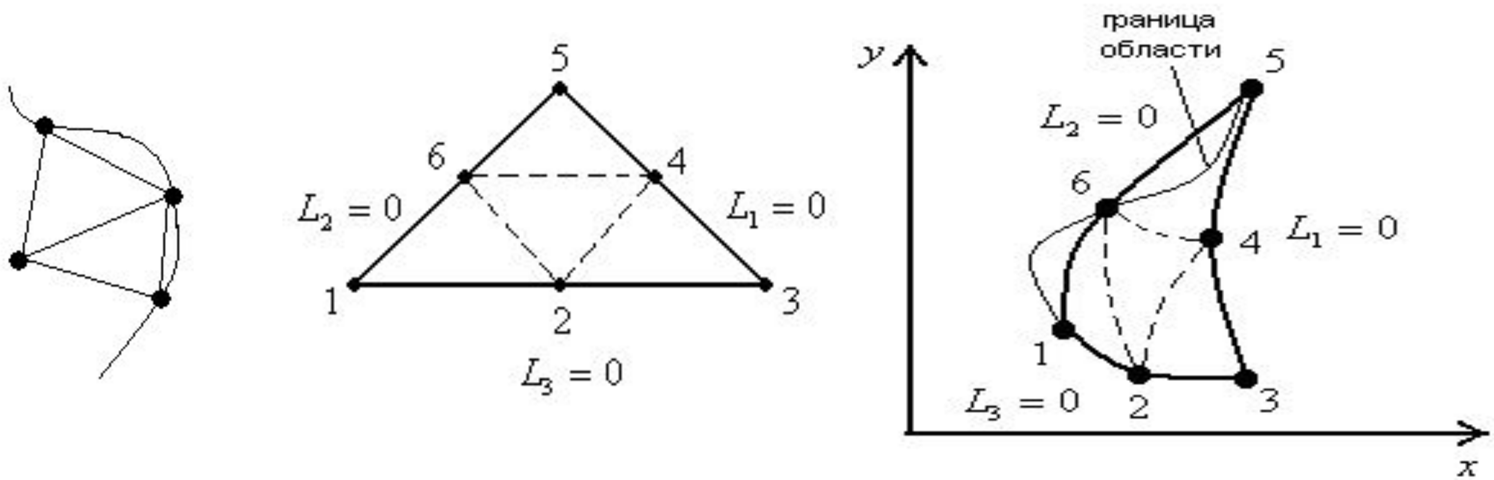
Лекция Вычислительная механика

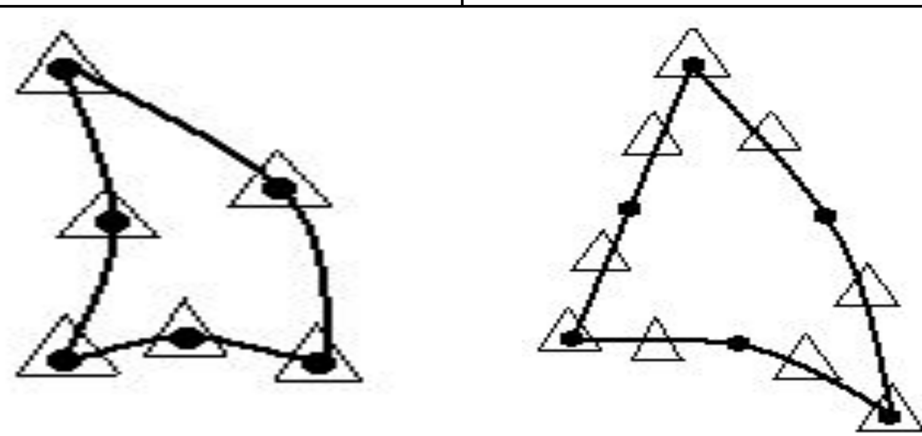
Изопараметрические конечные элементы

К.т.н., доцент каф. ВМиМ
Каменских Анна Александровна
239-15-64

Изопараметрические конечные элементы



Если функции формы для аппроксимации геометрии и неизвестных совпадают, то конечный элемент называется **изопараметрическим**.	Если для аппроксимации геометрии используется полином большего порядка, чем для неизвестных, то это **суперпараметрический** конечный элемент.	Если для аппроксимации неизвестных используется полином большего порядка, чем для геометрии, то это **субпараметрический** конечный элемент.



Δ - функции формы геометрии

О - функции формы неизвестных

Нужно установить однозначную связь:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \Leftrightarrow f\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \Leftrightarrow f\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = N'_i(\xi,\eta)x_i + N'_j(\xi,\eta)x_j + \ldots = \sum\limits_i N'_i x_i \\ y = N'_i(\xi,\eta)y_i + N'_j(\xi,\eta)y_j + \ldots = \sum\limits_i N'_i y_i \end{cases}$$

N'_i – функции формы, аппроксимирующие геометрию элемента через координаты узловых точек элемента.

При построении конечно-элементных соотношений необходимо решать две задачи:

1. Так как функции форм записаны в естественной системе координат, то при построении матрицы жесткости конечного элемента, точнее, матрицы градиентов, появляется задача вычисления производных от функций форм по декартовым координатам.

2. При вычислении интеграла по объему или по границе конечного элемента необходимо записать элементарный объем или приращение вдоль контура через естественные локальные координаты и соответствующим образом изменить пределы интегрирования.

1. Пусть имеется глобальная система координат x, y, z и естественная система координат ξ, η, ζ

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \frac{\partial N_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \zeta}.$$

$$\frac{\partial u\left(x(t), y(t)\right)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\begin{Bmatrix} \partial N_i/\partial \xi \\ \partial N_i/\partial \eta \\ \partial N_i/\partial \zeta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial \xi & \partial y/\partial \xi & \partial z/\partial \xi \\ \partial x/\partial \eta & \partial y/\partial \eta & \partial z/\partial \eta \\ \partial x/\partial \zeta & \partial y/\partial \zeta & \partial z/\partial \zeta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \partial N_i/\partial x \\ \partial N_i/\partial y \\ \partial N_i/\partial z \end{Bmatrix} = [J]\cdot \begin{Bmatrix} \partial N_i/\partial x \\ \partial N_i/\partial y \\ \partial N_i/\partial z \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} \partial N_i/\partial x \\ \partial N_i/\partial y \\ \partial N_i/\partial z \end{Bmatrix} = \left[J^{-1}\right]\cdot \begin{Bmatrix} \partial N_i/\partial \xi \\ \partial N_i/\partial \eta \\ \partial N_i/\partial \zeta \end{Bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_i \frac{\partial N_i'}{\partial \xi} x_i & \sum_i \frac{\partial N_i'}{\partial \xi} y_i & \sum_i \frac{\partial N_i'}{\partial \xi} z_i \\ \sum_i \frac{\partial N_i'}{\partial \eta} x_i & \sum_i \frac{\partial N_i'}{\partial \eta} y_i & \sum_i \frac{\partial N_i'}{\partial \eta} z_i \\ \sum_i \frac{\partial N_i'}{\partial \zeta} x_i & \sum_i \frac{\partial N_i'}{\partial \zeta} y_i & \sum_i \frac{\partial N_i'}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1'}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2'}{\partial \xi} & \dots \\ \frac{\partial N_1'}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2'}{\partial \eta} & \dots \\ \frac{\partial N_1'}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2'}{\partial \zeta} & \dots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

2. $dV^e = dxdydz = \det[J]\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$, где $\det[J]$ – якобиан.

Треугольный конечный элемент

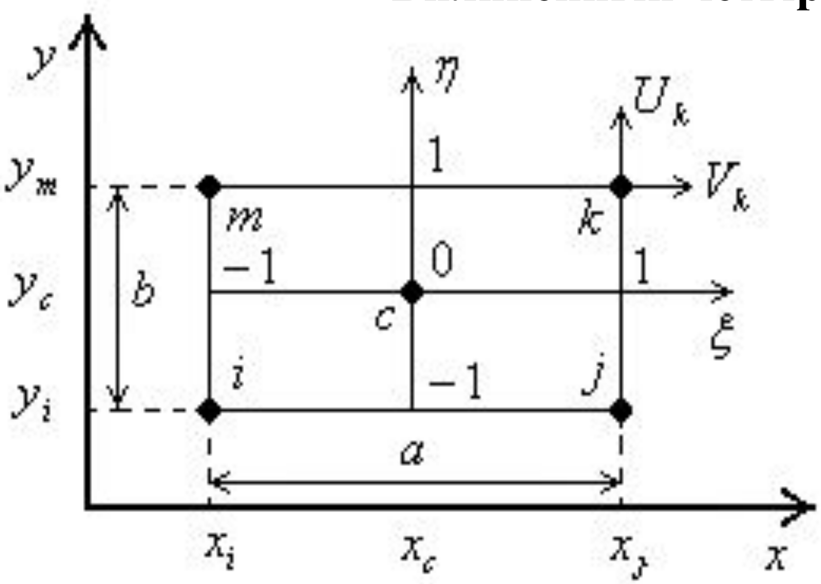
$$\xi = L_1, \quad \eta = L_2, \quad L_3 = 1 - \xi - \eta.$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1}\cdot\frac{\partial L_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2}\cdot\frac{\partial L_2}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3}\cdot\frac{\partial L_3}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} - \frac{\partial N_i}{\partial L_3},$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial L_2} = \frac{\partial N_i}{\partial L_2} - \frac{\partial N_i}{\partial L_3}.$$

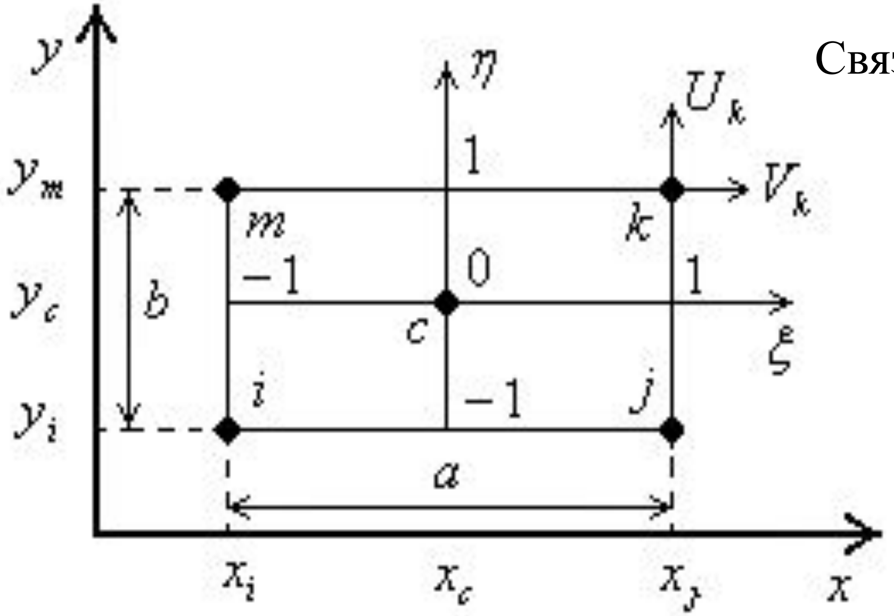
$$\left[k^e\right] = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \left[G(L_1, L_2, L_3)\right] \det[J]\, dL_1 dL_2, \qquad [G] = [B]^T [D][B].$$

Билинейный четырехугольный конечный элемент



c - центр тяжести

$$\begin{cases} U(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ V(x,y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{cases}$$



Связь между локальными и глобальными координатами

$$\begin{cases} x = x_i + \xi \cdot \dfrac{a}{2} \\ y = y_i + \eta \cdot \dfrac{b}{2} \end{cases}$$

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta),$$

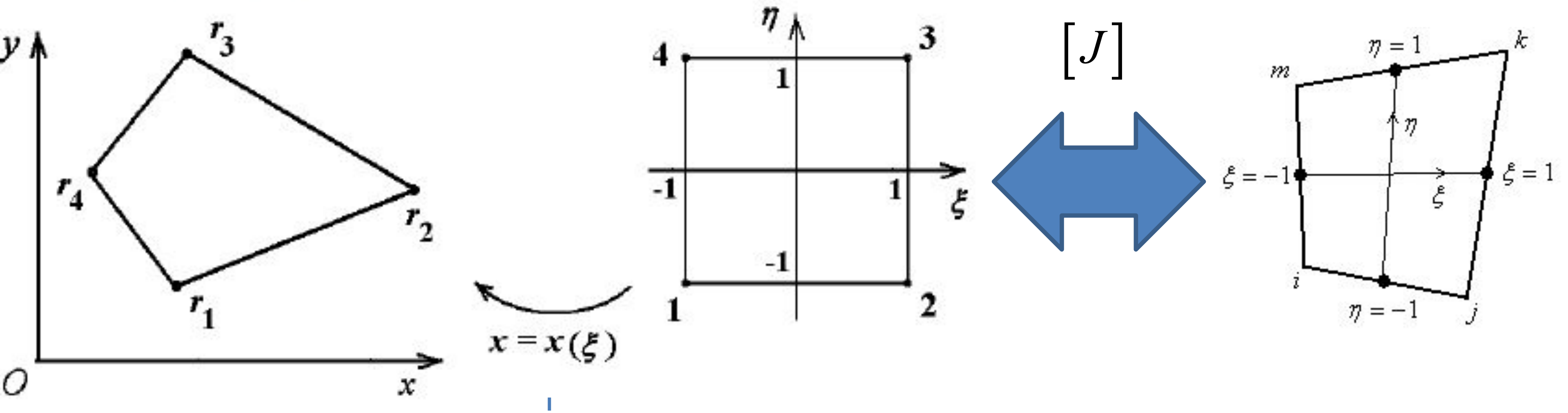
$$N_j(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta),$$

$$N_k(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta),$$

$$N_m(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta).$$

$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi_i \cdot \xi)(1+\eta_i \cdot \eta)$$

ξ_i, η_i - координаты текущего узла



$$N_i(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta),$$

$$N_j(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta),$$

$$N_k(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta),$$

$$N_m(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta).$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \partial N_i/\partial\xi & \partial N_j/\partial\xi & \partial N_k/\partial\xi & \partial N_m/\partial\xi \\ \partial N_i/\partial\eta & \partial N_j/\partial\eta & \partial N_k/\partial\eta & \partial N_m/\partial\eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \\ x_k & y_k \\ x_m & y_m \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \\ x_k & y_k \\ x_m & y_m \end{bmatrix}$$

$$[k^e] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} G(\xi,\eta)\det[J]\, d\xi\, d\eta$$