Кривые второго порядка

1. Эллипс.
2. Гипербола.
3. Парабола.

Определение

Кривыми второго порядка называются линии, уравнения которых являются уравнениями второй степени с двумя переменными.

Эллипс

Эллипсом называется линия, имеющая в некоторой системе координат уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где x и y – переменные;
a и b – положительные числа, $a \geq b$.

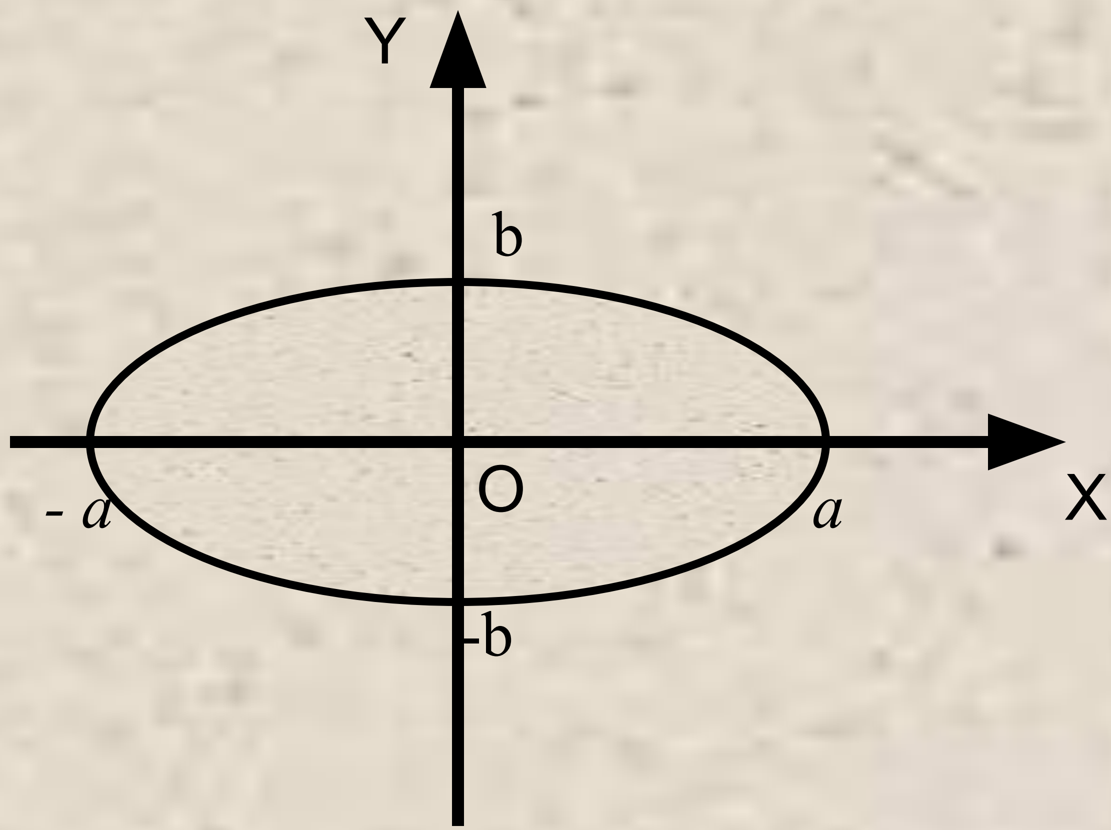
Преобразуем каноническое уравнение эллипса к одному из следующих видов:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

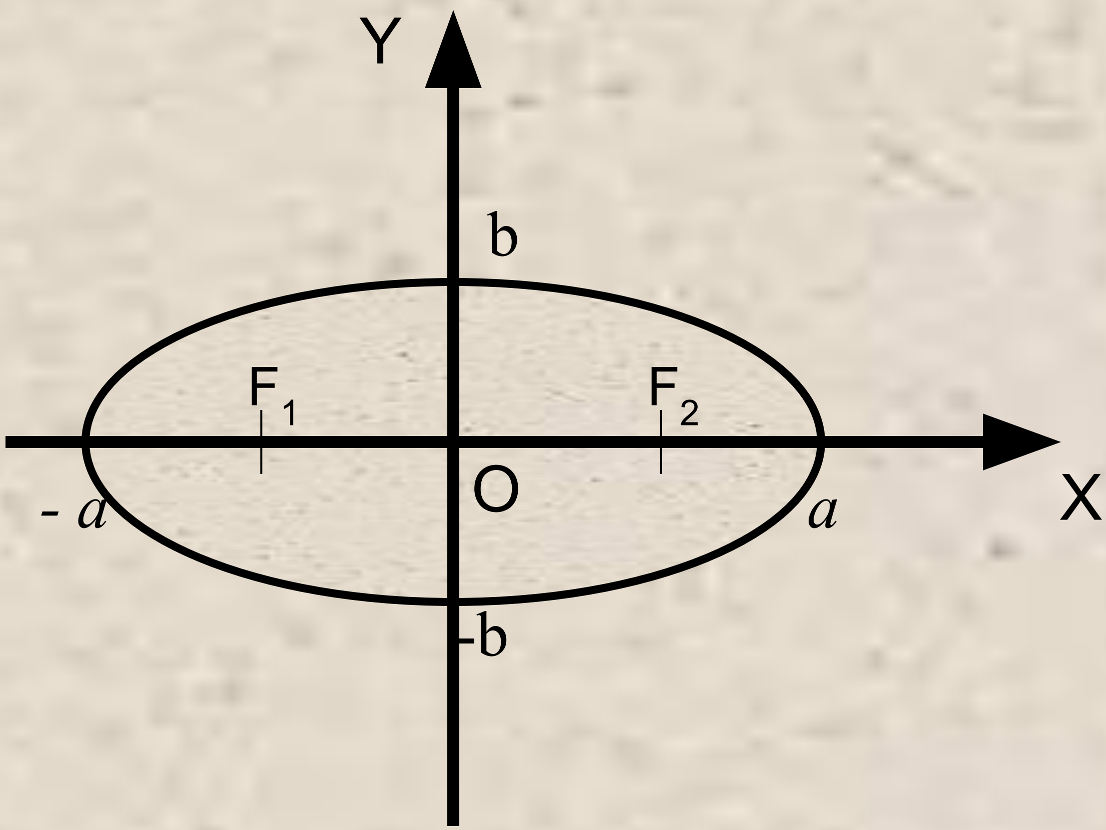
$$x \in [-a; a] \qquad y \in [-b; b]$$

2*a – большая ось,* 2b *– малая ось*

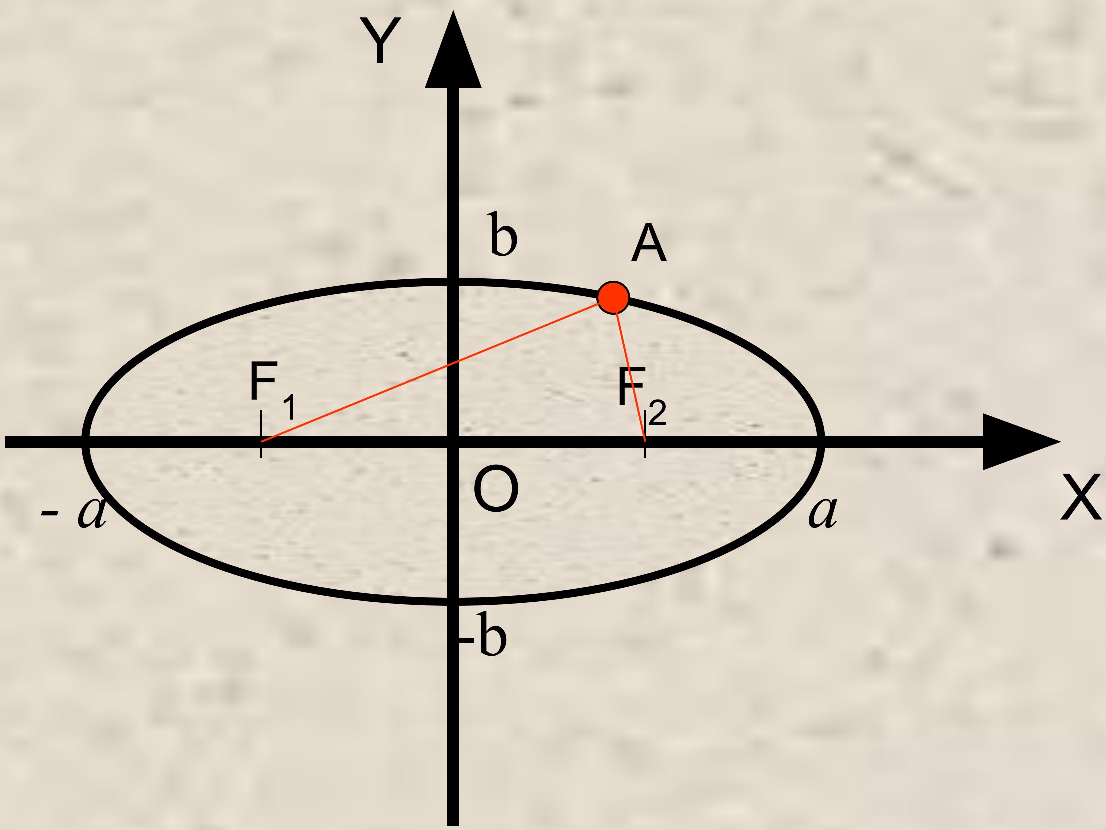
Эллипс симметричен относительно осей координат



Определение. Точки $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ называются фокусами эллипса.



Сумма расстояний от фокусов до любой точки эллипса есть величина постоянная, равная 2*a*.



Определение. Отношение расстояния между фокусами к большой оси эллипса называется его **эксцентриситетом**.

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \qquad 0 \le \varepsilon < 1$$

Частным случаем эллипса является окружность.

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad c = \sqrt{a^2 - a^2} = 0, \qquad \varepsilon = 0$$

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = R^2$$

Пример. Покажите, что уравнение

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$$

является уравнением окружности, и найдите её радиус.

Решение.

$$\left(x^2 + 2x + 1\right) - 1 + \left(y^2 - 6y + 9\right) - 9 - 15 = 0$$

$$\left(x + 1\right)^2 + \left(y - 3\right)^2 = 25$$

$$x_0 = -1, \qquad y_0 = 3, \qquad R = 5$$

Гипербола

Гиперболой называется линия, имеющая в некоторой системе координат уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где x и y – переменные;
a и b – положительные числа.

Преобразуем каноническое уравнение гиперболы к одному из следующих видов:

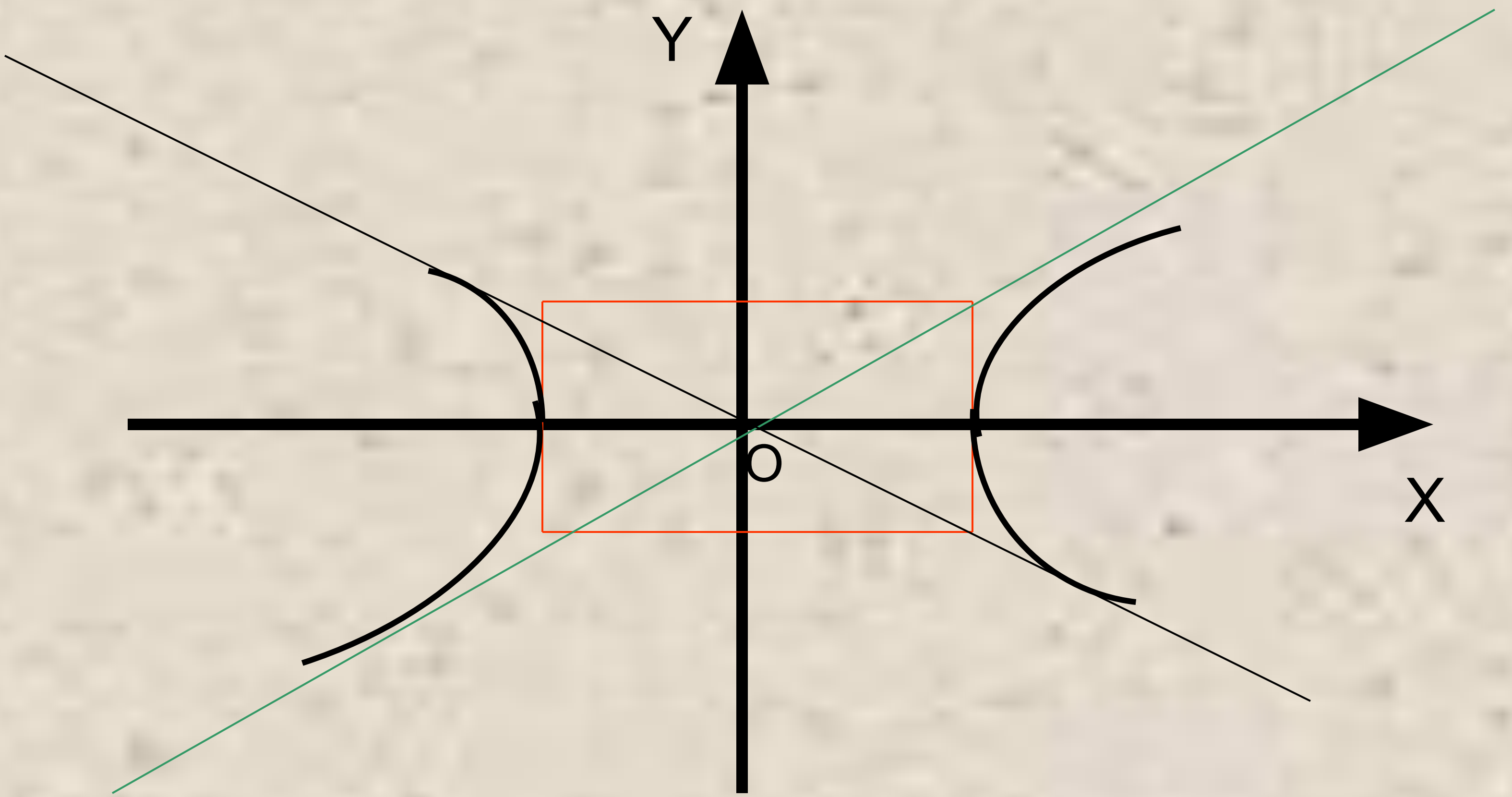
$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{y^2 + b^2}$$

$$x \in (-\infty; -a] \cup [a; \infty) \qquad y \in R$$

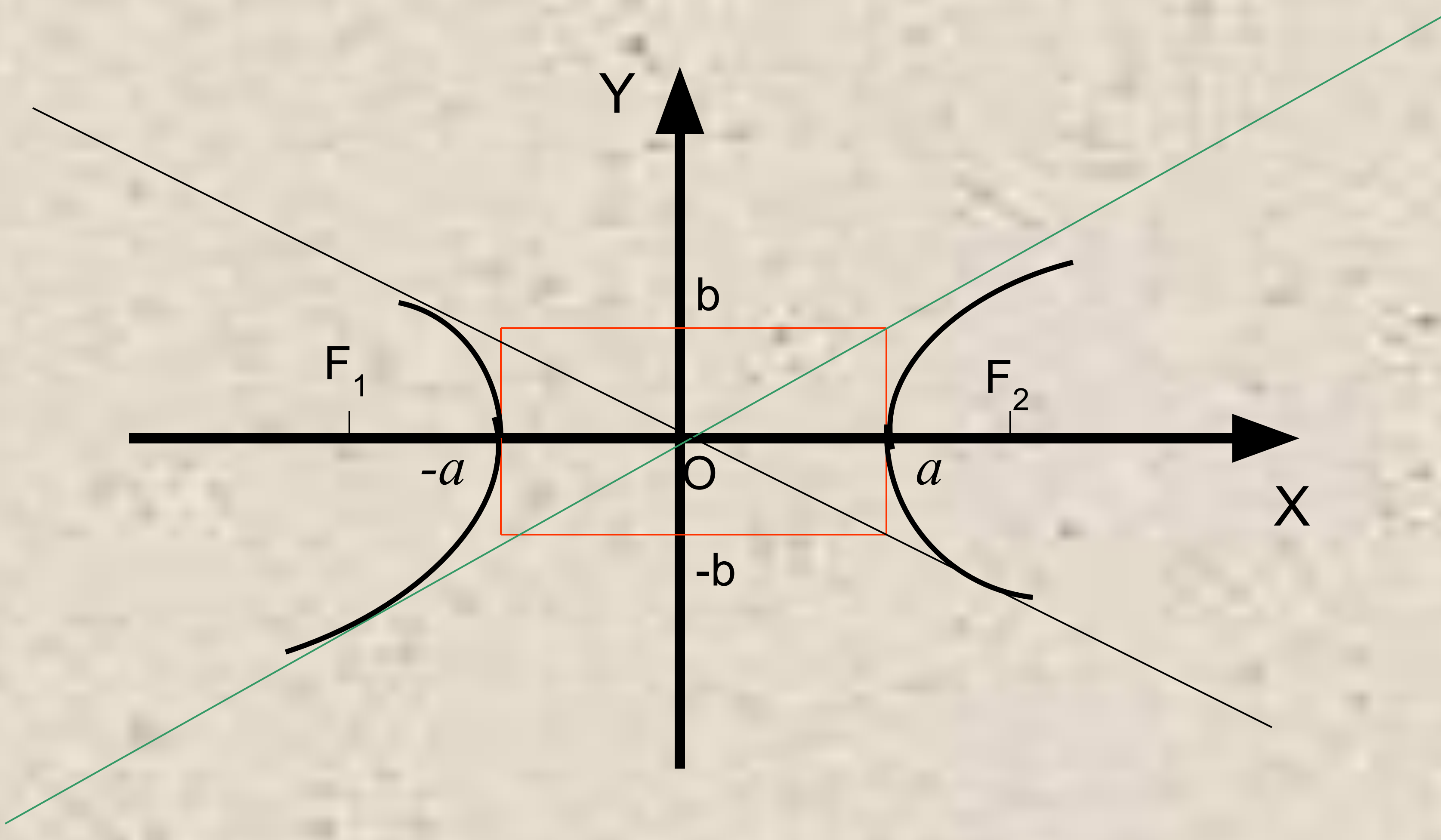
2*a – действительная ось,* 2b – *мнимая ось*

$y = \frac{b}{a}x$ *и* $y = -\frac{b}{a}x$ - *асимптоты*

Гипербола



Определение. Точки $F_1(-c; 0)$ и $F_2(c; 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ называются фокусами гиперболы.



Определение. Отношение расстояния между фокусами и действительной оси гиперболы называется его **эксцентриситетом**.

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \qquad \varepsilon > 1$$

Определение. Равносторонней называется гипербола у которой $a = b$.

$$y = \frac{k}{x}$$

Пример. Найти каноническое уравнение эллипса, фокусы которого совпадают с фокусами гиперболы

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

и эксцентриситет которого равен 0,5.

Решение.

$$c_Г = \sqrt{a_Г + b_Г} = \sqrt{16+9} = 5, \qquad \varepsilon = \frac{c}{a_э} = 0{,}5 \quad \textit{откуда} \quad a_э = 2c = 2\cdot 5 = 10$$

$$c = \sqrt{a_э^2 - b_э^2}, \quad 25 = 100 - b_э^2, \quad b_э^2 = 75.$$

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{75} = 1$$

Парабола

Определение. Параболой называется линия, имеющая в некоторой системе координат уравнение

$$y = ax^2 + bx + c$$

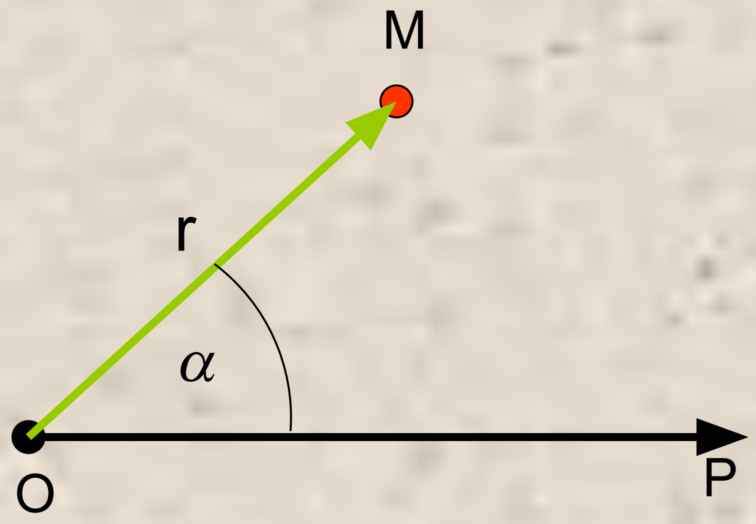
x и y – переменные;

a, b *и* c – действительные числа, $a \neq 0$

Преобразуем уравнение $y = ax^2 + bx + c$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$$

Полярная система координат

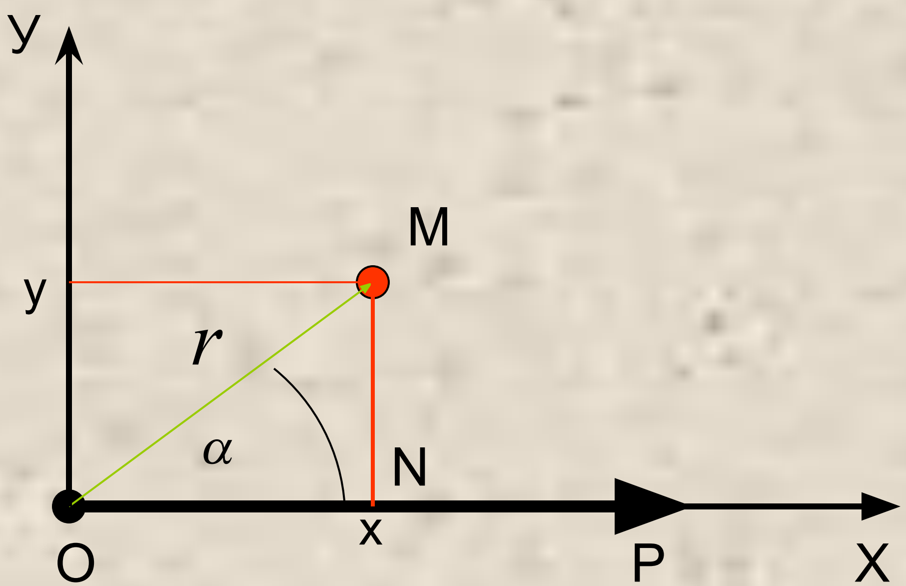


$$M(r;\alpha)$$

$$r \in [0;+\infty)$$

$$\alpha \in [0;2\pi]$$

Зависимость между полярными и прямоугольными координатами точки



$$\triangle OMN$$

$$x = r \cdot \cos\alpha$$

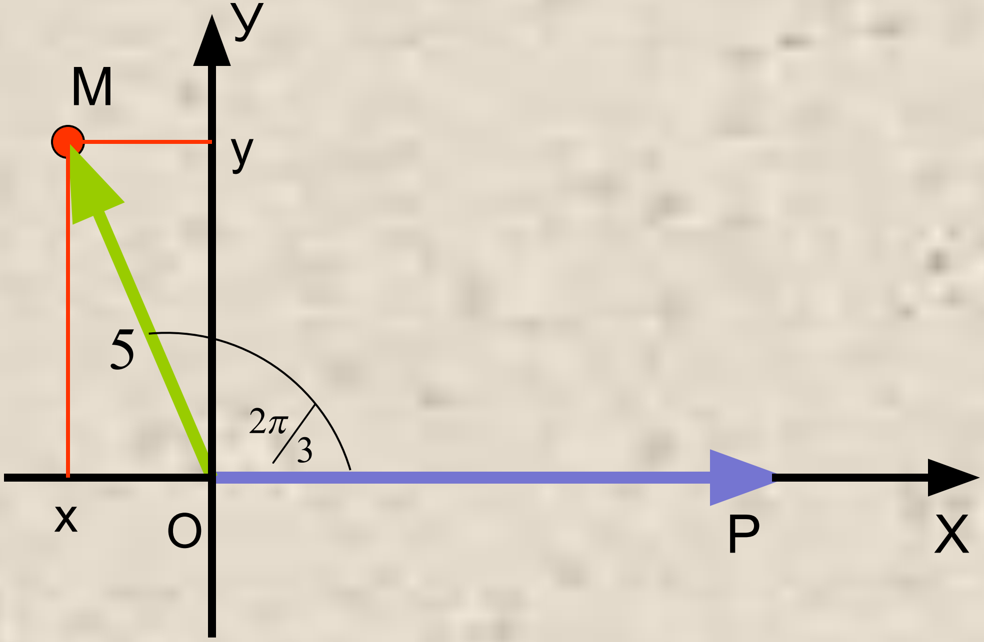
$$y = r \cdot \sin\alpha$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$tg\alpha = \frac{y}{x}$$

Пример. Найти декартовы координаты точки М, полярные координаты которой $(5;2\pi/3)$.

Решение.



$$x = r\cdot\cos\alpha$$

$$y = r\cdot\sin\alpha$$

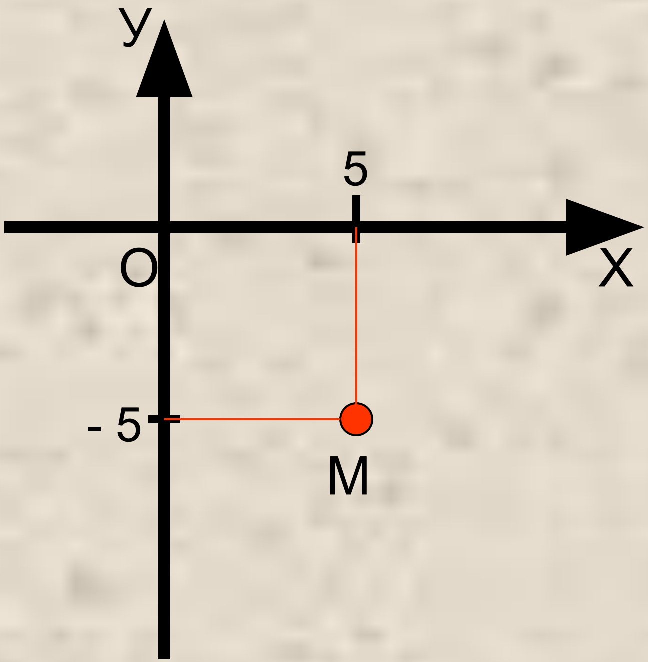
$$x = 5\cdot\cos\left(2\pi/3\right) = -\frac{5}{3}$$

$$y = 5\cdot\sin\left(2\pi/3\right) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$M\left(-\frac{5}{2};\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$$

Пример. Найти полярные координаты точки М, декартовы координаты которой (5; - 5).

Решение.



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$tg\alpha = \frac{y}{x}$$

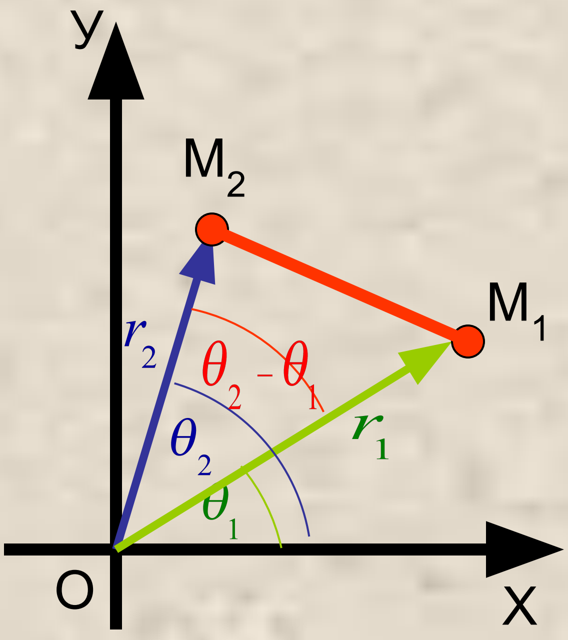
$$r = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$tg\alpha = \frac{-5}{5} = -1$$

$$\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$M\left(5\sqrt{2}; \frac{7\pi}{4}\right)$$

Расстояние между точками



$$M_1(x_1; y_1),\quad M_2(x_2; y_2)$$

$$x_1 = r_1\cos\theta_1;\qquad x_2 = r_2\cos\theta_2$$

$$y_1 = r_1\sin\theta_1;\qquad y_2 = r_2\sin\theta_2$$

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$|M_1M_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

Уравнение линии в полярной системе координат

Уравнение прямой линии: $Ar\cos\theta + Br\sin\theta + C = 0$

$$r = \frac{-C}{A\cos\theta + B\sin\theta}$$

Уравнение кривой второго порядка:

$$r = \frac{q}{1 - \varepsilon\cos\theta}; \quad \theta \in [0; 2\pi)$$