2 1 2

$$P_4 = \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{15}$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{6}{15} = 0{,}4$$

Ответ: 0,4

25. ***У Пети в кармане лежат шесть монет: четыре монеты по рублю и две монеты по два рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то три монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что теперь две двухрублевые монеты лежат в разных карманах.***

Ответ:

Решение

Iспособ (метод перебора вариантов):

Пронумеруем монеты: рублевые – 1, 2, 3, 4;
двухрублевые – 5, 6.

$n = 20$ – число всех исходов

Взять три монеты можно так:
(числа в порядке возрастания,
чтобы не пропустить комбинацию) →

$m = 12$ – число благоприятных исходов
(комбинации, в которых монеты 5 и 6
(двухрублевые) взяты по одной)

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{12}{20}=0,6$$

{123}	{234}
{124}	{235}
{125}	{236}
{126}	{245}
{134}	{246}
{135}	{256}
{136}	{345}
{145}	{346}
{146}	{356}
{156}	{456}

IIспособ (комбинаторный)

Событие А - переложили две рублевые монеты и одну двухрублевую.

$$P(A)=\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=0{,}6$$

III способ

Монеты окажутся в разных карманах, если переложены две рублевые и одна двухрублевая монета. Переложить их последовательно можно тремя способами:,

1 1 2 $P_1=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{1}{5}=0{,}2$

1 2 1 $P_2=\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{5}=0{,}2$

2 1 1 $P_3=\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{5}=0{,}2$

$$P=P_1+P_2+P_3=0{,}2+0{,}2+0{,}2=0{,}6$$

Ответ: 0,6

26. ***Найти вероятность того, что произведение трех последних цифр случайно выбранного телефонного номера четно .***

Решение ***Ответ:*** 

I способ

Событие А - произведение цифр четно;
событие В - четная только 1 цифра;
событие С - две цифры четные, одна – нечетная;
событие D - все три цифры – четные.
Всего цифр десять: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.
Из них пять цифр – четные. Другие пять цифр – нечетные.
Вероятность того, что цифра четная – $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$,
вероятность, что цифра нечетная, тоже $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ ***для любой из трех цифр, т.к. цифры могут повторяться.***

Событие A – произведение цифр четно;
событие B – четная только 1 цифра;
событие C – две цифры четные, одна – нечетная;
событие D – все три цифры – четные.
Всего цифр десять: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.
Из них пять цифр – четные. Другие пять цифр – нечетные.
Вероятность того, что цифра четная – $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$,
вероятность, что цифра нечетная, тоже $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ для любой из трех цифр, т.к. цифры могут повторяться.

II способ

Событие A – произведение цифр четно;
событие B – четная только 1 цифра;
событие C – две цифры четные, одна – нечетная;
событие D – все три цифры – четные.
Всего цифр десять: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.
Из них пять цифр – четные. Другие пять цифр – нечетные.
Вероятность того, что цифра четная – $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$,
вероятность, что цифра нечетная, тоже $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ для любой из

$m = (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot 3 + (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot 3 + (5 \cdot 5 \cdot 5) = 875$

$(5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot 3$ – количество исходов, когда одна цифра четная, а две другие нечетные (для каждой цифры исходов – 5, вариантов расположения – 3).

$(5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot 3$ – количество исходов, когда две цифры четные, а одна – нечетная,

$5 \cdot 5 \cdot 5$ – количество исходов, когда все три цифры – четные.

$n = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ – количество всех исходов (для каждой цифры – 10)

Событие A – произведение цифр четно;
событие B – четная только 1 цифра;
событие C – две цифры четные, одна – нечетная;
событие D – все три цифры – четные.
Всего цифр десять: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.
Из них пять цифр – четные. Другие пять цифр – нечетные.
Вероятность того, что цифра четная – $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$,
вероятность, что цифра нечетная, тоже $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ для любой из
трех цифр, т.к. цифры могут повторяться.

III способ

Событие A – произведение цифр четно;
событие B – четная только 1 цифра;
событие C – две цифры четные, одна – нечетная;
событие D – все три цифры – четные.
Всего цифр десять: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.
Из них пять цифр – четные. Другие пять цифр – нечетные.
Вероятность того, что цифра четная – $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$,
вероятность, что цифра нечетная, тоже $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ для любой из
трех цифр, т.к. цифры могут повторяться.

Событие A – произведение цифр четно;
событие B – четная только 1 цифра;
событие C – две цифры четные, одна – нечетная;
событие D – все три цифры – четные.
Всего цифр десять: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.
Из них пять цифр – четные. Другие пять цифр – нечетные.
Вероятность того, что цифра четная – $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$,
вероятность, что цифра нечетная, тоже $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ для любой из
трех цифр, т.к. цифры могут повторяться.

Событие A – произведение цифр четно;
событие B – четная только 1 цифра;
событие C – две цифры четные, одна – нечетная;
событие D – все три цифры – четные.
Всего цифр десять: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.
Из них пять цифр – четные. Другие пять цифр – нечетные.
Вероятность того, что цифра четная – $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$,
вероятность, что цифра нечетная, тоже $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ для любой из
трех цифр, т.к. цифры могут повторяться.

IV способ

Выбор четной или нечетной цифры можно сравнить с выпадением орла или решки при подбрасывании монеты несколько раз с такой же вероятностью. Тогда выбор трех нечетных цифр аналогичен выпадению трех решек в трех испытаниях

Событие A – произведение цифр четно;
событие B – четная только 1 цифра;
событие C – две цифры четные, одна – нечетная;
событие D – все три цифры – четные.
Всего цифр десять: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.
Из них пять цифр – четные. Другие пять цифр – нечетные.
Вероятность того, что цифра четная – $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$,
вероятность, что цифра нечетная, тоже $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ для любой из
трех цифр, т.к. цифры могут повторяться.

Событие A – произведение цифр четно;
событие B – четная только 1 цифра;
событие C – две цифры четные, одна – нечетная;
событие D – все три цифры – четные.
Всего цифр десять: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.
Из них пять цифр – четные. Другие пять цифр – нечетные.
Вероятность того, что цифра четная – $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$,
вероятность, что цифра нечетная, тоже $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ для любой из
трех цифр, т.к. цифры могут повторяться.

Ответ: 0,875