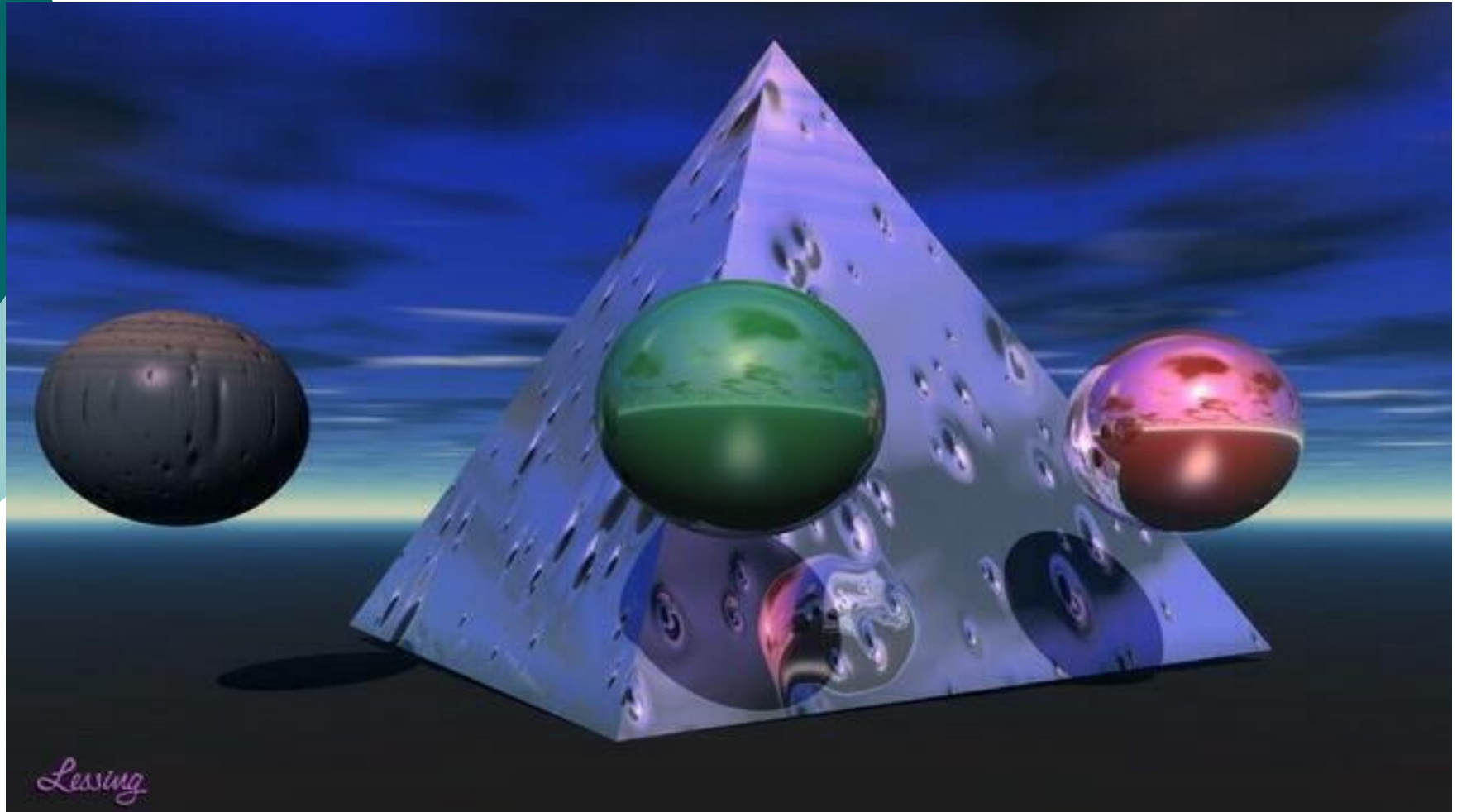
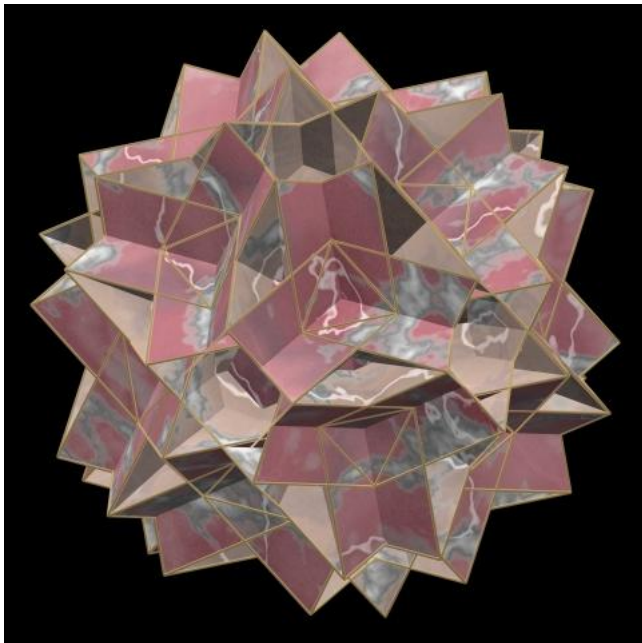
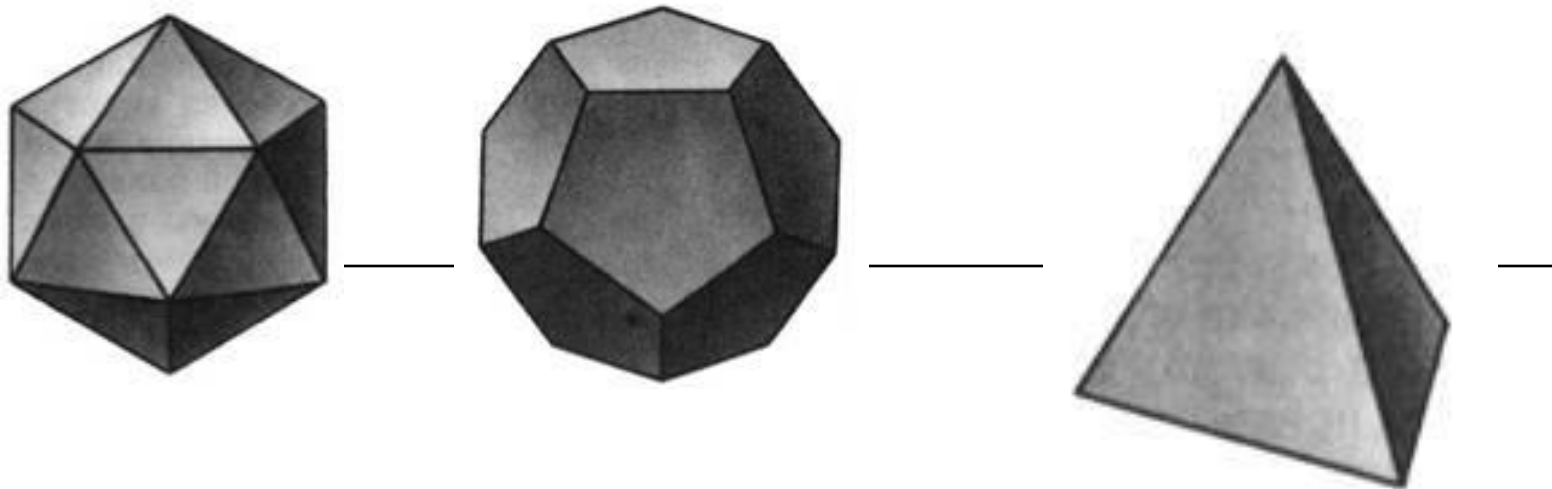


# Многогранники

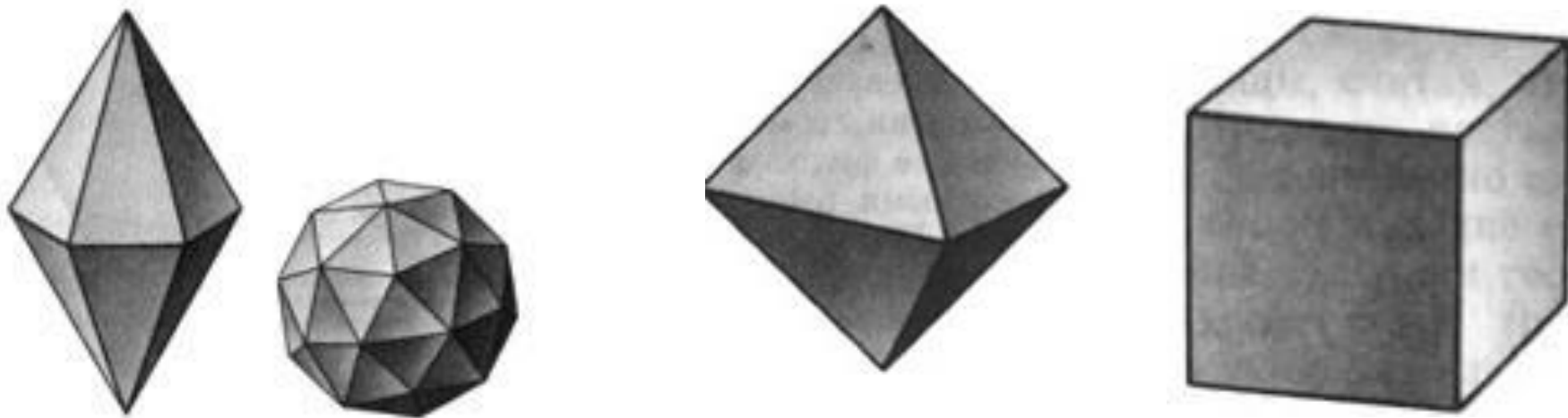


# Мир правильных многогранников.





**Многогранником** называется тело, граница которого является объединением конечного числа многоугольников.



# Многогранники

выпуклые

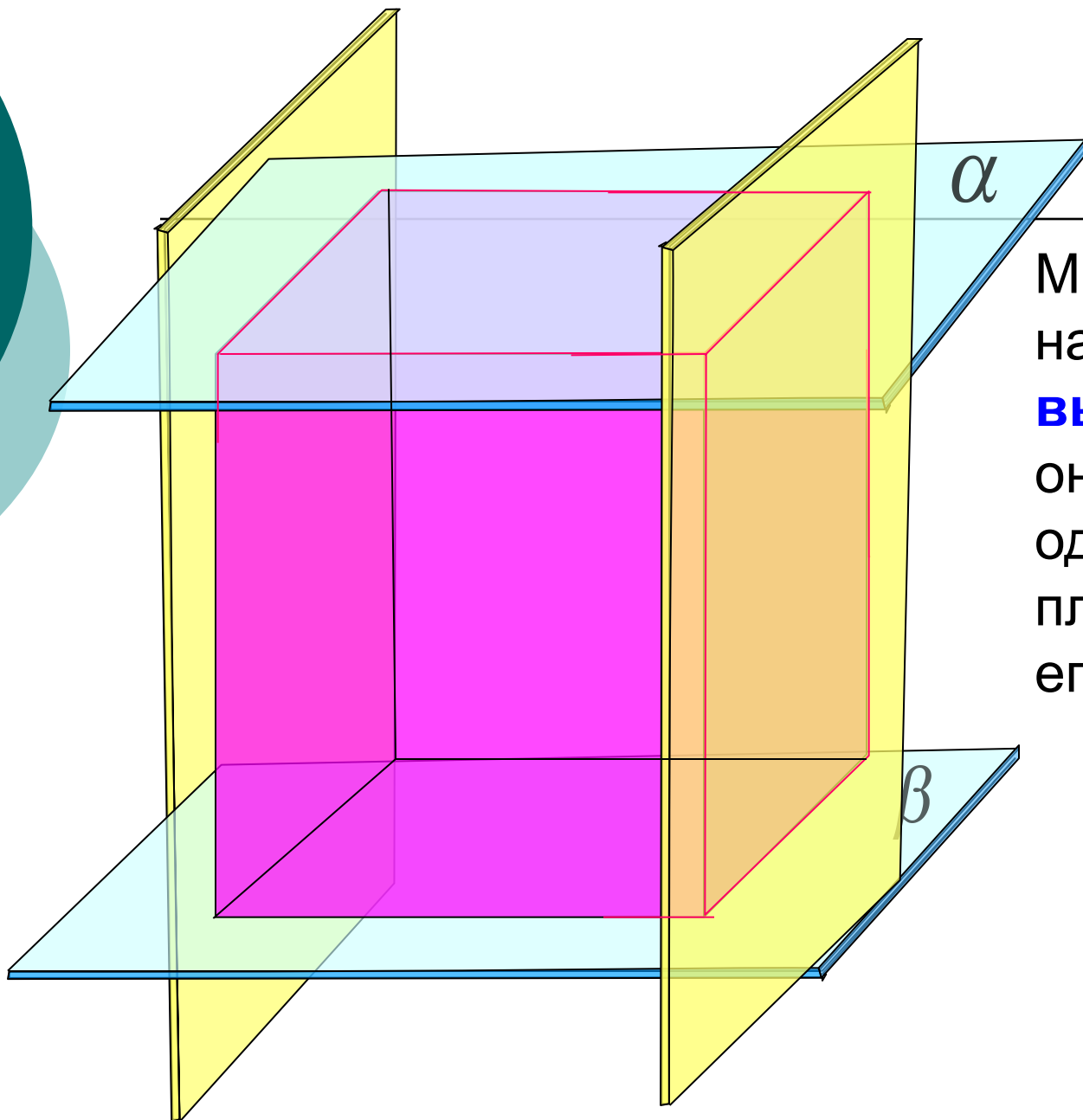
невыпуклые

Тела  
Платона

Тела  
Архимеда

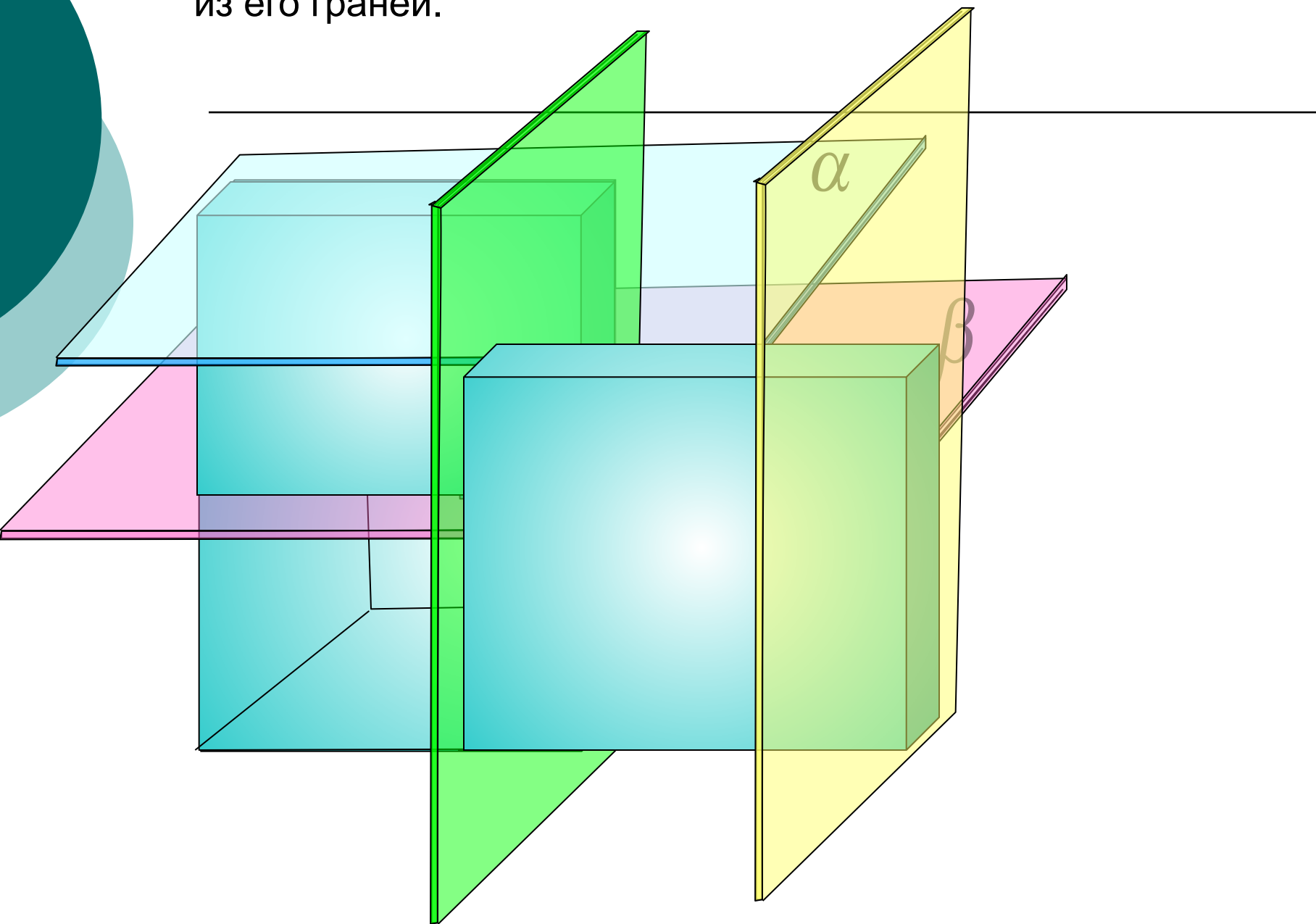
Тела  
Кеплера  
-  
Пуансо



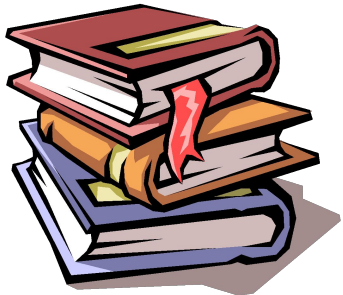


Многогранник называется **выпуклым**, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.

Невыпуклый многогранник – многогранник, расположенный по разные стороны от плоскости одной из его граней.



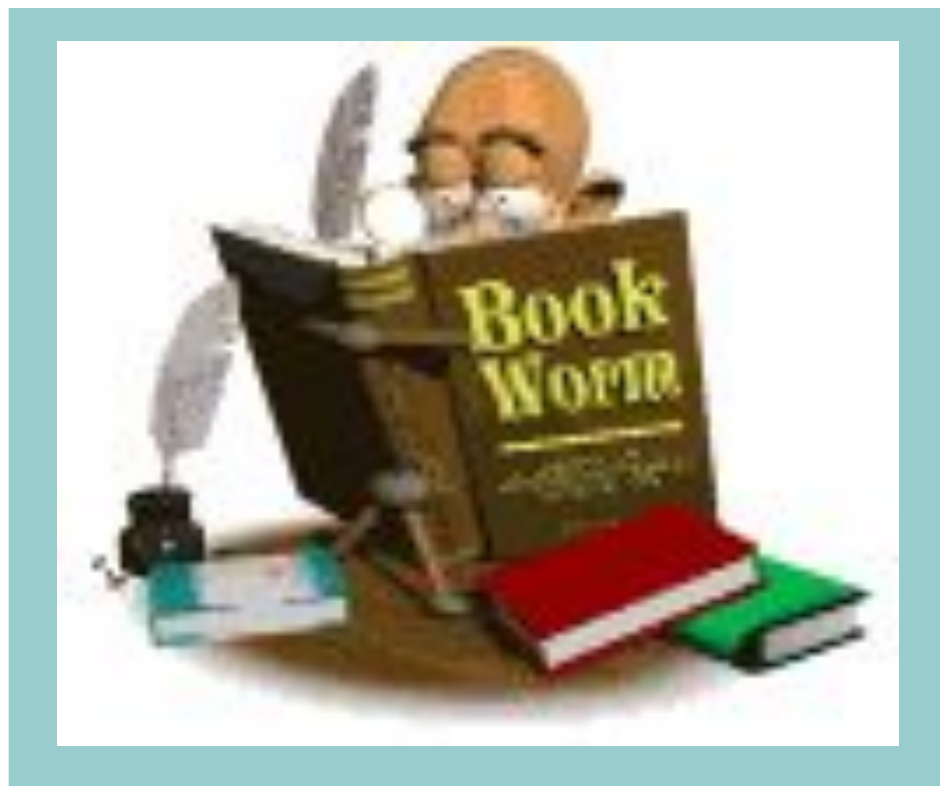
*Правильными  
многогранниками  
называют выпуклые  
многогранники, все грани и все  
углы которых равны, причем  
грани - правильные  
многоугольники.*



# *Правильные многогранники*

---

Сколько же их  
существует?





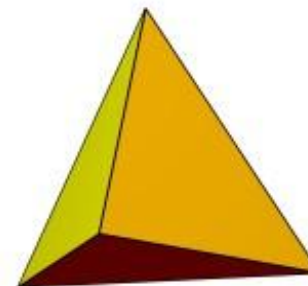
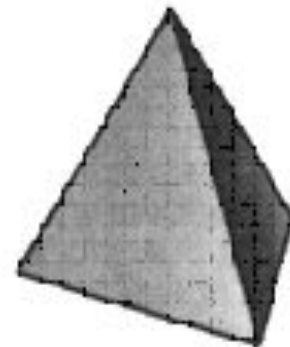
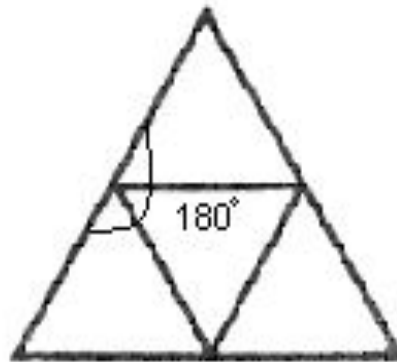
# Тетраэдр

---

*Сначала рассмотрим случай, когда грани многогранника - равносторонние треугольники. Поскольку внутренний угол равностороннего треугольника равен  $60^\circ$ , три таких угла дадут в развертке  $180^\circ$ .*

*Если теперь склеить развертку в многогранный угол, получится*

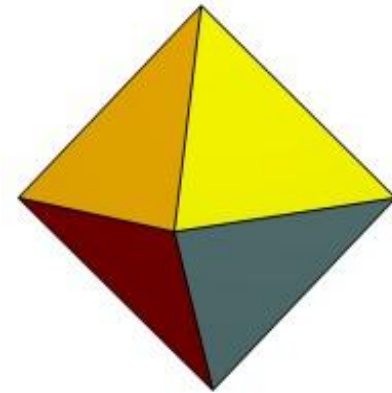
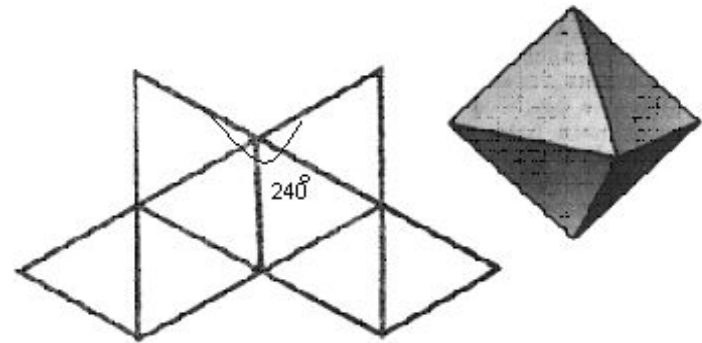
**тетраэдр** - многогранник, в каждой вершине которого встречаются три правильные треугольные грани.



# Октаэдр-

---

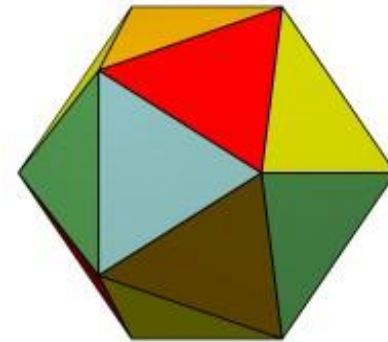
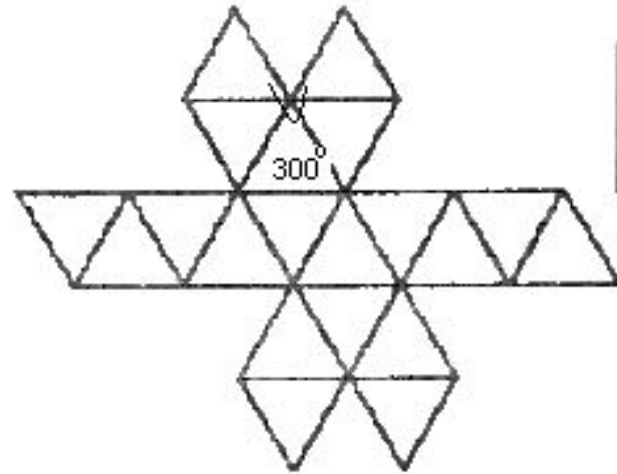
- Если добавить к развертке вершины еще один треугольник, в сумме получится  $240^\circ$ . Это развертка вершины октаэдра.
- Октаэдр-восьмигранник, тело, ограниченное восемью правильными треугольниками.




# Икосаэдр

Добавление пятого треугольника даст угол  $300^\circ$  - мы получаем развертку вершины икосаэдра.

- Икосаэдр-двадцатигранник, тело, ограниченное двадцатью равносторонними треугольниками





---

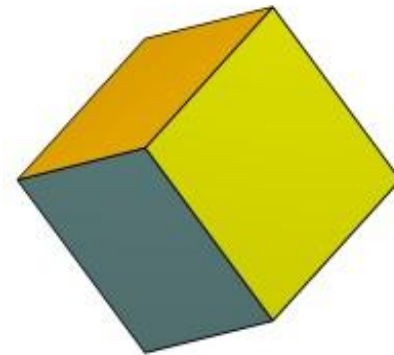
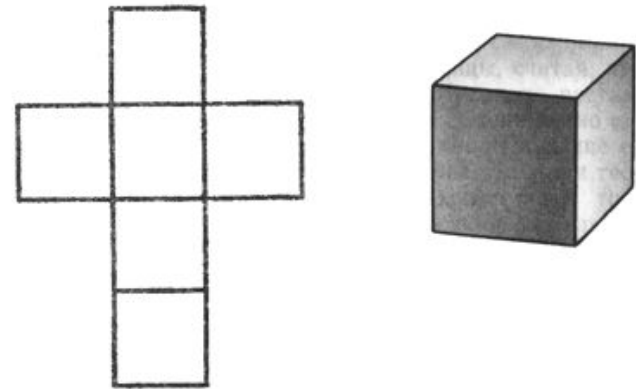
*Если же добавить еще один, шестой  
треугольник, сумма углов станет  
равной  $360^\circ$  - эта развертка,  
очевидно, не может  
соответствовать ни одному  
выпуклому многограннику.*

# Куб или правильный гексаэдр

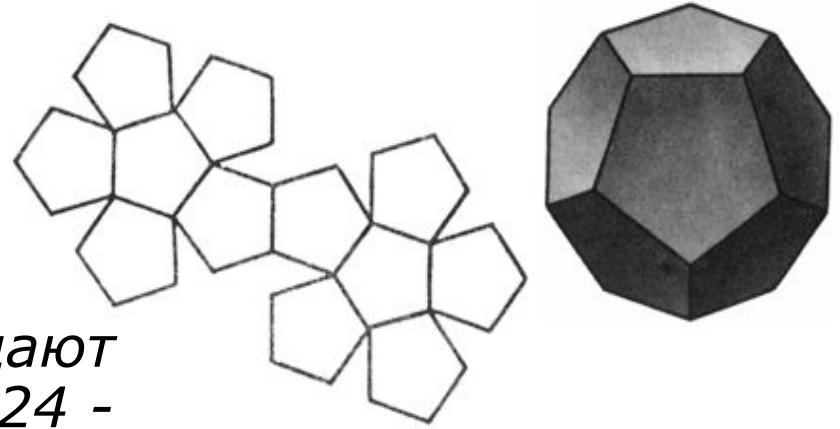
Теперь перейдем к квадратным граням. Развертка из трех квадратных граней имеет угол  $3 \times 90^\circ = 270^\circ$  - получается вершина **куба**, который также называют **гексаэдром**. Добавление еще одного квадрата увеличит угол до  $360^\circ$  - этой развертке уже не соответствует никакой выпуклый многогранник.

## Куб или правильный гексаэдр

- правильная четырехугольная призма с равными ребрами, ограниченная шестью квадратами.



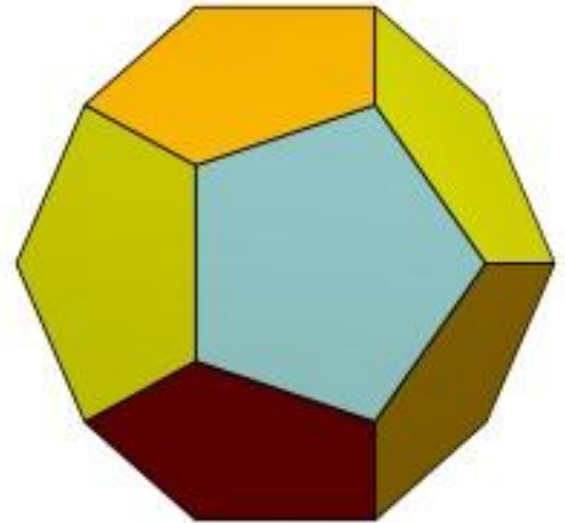
# Додекаэдр-




Три пятиугольные грани дают угол развертки  $3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$  - вершина **додекаэдра**. Если добавить еще один пятиугольник, получим больше  $360^\circ$  - поэтому останавливаемся.

## Додекаэдр-

двенадцатигранник, тело, ограниченное двенадцатью правильными многоугольниками.





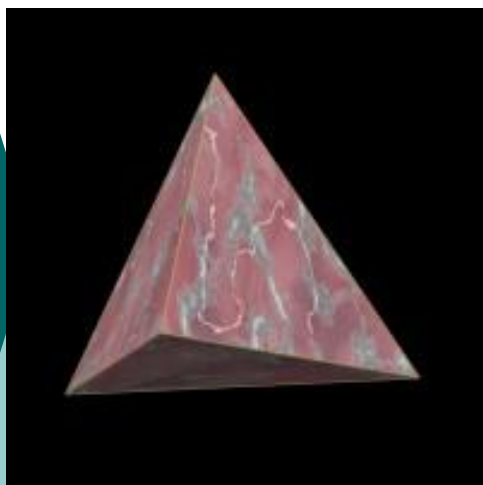
---

Для шестиугольников уже три грани дают угол развертки  $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$ , поэтому правильного выпуклого многогранника с шестиугольными гранями не существует. Если же грань имеет еще больше углов, то развертка будет иметь еще больший угол. Значит, правильных выпуклых многогранников с гранями, имеющими шесть и более углов, не существует.

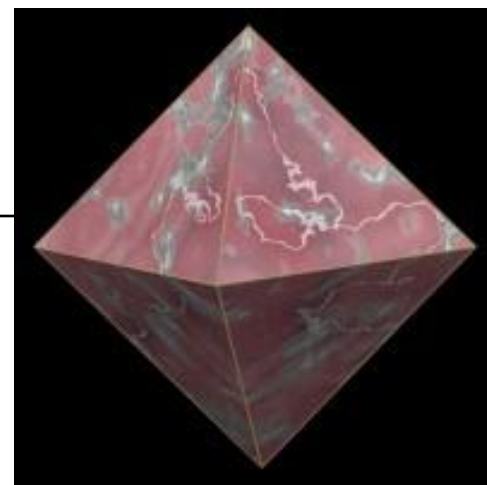
## Сделаем вывод:

- Мы убедились, что существует лишь пять выпуклых правильных многогранников - тетраэдр, октаэдр и икосаэдр с треугольными гранями, куб (гексаэдр) с квадратными гранями и додекаэдр с пятиугольными гранями.
- **Названия этих многогранников пришли из Древней Греции, и в них указывается число граней:**
  - «эдра» - грань
  - «тетра» - 4
  - «гекса» - 6
  - «окта» - 8
  - «икоса» - 20
  - «додека» - 12

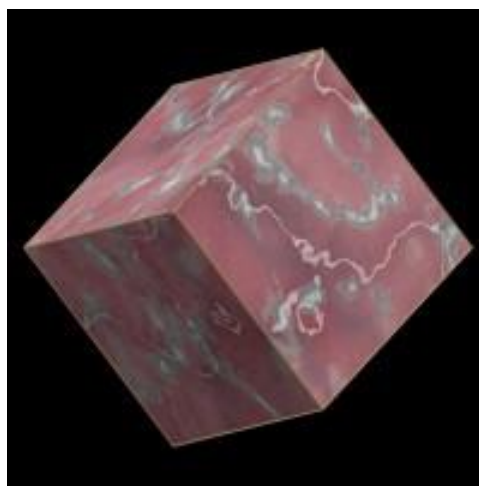




Тетраэдр



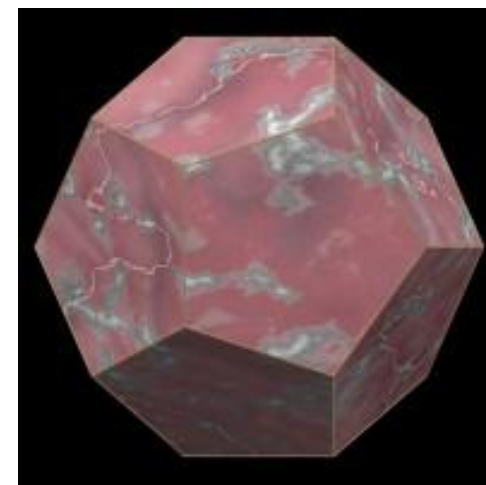
Октаэдр



Гексаэдр



Икосаэдр



Додекаэдр

Подсчитайте количество вершин, граней и ребер у правильных многогранников.



Правильный многогранник	Число		
	граней	вершин	рёбер
Тетраэдр			
Куб			
Октаэдр			
Додекаэдр			
Икосаэдр			

Теорема Эйлера. Пусть  $B$  --- число вершин выпуклого многогранника,  $\Gamma$  --- число его

рёбер и  $P$  --- число граней. Тогда верно равенство

$$B + \Gamma = 2 + P$$

Правильный многогранник	Число		
	граней $\Gamma$	вершин $B$	рёбер $P$
Тетраэдр	4	4	6
Куб	6	8	12
Октаэдр	8	6	12
Додекаэдр	12	20	30
Икосаэдр	20	12	30

# Историческая справка

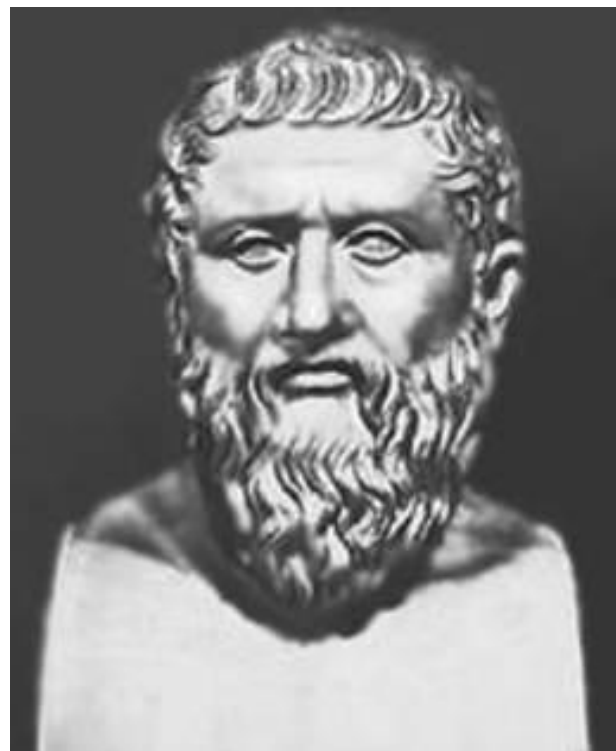
История правильных многогранников уходит в глубокую древность. Начиная с 7 века до нашей эры в Древней Греции создаются философские школы, в которых происходит постепенный переход от практической к философской геометрии. Большое значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удалось получать новые геометрические свойства.

Одной из первых и самых известных школ была Пифагорейская, названная в честь своего основателя Пифагора. Отличительным знаком пифагорейцев была пентаграмма, на языке математики - это правильный невыпуклый или звездчатый пятиугольник. Пентаграмме присваивалась способность защищать человека от злых духов.



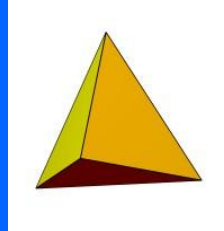
*Эти тела еще называют  
телами Платона*

**Платон** связал с  
этими телами  
формы атомов  
основных стихий  
природы.





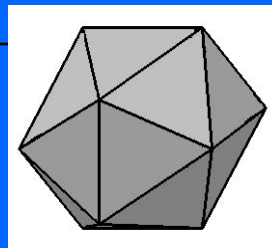
**ОГОНЬ**



**тетраэдр**



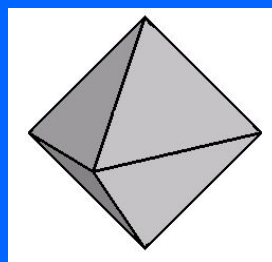
**вода**



**икосаэдр**



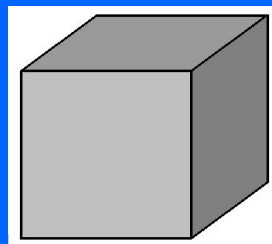
**воздух**



**октаэдр**



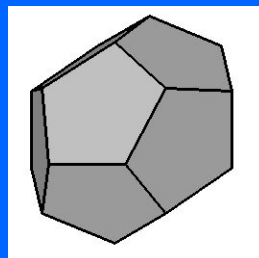
**земля**



**гексаэдр**



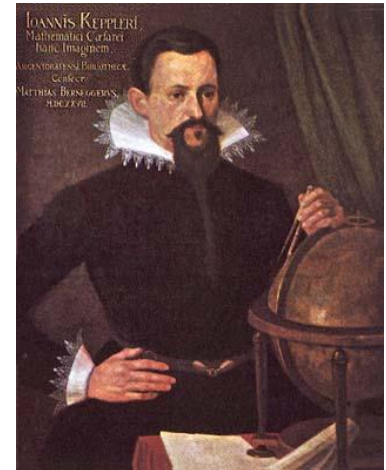
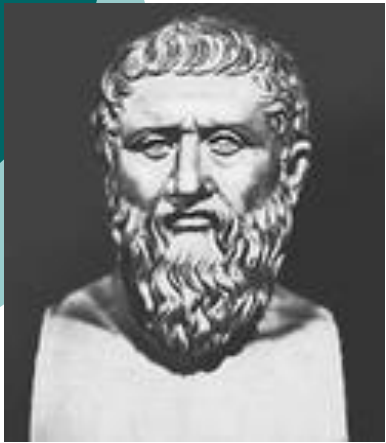
**вселенная**



**додекаэдр**

# **Дальнейшее развитие математики связано с именами**

**Платона, Евклида, Архимеда, Кеплера**



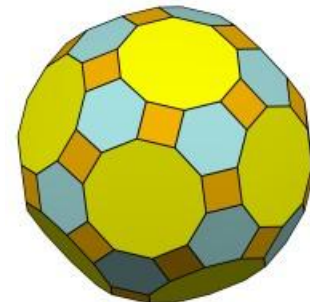
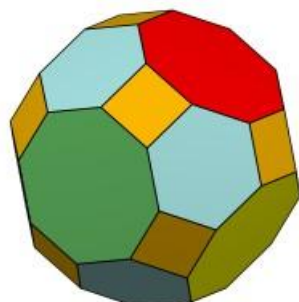
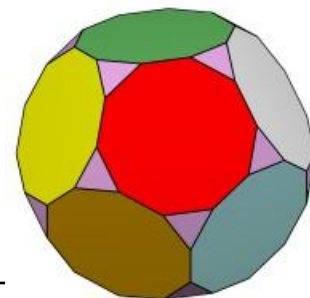
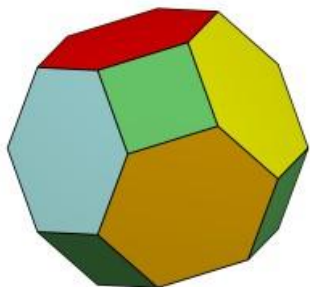
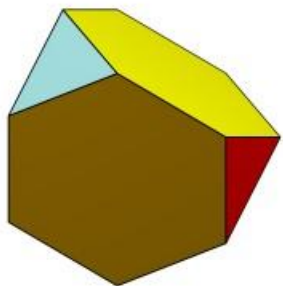
**Все использовали в своих философских теориях правильные многогранники.**

# *Тела Архимеда*

**Архимедовыми телами** называются полуправильные однородные выпуклые многогранники, то есть выпуклые многогранники, все многогранные углы которых равны, а грани - правильные многоугольники нескольких типов.

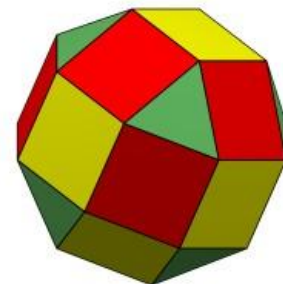
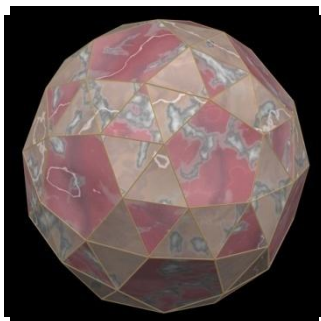
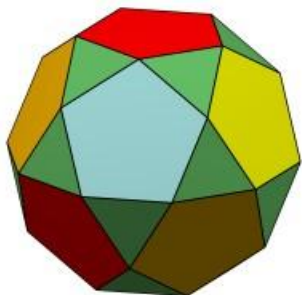
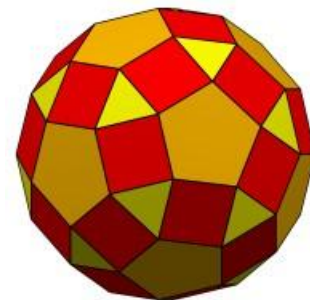
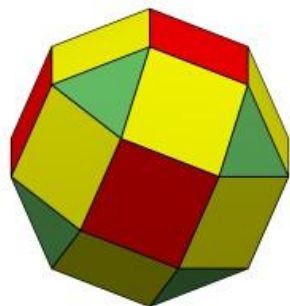
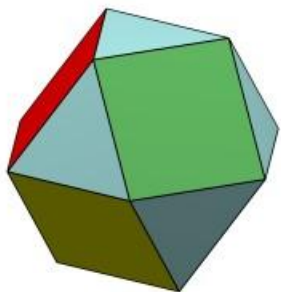






*Тела*

*Архимеда*





# Тела

## Кеплера - Пуансо

Среди невыпуклых однородных многогранников Среди невыпуклых однородных многогранников существуют аналоги платоновых тел - четыре *правильных невыпуклых однородных многогранника* или *тела Кеплера - Пуансо*.

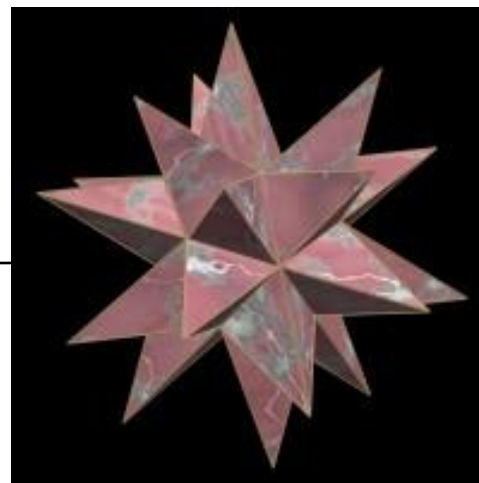
Как следует из их названия, тела Кеплера-Пуансо - это невыпуклые однородные многогранники, все грани которых - одинаковые правильные многоугольники, и все многогранные углы которых равны. Грани при этом могут быть как выпуклыми, так и





*Малый звездчатый*

*додекаэдр*



*Большой звездчатый*

*додекаэдр*



*Большой икосаэдр*

## Многогранники в архитектуре

Великая пирамида в Гизе. Эта грандиозная Египетская пирамида является древнейшим из Семи чудес древности. *Великая пирамида была построена как гробница Хуфу, известного грекам как Хеопс. Он был одним из фараонов, или царей древнего Египта, а его гробница была завершена в 2580 году до н.э. Позднее в Гизе было построено еще две пирамиды, для сына и внука Хуфу, а также меньшие по размерам пирамиды для их цариц.*



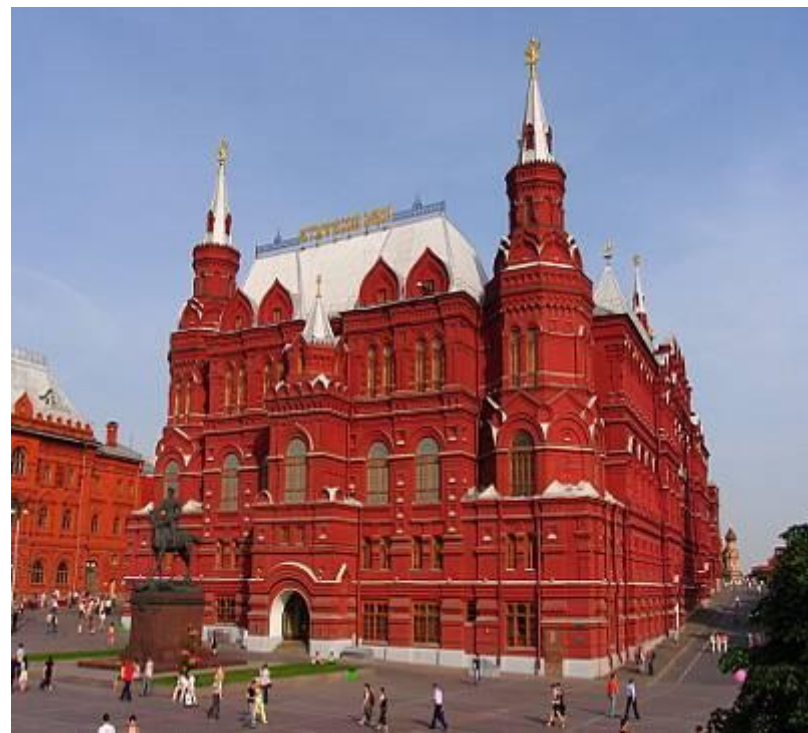


***Некоторые археологи считают, что, возможно, на строительство Великой пирамиды 100 000 человек потребовалось 20 лет. Она была создана из более чем 2 миллионов каменных блоков, каждый из которых весил не менее 2,5 тонн.***

# *Многогранники в архитектуре Москвы*



*Собор непорочного зачатия  
Девы Марии  
на малой Грузинской*



*Исторический музей*

# Многогранники в архитектуре Москвы



*Новоарбатский замок*



*Малый Ржевский пер.*

# *Многогранники в архитектуре Москвы*



*Казанская церковь в Москве*



# Александрийский маяк.

Маяк был построен на маленьком острове Фарос в Средиземном море, около берегов Александрии. Этот оживленный порт основал Александр Великий во время посещения Египта. Сооружение назвали по имени острова. На его строительство, должно быть, ушло 20 лет, а завершен он был около 280 г. до н.э., во времена правления Птолемея II, царя Египта.



# Три башни



Фаросский маяк состоял из трех мраморных башен, стоявших на основании из массивных каменных блоков. Первая башня была прямоугольной, в ней находились комнаты, в которых жили рабочие и солдаты. Над этой башней располагалась меньшая, восьмиугольная башня со спиральным пандусом, ведущим в верхнюю башню.

# *Многогранники в искусстве*

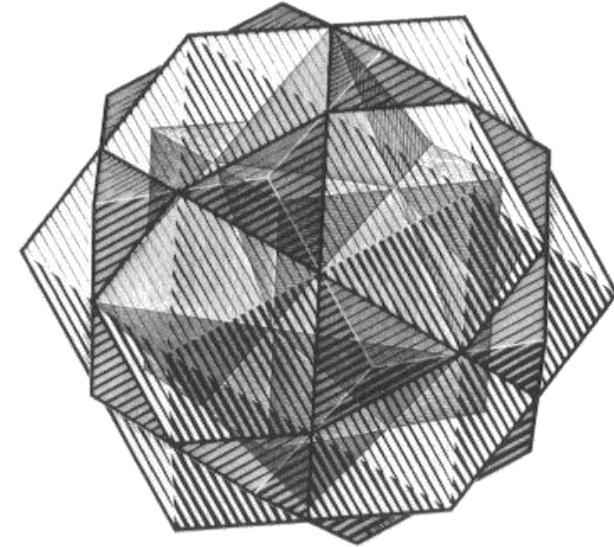


*Знаменитый художник, увлекавшийся геометрией, Альбрехт Дюрер (1471- 1528) , в известной гравюре "Меланхолия " на переднем плане изобразил додекаэдр.*



Голландский художник **Мориц Корнилис Эшер** (1898-1972) создал уникальные и очаровательные работы, в которых использованы или показаны широкий круг математических идей.

*Правильные геометрические тела - многогранники - имели особое очарование для Эшера. В его многих работах многогранники являются главной фигурой и в еще большем количестве работ они встречаются в качестве вспомогательных элементов.*



На гравюре **"Четыре тела"** Эшер изобразил пересечение основных правильных многогранников, расположенных на одной оси симметрии, кроме этого многогранники выглядят полупрозрачными, и сквозь любой из них можно увидеть остальные.

# Применения икосаэдров



*Титульный лист  
книги Ж. Кузена  
«Книга о перспективе».*



*Надгробный памятник  
в кафедральном соборе  
Солсбери.*

*На картине художника **Сальвадора Дали** «**Тайная Вечеря**» Христос со своими учениками изображён на фоне огромного прозрачного додекаэдра. Форму додекаэдра, по мнению древних, имела **ВСЕЛЕННАЯ**, т.е. они считали, что мы живём внутри свода, имеющего форму поверхности правильного додекаэдра.*

---



## *Чудо природы – кристаллы*

Правильные многогранники – самые выгодные фигуры. И природа этим широко пользуется. Кристаллы некоторых знакомых нам веществ имеют форму правильных многогранников:

- *куб передает форму кристаллов поваренной соли  $\text{NaCl}$*
- *монокристалл алюминиево-калиевых квасцов имеет форму октаэдра,*
- *кристалл сернистого колчедана  $\text{FeS}$  имеет форму додекаэдра,*
- *сернокислый натрий – тетраэдр,*
- *бор – икосаэдр.*

# Многогранники в природе

Правильные многогранники – самые выгодные фигуры. И природа этим широко пользуется. Подтверждением тому служит форма некоторых кристаллов.



Кристалл сульфата меди II

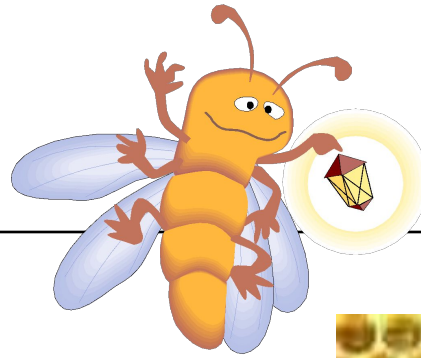


Кристалл алюмокалиевых квасцов



Кристалл сульфата никеля II



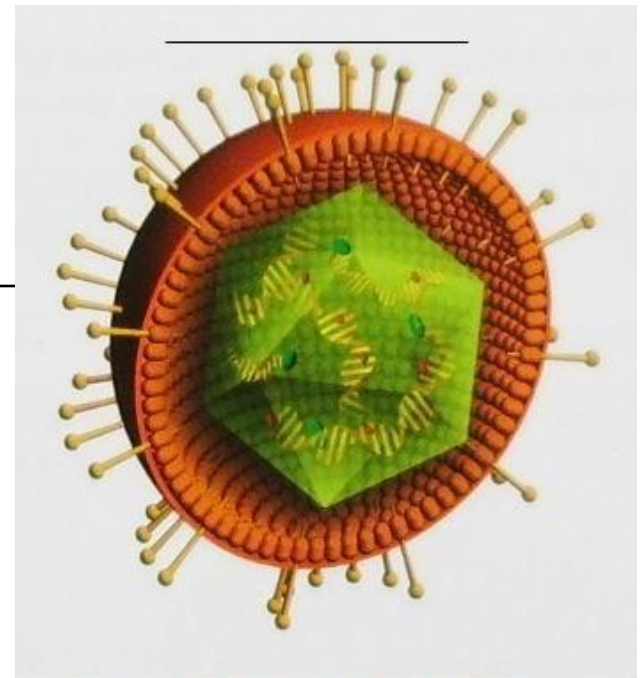


Пчёлы  
строили свои  
шестиугольные  
соты  
задолго до  
появления  
человека.



## *Икосаэдр*

оказался в центре  
внимания биологов в их  
мнениях  
относительно формы  
вирусов.

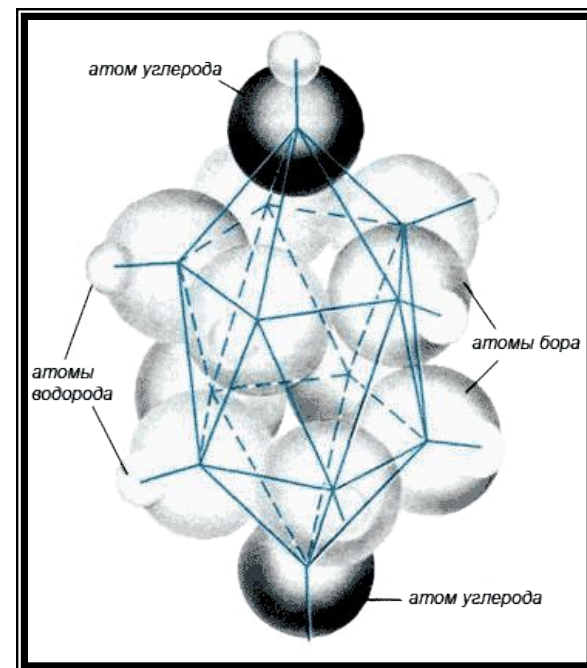
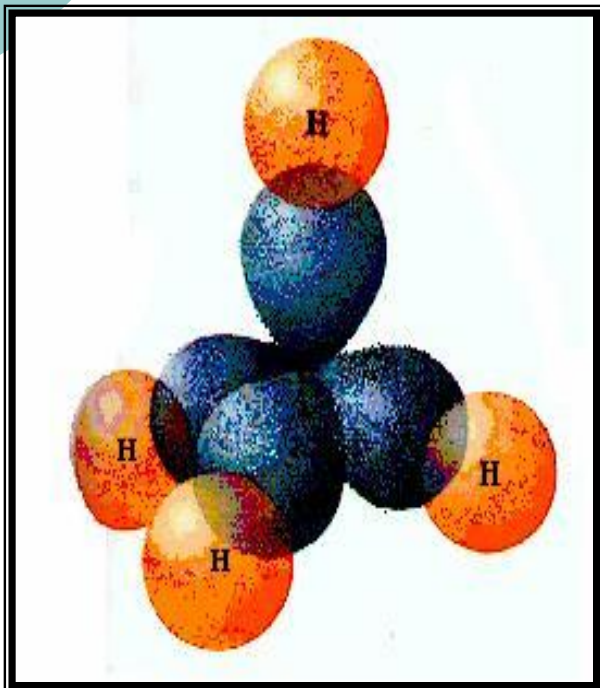


Строение вируса возбудителя краснухи



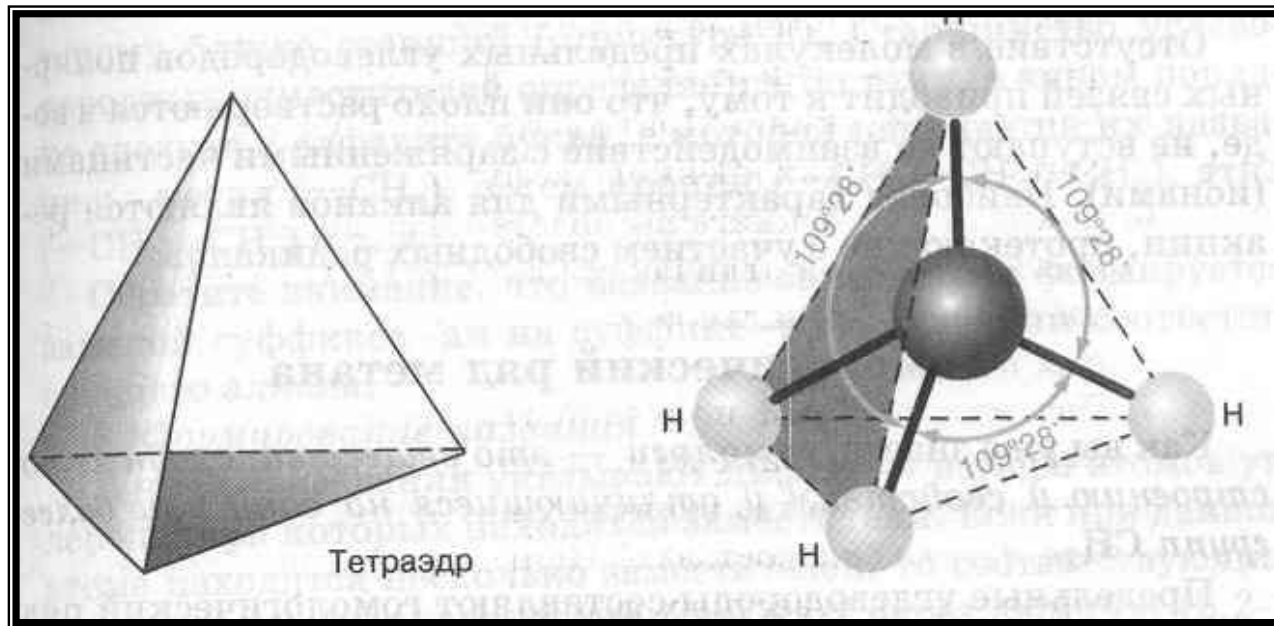
***Вирус полиомиелита  
имеет форму додекаэдра.***

# Многогранники в химии



# Строение молекулы метана .

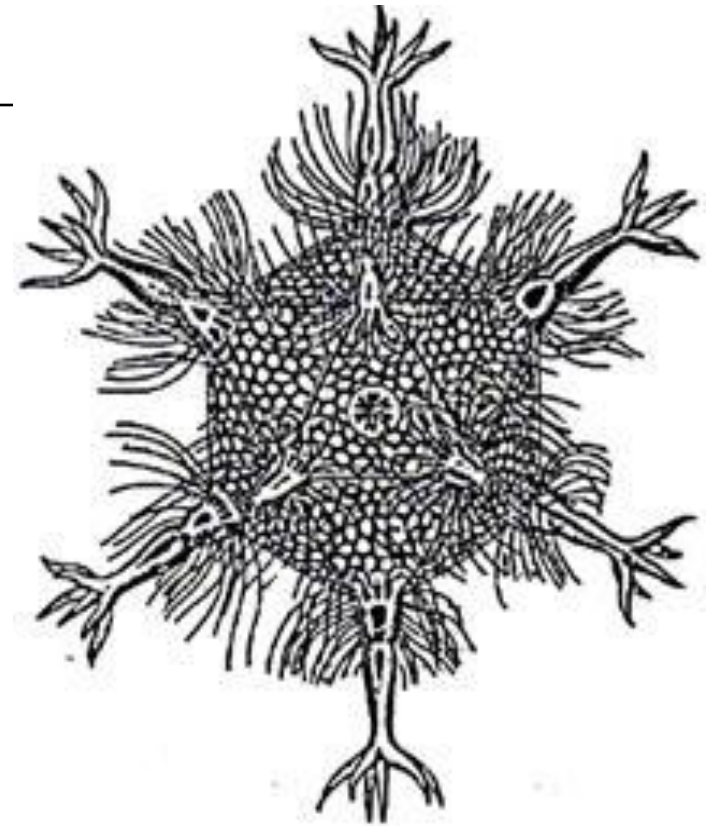
---

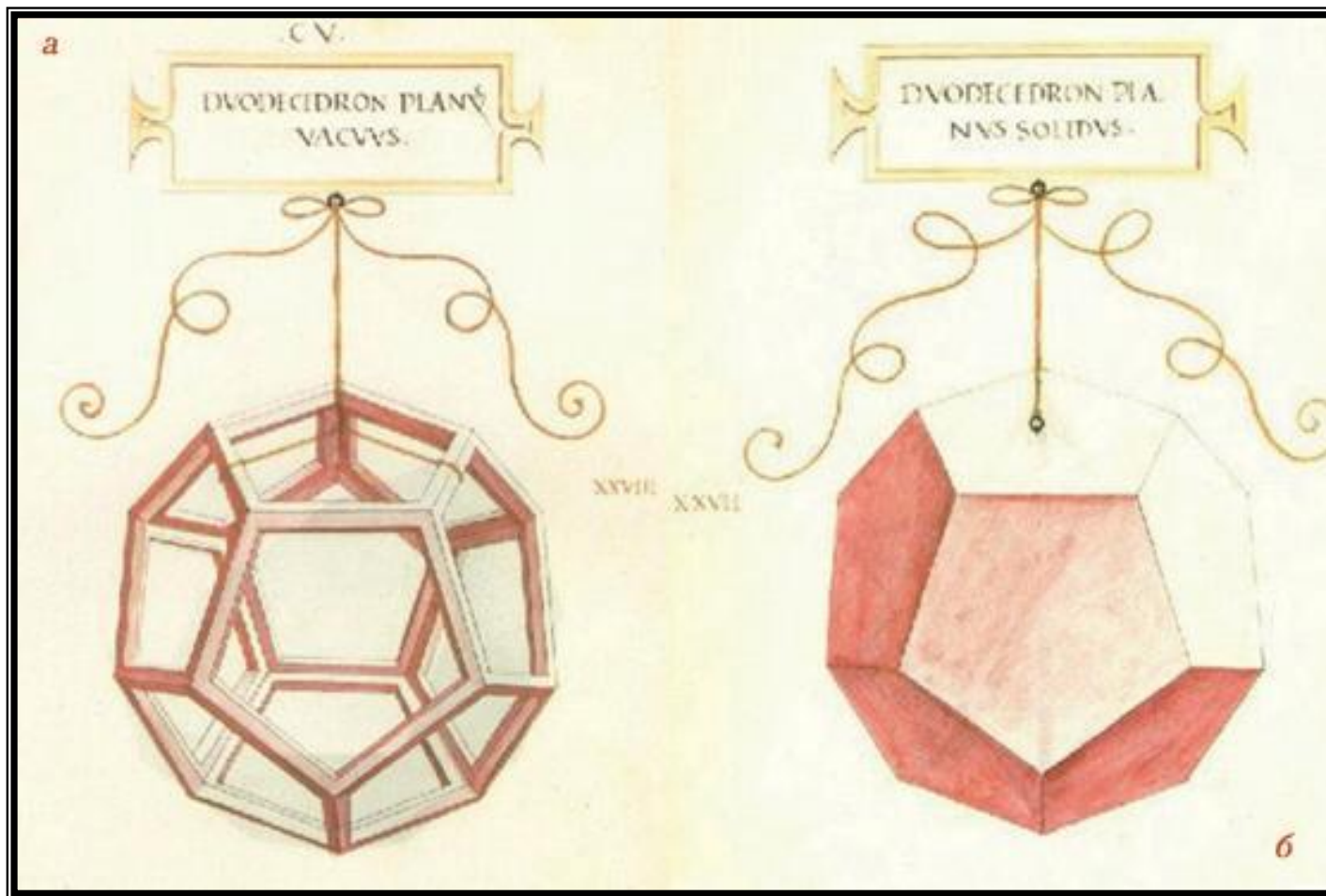


---

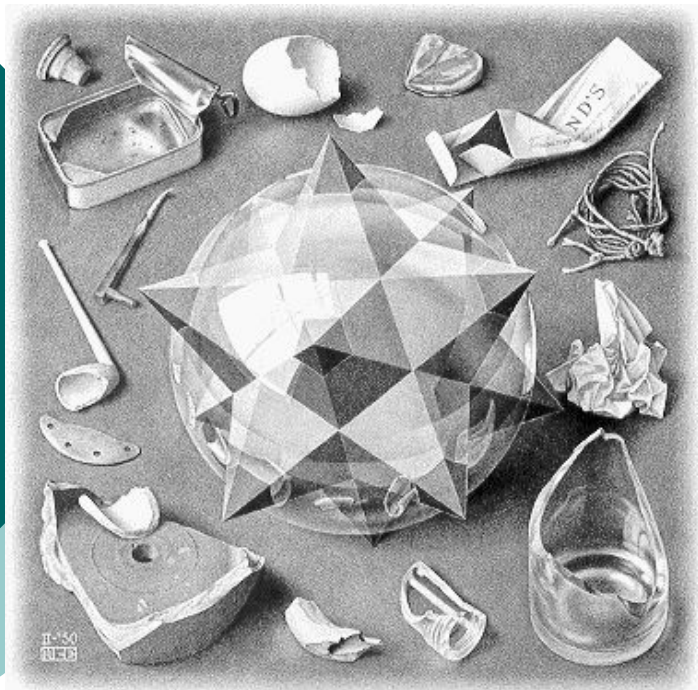
**Правильные  
многогранники  
встречаются в живой  
природе.**

**Например, скелет  
одноклеточного  
организма феодарии  
по форме напоминает  
**икосаэдр.****





**Леонардо да Винчи любил изготавливать из дерева каркасы правильных многогранников и преподносить их в виде подарка различным знаменитостям.**

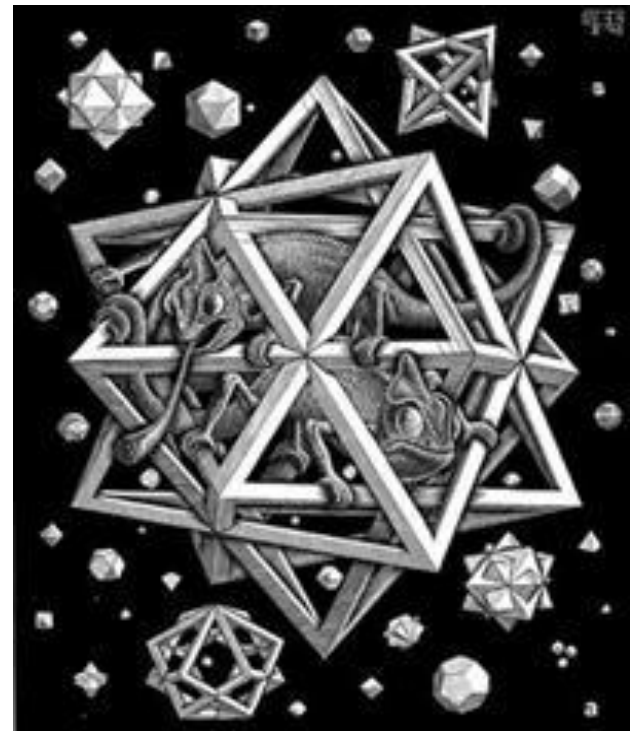


*Изысканный пример звездчатого додекаэдра можно найти в его работе "Порядок и хаос". В данном случае звездчатый многогранник помещен*

---

*внутрь стеклянной сферы. Аскетичная красота этой конструкции контрастирует с беспорядочно разбросанным по столу мусором.*

*Наиболее интересная работа Эшера - гравюра "Звезды", на которой можно увидеть тела, полученные объединением тетраэдров, кубов и октаэдров. Если бы Эшер изобразил в данной работе лишь различные варианты многогранников, мы никогда бы не узнали о ней. Но он по какой-то причине поместил внутрь центральной фигуры хамелеонов, чтобы затруднить нам восприятие всей фигуры.*

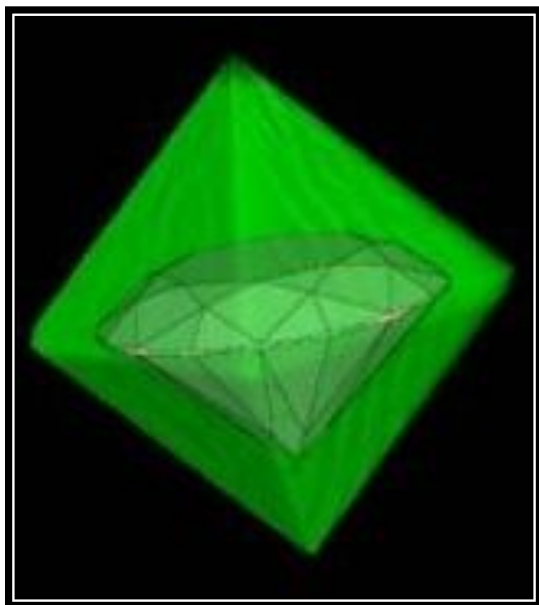


**ГРАВЮРА ГОЛАНДСКОГО ХУДОЖНИКА  
МАУРИЦА КОРНЕЛИУСА ЭШЕРА  
«СИЛЫ ГРАВИТАЦИИ»**

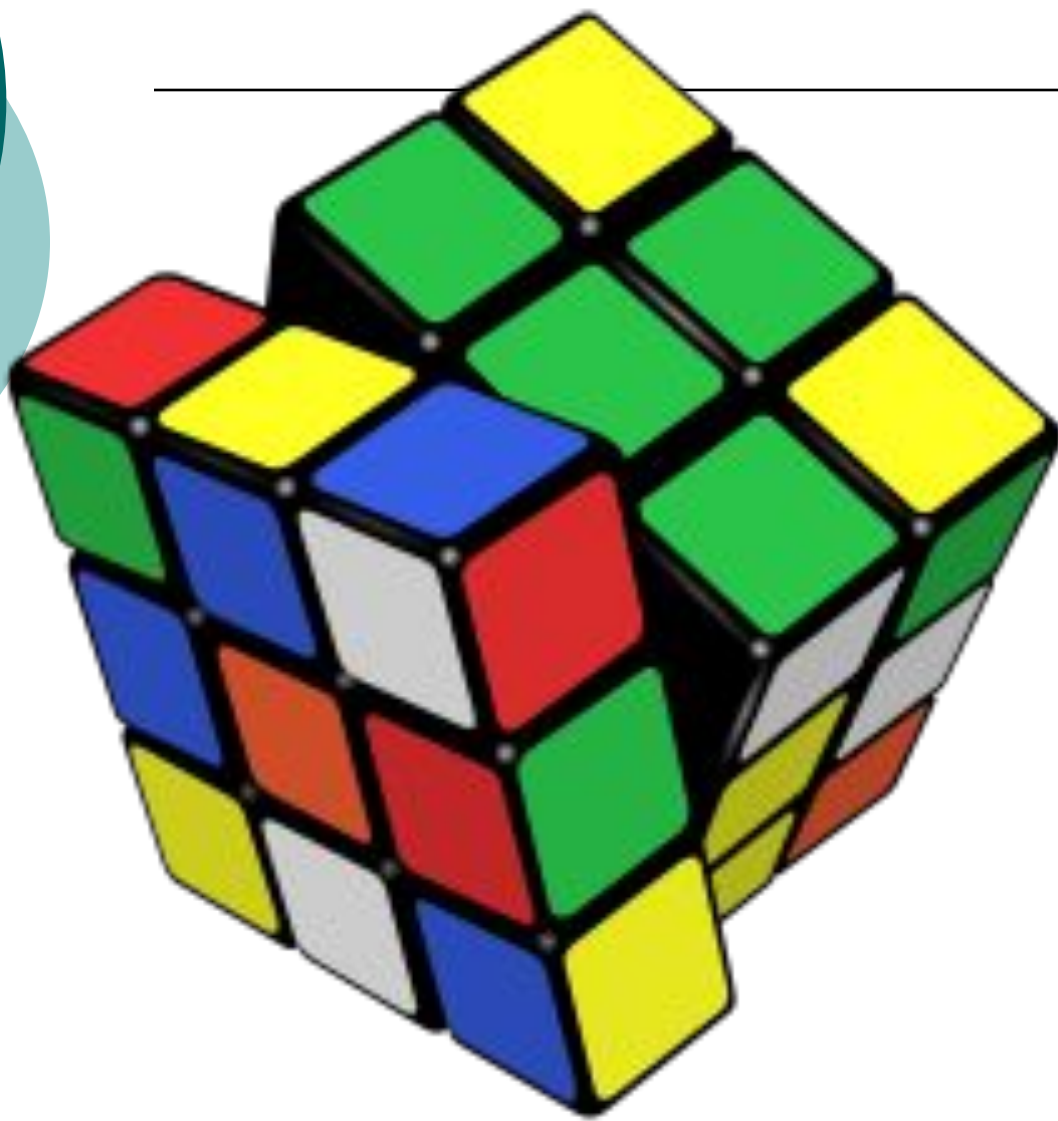




# Правильная форма алмаза.



Обязательно попробуй!



**Кубик Рубика-  
головоломка**

А теперь проверьте свои знания  
по изученному материалу

---

Тестирование.





---

# 1. Поверхность, составленная из четырех треугольников

**A) ТЕТРАЭДР**

**B) ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД**

**C) КВАДРАТ**

**D) ШАР**



## 2. Поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело

А) МНОГОУГОЛЬНИК

В) МНОГОГРАННИК

С) ТРЕУГОЛЬНИК

Д) КВАДРАТ



---

### 3. Многоугольник, из которого составлен многогранник

A) СТОРОНА

B) РЕБРО

C) ГРАНЬ

D) ВЕРШИНА



**4. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани**

**А) ДИАГОНАЛЬ**

**В) МЕДИАНА**

**С) ВЫСОТА**

**Д) АПОФЕМА**



---

## 5. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины

А) ДИАГОНАЛЬ

В) АПОФЕМА

С) КАТЕТ

Д) ГИПОТЕНУЗА





---

**6. Этот правильный  
многогранник составлен из 8-ми  
равносторонних треугольников**

**А) КВАДРАТ**

**В) ТЕТРАЭДР**

**С) ДОДЕКАЭДР**

**Д) ОКТАЭДР**



---

## 7. Составлен из 6-ти правильных четырехугольников

A) КВАДРАТ

B) ТЕТРАЭДР

C) КУБ

D) ПИРАМИДА



---

## 8. Стихия тетраэдра

**A) ВОДА**

**B) ВОЗДУХ**

**C) ЗЕМЛЯ**

**D) ОГОНЬ**



---

## 9. Многоугольник, подобный пчелиным сотам

А) 8-МИ УГОЛЬНИК

В) 6-ТИ УГОЛЬНИК

С) 4-Х УГОЛЬНИК

Д) ТРЕУГОЛЬНИК

# Проверь себя.

---

1. А
2. В
3. С
4. А
5. В
6. D
7. С
8. D
9. В





**По горизонтали:**

1. Количество сходящихся ребер у октаэдра.
2. Грань додекаэдра.
3. Боковая грань усеченной пирамиды.
4. Правильный многогранник.

**По вертикали:**

2. Граница многогранника.
5. Правильная треугольная пирамида.
6. Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.

# Кроссворд