# ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

***ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. ДИНАМИКА***

ЛЕКЦИЯ 9

# Цель лекции

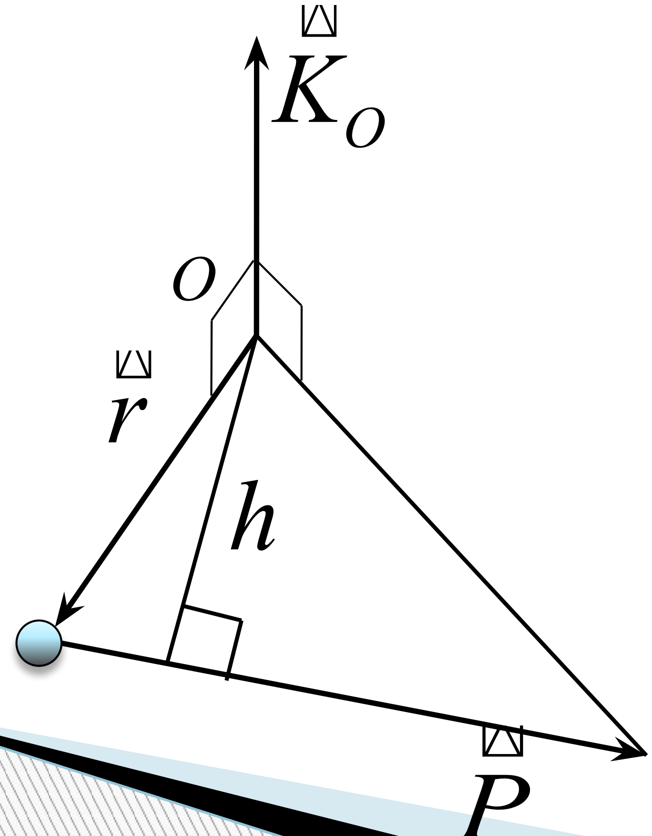
**Понять, что такое момент импульса материальной системы, сформулировать теорему и научиться решать задачи с использованием теоремы.**

# План лекции

- **Момент импульса материальной точки**
- **Момент импульса механической системы**
- **Момент импульса твердого тела при поступательном и вращательном движении**
- **Теорема об изменении момента импульса системы**

# МОМЕНТ ИМПУЛЬСА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ (ПОВТОРЕНИЕ)

Момент импульса материальной точки относительно некоторого центра О определяется равенствами




$$\boxed{\vec{K}_0 = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{P}}$$

$$\boxed{K_0 = \pm mvh}$$

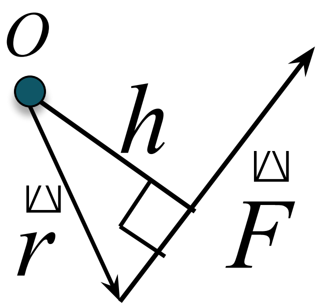
$$K_x = \sum m_k \left( y_k v_{kz} - z_k v_{ky} \right)$$

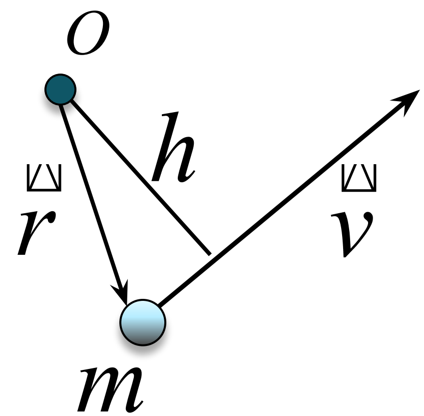
$$\vec{K}_O = K_x \vec{i} + K_y \vec{j} + K_z \vec{k}$$

# МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ТОЧКИ

$$\boxed{M_O(F)}$$

$$\boxed{M_O(mv) \leftrightarrow K_O}$$




$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

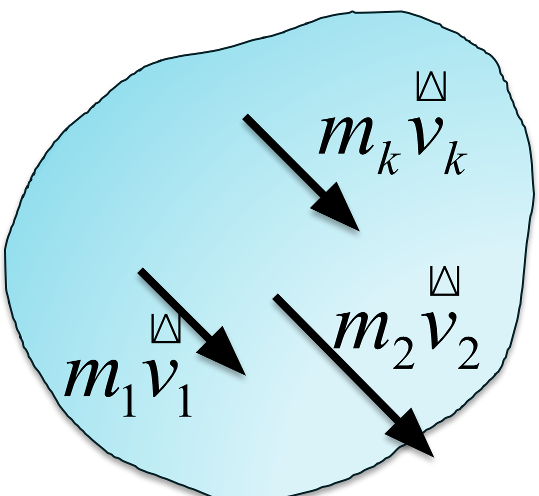
$$\vec{K}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$M_O(\vec{F}) = \pm Fh$$

$$K_O = \pm mvh$$

# МОМЕНТ ИМПУЛЬСА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ (МС)

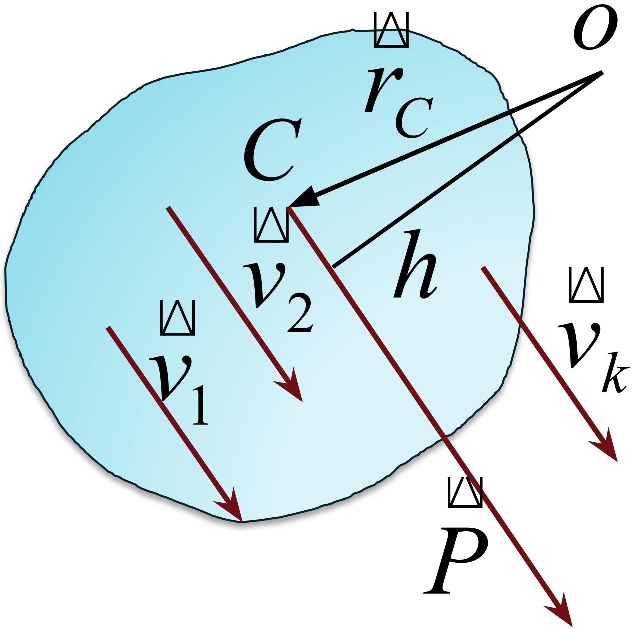
Момент импульса МС относительно центра О – это сумма моментов (или главный момент) импульсов всех материальных точек, входящих в систему, относительно того же центра




$$\vec{P} = \sum m_k \vec{v}_k$$

$$\boxed{\vec{K}_O = \sum \vec{K}_{Ok} = \sum \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k}$$

# МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ



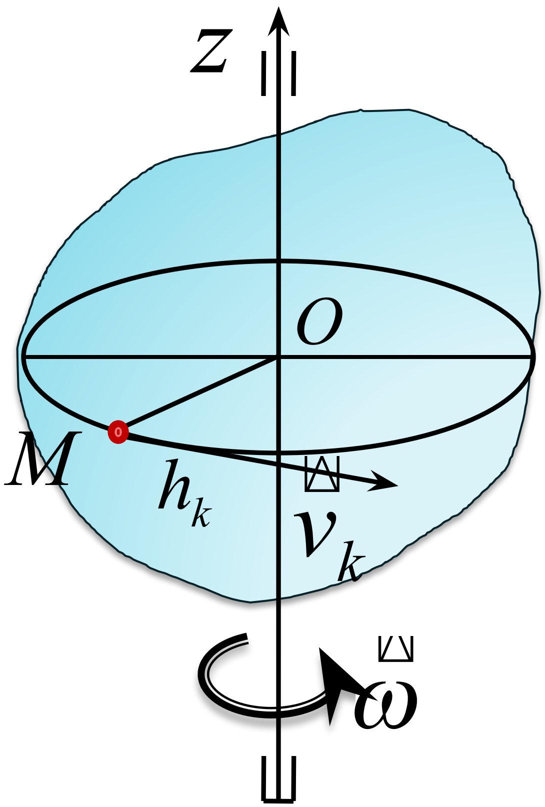

$$K_O = \sum_{k=1}^{n} K_{Ok} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k =$$

$$= \left( \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k m_k \right) \times \vec{v} = M\vec{r}_C \times \vec{v}$$

$$\vec{P} = M\vec{v}_C \Rightarrow \vec{K}_O = \vec{r}_C \times \vec{P}$$

$$K_O = \pm Mvh$$

# МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ




$$K_Z = \sum m_k v_k h_k \qquad v_k = \omega h_k$$

$$K_Z = \sum m_k \omega h_k^2$$

$$K_Z = \left(\sum m_k h_k^2\right)\omega$$

$$\sum m_k h_k^2 = J_Z \Rightarrow K_Z = J_Z \omega$$

# ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА МС

Полная производная по времени вектора момента импульса МС, вычисленного относительно неподвижного центра, равна главному моменту всех внешних сил относительно того же центра

$$1)\ \frac{d\vec{K}_{Ok}}{dt} = \vec{M}_O\left(\vec{F}_k^e\right) + \vec{M}_O(\vec{F}_k^i)$$

$$2)\ \frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}^e) + \sum \vec{M}_O(\vec{F}^i)$$

$$\sum \vec{M}_O(\vec{F}^i) = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}^e)$$

# ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА МС

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}^e) \quad \Big| \cdot dt$$

$$\int d\vec{K}_O = \int \sum \vec{M}_O(\vec{F}^e) dt$$

$$\boxed{\vec{K}_{O\kappa} - \vec{K}_{O\text{н}} = \sum \int \vec{M}_O(\vec{F}^e) dt}$$

$$K_{Z\kappa} - K_{Z\text{н}} = \sum \int M_Z(F^e) dt$$

# СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА МС

Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему относительно данного центра равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этого центра есть величина постоянная

$$\sum \vec{M}_O\left(\vec{F}_k^e\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{K}_O = const$$

Если сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему относительно какой-нибудь оси равна нулю, то главный момент количеств движения системы относительно этой оси будет величиной постоянной

$$\sum M_Z\left(F_k^e\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad K_Z = const$$

# ЗАДАЧА

*Дано*

$m_г = 1кг$

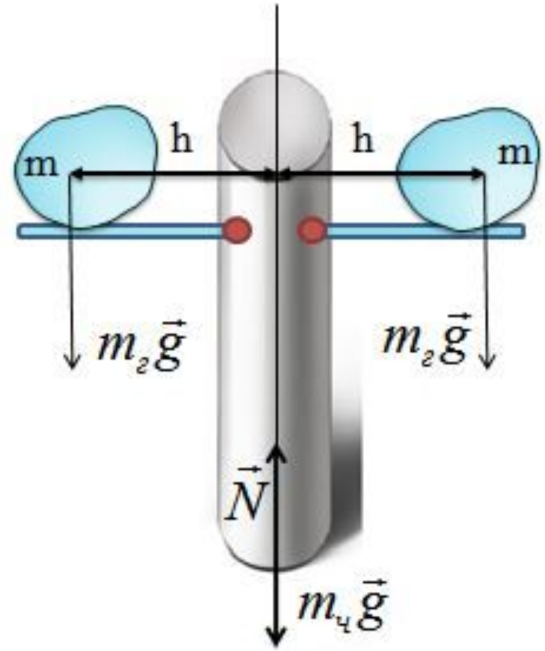
$m_ч = 89кг$

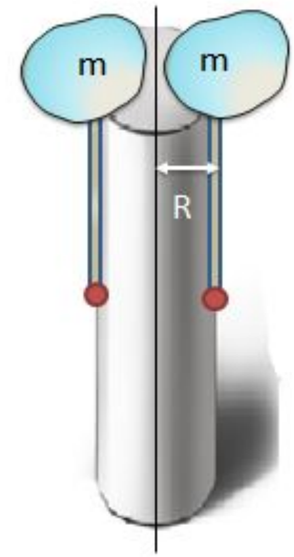
$h = 0.75м$

$R = 0.15м$

$\frac{\omega_2}{\omega_1} = ?$

$$\boxed{\begin{aligned} K_Z &= J_Z\omega \\ J_Z &= \frac{mR^2}{2} \\ J_Z &= mh^2 \end{aligned}}$$



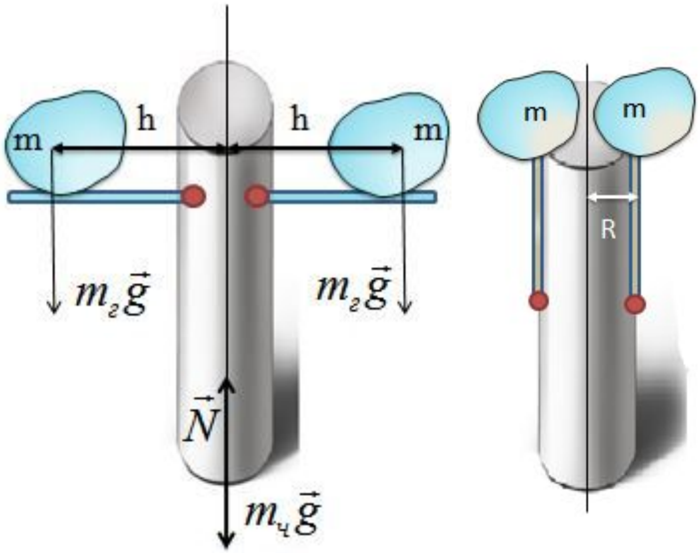




$$K_{Zк} - K_{Zн} = \sum M_Z(F^e)$$

$$\sum M_Z(F^e) = 0 \quad \Rightarrow \quad K_{Zк} = K_{Zн}$$

$$J_{Zк}\omega_к = J_{Zн}\omega_н$$

# ЗАДАЧА




1) Момент инерции человека:

$$J_{Zч} = \frac{m_ч R^2}{2} = \frac{89 \cdot (0{,}15)^2}{2} = 1 кг \cdot м^2$$

2) Момент инерции гири:

$$J_{Zг} = m_г h^2 = 1 \cdot (0{,}75)^2 = 0{,}56 кг \cdot м^2$$

3) Момент инерции в начальном положении: При h=0,75м; R=0,15м

$$J_{Zн} = J_{Zч} + 2J_{Zг} = 1 + 2 \cdot 0{,}56 = 2{,}12 \quad кг \cdot м^2$$

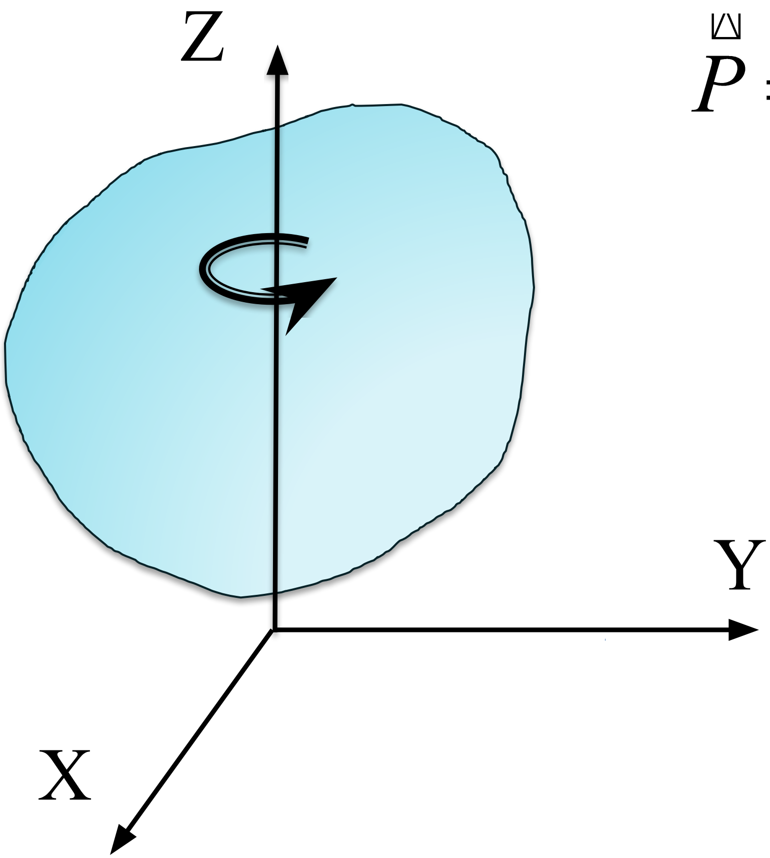
4) Момент инерции в конечном положении: При h=0м; R=0,15м

$$J_{Zк} = J_{Zч} = 1 \quad кг \cdot м^2$$

5) $$\frac{\omega_к}{\omega_н} = \frac{J_{zн}}{J_{zк}} = 2{,}1$$

# ВЕКТОР МОМЕНТА ИМПУЛЬСА ТВЕРДОГО ТЕЛА

## Вращение вокруг неподвижной оси



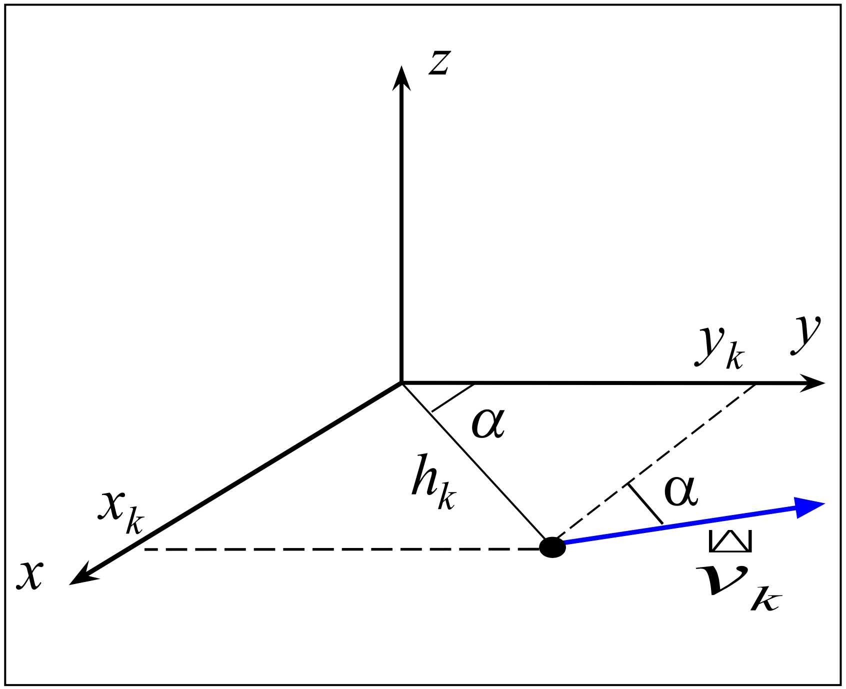

$$\vec{P} = M\vec{v} \quad \Rightarrow \quad K_Z = \pm J_Z \omega$$

Можно ли записать

$$\vec{K}_O = J_Z \vec{\omega} \quad ?$$

# ВЕКТОР МОМЕНТА ИМПУЛЬСА ТВЕРДОГО ТЕЛА

## Вращение вокруг неподвижной оси




$$v_{kx} = -\omega h_k \cos\alpha = -\omega h_k \frac{y_k}{h_k} = -\omega y_k$$

$$v_{ky} = \omega h_k \sin\alpha = \omega h_k \frac{x_k}{h_k} = \omega x_k$$

$$v_{kz} = 0$$

$$K_x = \sum_k m_k (y_k v_{kz} - z_k v_{ky}) = -(\sum_k m_k x_k z_k)\omega$$

$$\boxed{K_x = -J_{xz}\omega}$$

$$K_y = \sum_k m_k (z_k v_{kx} - x_k v_{kz}) = -(\sum_k m_k y_k z_k)\omega$$

$$\boxed{K_y = -J_{yz}\omega}$$

$J_{xz}, J_{yz}$ - центробежные моменты инерции