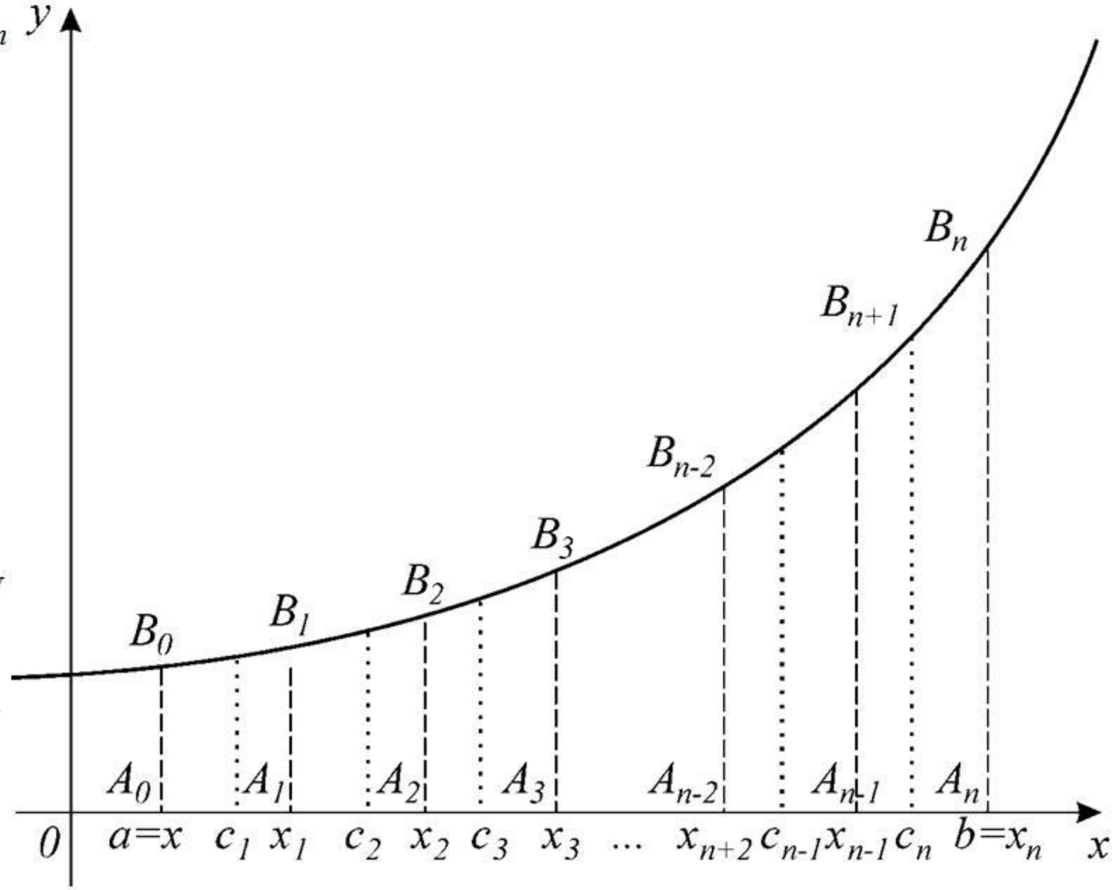
Лекция 6

Тема: *"Определенный интеграл"*

Определенный интеграл.

Пусть на отрезке $[a;b]$ дана непрерывная функция $y = f(x)$, график которой изображен на рисунке.

Отрезок $[a;b]$ разделим на n частей произвольным образом и обозначим абсциссы точек деления $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ в порядке возрастания следующим образом: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим отрезки $[x_0, x_1] = \Delta x_1$, $[x_1, x_2] = \Delta x_2$ и т.д. Каждый такой отрезок назовем частичным.



На каждом из отрезков Δx_i возьмем одну точку c_i. Вычислим значение функции в произвольно выбранной точке, умножим это значение на длину соответствующего частичного отрезка: $f(c_i)\Delta x_i$ и составим сумму всех таких произведений: $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$.

Эта сумма называется ***интегральной суммой*** для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Найдем предел интегральной суммы при условии, что число частичных отрезков неограниченно возрастает, и каждый из них стягивается в точку.
Обозначим через λ длину наибольшего из частичных отрезков.

Определение. Пусть при $\lambda \to 0$ (и, следовательно, при $n \to \infty$) интегральная сумма

$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ стремится к некоторому числу, которое не зависит ни от способа деления

отрезка $[a;b]$, ни от выбора внутренних точек c_i, т.е. существует следующий предел:

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Тогда этот предел называется ***определенным интегралом функции*** $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$.

Таким образом,

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется ***интегрируемой на отрезке*** $[a;b]$.

В символе $\int_a^b f(x)dx$ a, b – нижний и верхний пределы (границы) интегрирования, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

Отрезок $[a;b]$ называется ***отрезком (областью) интегрирования***.

Теорема (существования определенного интеграла). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке, т.е. существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Основные свойства определенного интеграла.

1. При перемене местами пределов интегрирования величина определенного интеграла изменяется на противоположную:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

3. Определенный интеграл от суммы функций равен сумме определенных интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b (f(x) + \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx.$$

4. Свойство аддитивности. Если отрезок интегрирования $[a;b]$ точкой c разбить на отрезки $[a;c]$ и $[c;b]$, то:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Это свойство легко распространить на случай и большего числа точек деления отрезка $[a;b]$.

5. Если на отрезке $[a;b]$ $f(x) \geq 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

6. Свойство монотонности. Если на отрезке $[a;b]$ две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют неравенству $f(x) \geq \varphi(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b \varphi(x)dx .$$

Иными словами, неравенство можно почленно интегрировать.

7. Теорема о среднем. Если $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция, то на отрезке $[a;b]$ существует хотя бы одна точка c такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Таким образом, определенный интеграл от непрерывной функции равен значению подынтегральной функции в некоторой внутренней точке, умноженному на длину отрезка интегрирования.

Это значение называется ***средним интегральным значением функции на отрезке*** $\left[a;b\right]$.

Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция.

Рассмотрим интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Закрепим нижнюю границу a и будем изменять верхнюю границу, тогда интеграл будет функцией своей верхней границы. Чтобы подчеркнуть, что верхняя граница переменная, обозначим ее через x вместо b.

Переменную интегрирования, чтобы не смешивать ее с верхней границей обозначим через t.

Таким образом, интеграл с переменной верхней границей является функцией x:

$$I(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Для этой функции имеет место следующая теорема.

Теорема. Производная интеграла по переменной верхней границе равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена верхней границей, т.е. $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$.

Таким образом, функция $I(x) = \int_a^x f(t)dt$ является первообразной для непрерывной подынтегральной функции $f(x)$.

Известно, что все первообразные функции отличаются друг от друга постоянным слагаемым, поэтому, если $F(x)$ – другая первообразная для $f(x)$, то $I(x) = F(x) + C$ или

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

Подставим в эту формулу $x = a$ и учитывая, что $\int_a^a f(x)dx = 0$, получим $F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$.

Подставив значение $C = -F(a)$ и положив $x = b$, найдем

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Полученная формула называется ***формулой Ньютона-Лейбница***.

Из нее следует, что определенный интеграл – это приращение первообразной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Пример. Вычислить интеграл $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$.

Решение: $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1} = arctg\, x\Big|_1^{\sqrt{3}} = arctg\sqrt{3} - arctg1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

Замена переменной в определенном интеграле.

Предположим, что нужно вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция.

Перейдем от переменной x к переменной t, положив: $x = \varphi(t)$.

Пусть $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.

Предположим также, что функция $\varphi(t)$ и ее производная $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, и при изменении t от α до β значения функции $\varphi(t)$ не выходят за пределы отрезка $a \le x \le b$.

При выполнении этих условий имеет место следующая формула замены переменной в определенном интеграле:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_1^9 \frac{\sqrt{x}dx}{x+2\sqrt{x}}$.

Решение: Сделаем подстановку $x = t^2$, откуда $dx = 2tdt$.

Найдем пределы изменения t: $1 = t^2 \Rightarrow t = 1$, $9 = t^2 \Rightarrow t = 3$.

Следовательно,

$$\int_1^9 \frac{\sqrt{x}dx}{x+2\sqrt{x}} = \int_1^3 \frac{2t^2dt}{t^2+2t} = 2\int_1^3 \frac{tdt}{t+2} = 2\int_1^3 \frac{t+2-2}{t+2}dt = 2\int_1^3 (1-\frac{2}{t+2})dt = 2(t-2\ln|t+2|)\Big|_1^3 = 4(1-\ln\frac{5}{3})$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – функции, непрерывные вместе со своими производными на отрезке $[a;b]$.

Очевидно, что $d\,(uv) = vdu + udv$.

Интегрируя это соотношение в пределах от a до b, получим:

$$\int_a^b duv = uv\Big|_a^b = \int_a^b vdu + \int_a^b udv,$$

откуда

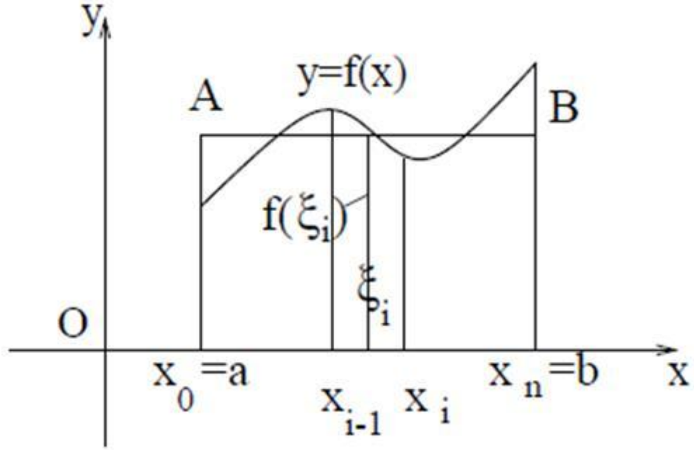
$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Эта формула называется ***формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.***

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^1 xe^x dx$.

Решение: $\int_0^1 xe^x dx = \left| \begin{matrix} u = x; & du = dx \\ dv = e^x dx; & v = e^x \end{matrix} \right| = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = 1.$

Геометрический смысл определенного интеграла.



Пусть $f(x) > 0$ на $[a;b]$.

Фигура, ограниченная отрезком $[a;b]$ оси Ox, частью графика функции $y = f(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, называется ***криволинейной трапецией.***

Для нахождения ее площади поступим следующим образом.

1. Произвольным образом точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ разобьем отрезок $[a;b]$ на частичные (элементарные) отрезки $[x_0 ; x_1]$, $[x_1; x_2]$, …, $[x_{n-1}; x_n]$.

2. На каждом элементарном отрезке выберем по одной произвольной точке ξ_i .

3. С небольшой погрешностью можем принять, что на протяжении каждого элементарного отрезка функция $f(x)$ постоянна и равна ее значению $f(\xi_i)$ в произвольно выбранной точке.

Фактически мы заменяем площадь элементарной криволинейной трапеции с основанием $[x_{i-1}; x_i]$ на площадь прямоугольника с тем же основанием и высотой $f(\xi_i)$.

Тогда: $S \approx f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

4. За точное значение площади примем предел этой интегральной суммы при $\lambda \to 0$ $(n \to \infty)$: $S = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, т.е. $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Последнее равенство выражает **геометрический смысл определенного интеграла**: интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от положительной функции равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком этой функции, осью Ox и вертикальными прямыми $x=a$ и $x=b$.

Замечание. Подчеркнем, что указанный геометрический смысл относится только к положительной функции.

Физический смысл определенного интеграла.

Пусть материальная точка совершает прямолинейное движение, причем ее скорость является функцией времени: $V=V(t)$.

Физический смысл определенного интеграла: путь, пройденный точкой за промежуток времени от $t=\alpha$ до $t=\beta$, равен определенному интегралу от скорости по времени:

$$S=\int_\alpha^\beta V(t)dt\,.$$

Приложения определенного интеграла.

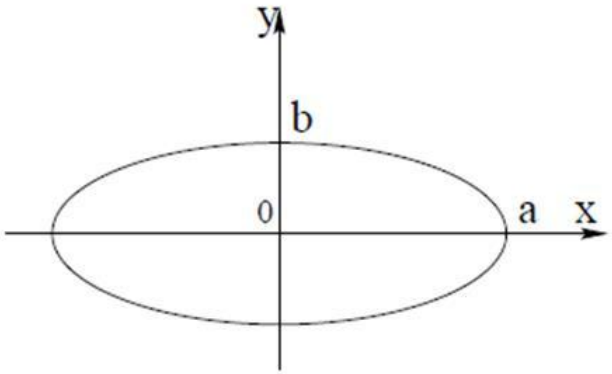
1. Площадь фигуры в декартовой системе координат.

Если фигура представляет собой криволинейную трапецию, образованную положительной функцией, то ее площадь находится по формуле:

$$\boxed{S=\int_a^b f(x)dx}.$$

Пример. Найти площадь эллипса, определяемого

уравнением $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$



Решение: Найдем площадь четверти эллипса, изображенного на рисунке.

Он ограничен кривой $y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $x\in[0;a]$.

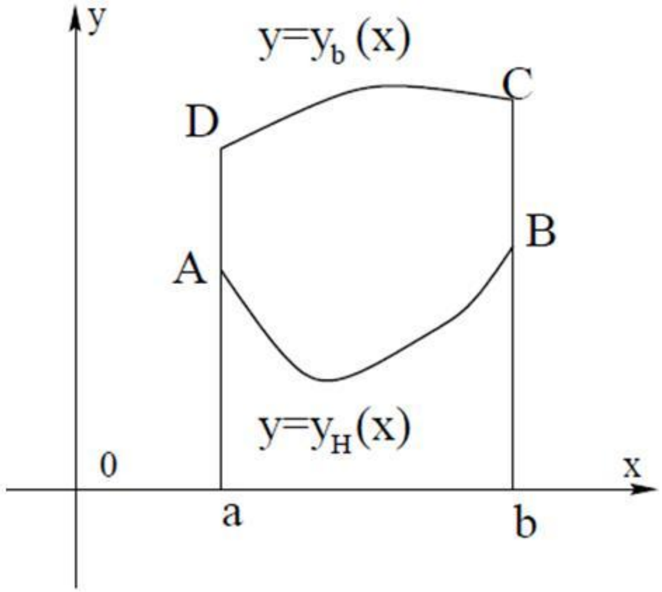
Тогда $\dfrac{1}{4}S=\dfrac{b}{a}\int\limits_0^a\sqrt{a^2-x^2}dx=\left|x=a\sin t,\, x=0\Rightarrow t=0, x=a\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}\right|=\dfrac{b}{a}a^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=$

$$=ab\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=ab\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi ab}{4}.$$

Площадь всего эллипса в четыре раза больше: $S=\pi ab$.

При $a=b=R$ получаем известную формулу площади круга $S=\pi R^2$.

Пусть теперь плоская фигура такова, что любая вертикальная прямая пересекает ее не более чем в двух точках.



Следовательно, в области выполняются условия:
$a \le x \le b, \; y_в(x) \ge y_н(x)$.

Тогда согласно геометрическому смыслу определенного интеграла

$$\boxed{S_{ABCD} = \int_a^b (y_в(x) - y_н(x))dx}.$$

Эта формула справедлива для любого расположения кривых (в верхней или нижней полуплоскостях), лишь бы выполнялось условие: $y_в(x) \ge y_н(x)$ для $x \in [a; b]$.

Если функция $f(x) > 0$ на $[a;b]$ задана в параметрическом виде: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

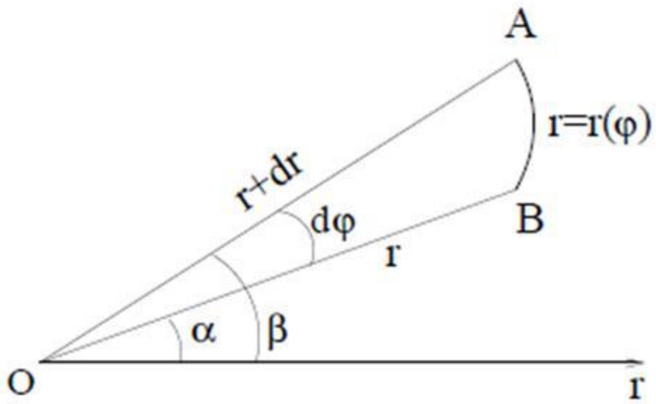
то площадь находится по формуле:

$$\boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt}.$$

Эта формула получается формальной подстановкой $y = f(x) = y(t), \; dx = x'(t)dt$.
Значения параметра t_1 соответствуют нижней границе a , t_2 –верхней границе b.

2. Площадь фигуры в полярной системе координат.

Выведем теперь формулу для нахождения площади, если одна из границ дана в полярных координатах $r = r(\varphi)$.



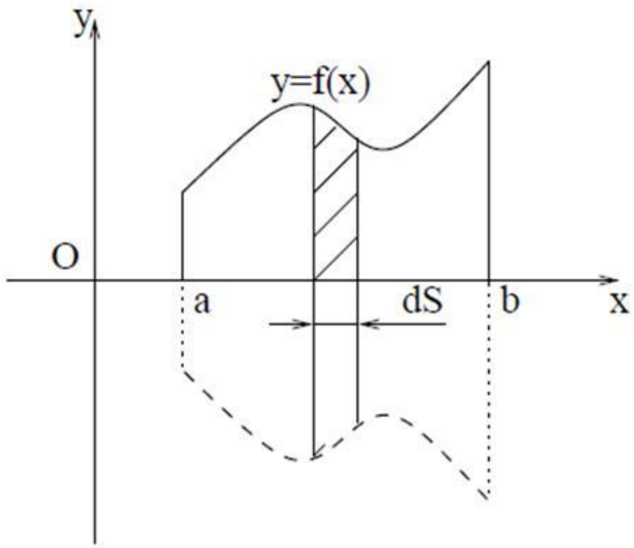
Найдем вначале площадь криволинейного сектора OAB.

С точностью до бесконечно малых высших порядков по сравнению с $d\varphi$ мы можем вычислить площадь этой фигуры, как площадь кругового сектора.

Поэтому $dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$, откуда

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi}.$$

3. Объем тела по известным поперечным сечениям.



Пусть требуется определить объем V некоторого тела.

Предположим, что известны площади сечений этого тела плоскостями, перпендикулярными оси Ox. Назовем эти сечения поперечными.

Очевидно, что они являются функциями переменной x: $s = s(x)$.

Обозначим через a и b абсциссы самой левой и самой правой точек тела, тогда

$$\boxed{V = \int_{a}^{b} s(x)dx}.$$

4. Объем тела вращения.

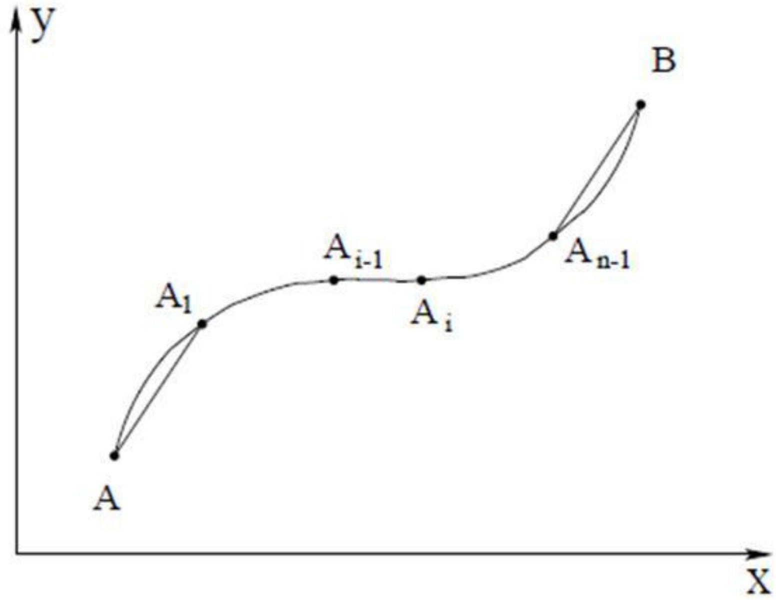
Пусть криволинейная трапеция вращается вокруг оси Ox.

Очевидно, что $S(x) = \pi y^2$. Тогда

$$\boxed{V_x = \pi \int_a^b y^2 dx}.$$

Замечание. Если криволинейная трапеция вращается вокруг оси Oy, то объем тела вращения находится по формуле:

$$\boxed{V_y = \pi \int_a^b x^2 dy}.$$



5. Длина дуги плоской кривой.

Пусть дана кривая L с начальной точкой A и конечной B.

Разделим ее на ряд элементарных дуг точками $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$. Положив $A = A_0$, $B = A_n$ и соединив соседние точки деления отрезками, получим ломаную $A_0 A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n$.

Определение. Длиной дуги плоской кривой L называется предел, к которому стремится периметр вписанной в эту дугу ломаной при условии, что число звеньев неограниченно возрастает и длина каждого из звеньев стремится к нулю.

Длина дуги, заданной в декартовых координатах уравнением $y = y(x)$, равна:

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx}.$$

Если плоская дуга задана в параметрическом виде: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

то длина дуги может быть найдена по формуле:

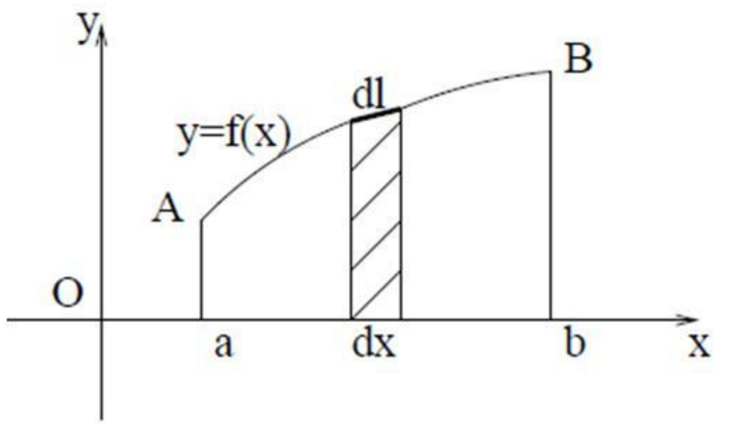
$$\boxed{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt}.$$

Если же дуга задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$, то

$$\boxed{l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi}.$$

6. Площадь поверхности вращения.

При вращении вокруг оси Ox элементарной трапеции с основанием dx получится усеченный конус, боковая поверхность которого равна произведению длины средней линии на апофему: $d\sigma = 2\pi y dl$, откуда



$$\boxed{\sigma = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx}.$$

7. Приложение определенного интеграла к решению физических задач.

$S=\int_0^T V(t)dt$ – путь, пройденный за время T материальной точкой, движущейся со скоростью $V(t)$.

$Q=\int_0^T I(t)dt$ – количество электричества, протекающего в цепи с силой тока $I(t)$ за время T.

$A=\int_0^L F(x)dx$ – работа, которую совершает сила $F(x)$, приложенная к телу.

Несобственные интегралы.

Определение интеграла основано на следующих условиях:
1) областью интегрирования является отрезок $[a;b]$;
2) подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на этом отрезке.
Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то обычное определение интеграла становится неприемлемым.
Обобщим понятие определенного интеграла на случаи, когда эти условия не выполняются.

Интегралы с бесконечными пределами (интеграл I рода).

Пусть в интеграле верхний предел бесконечный $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.
Поступим следующим образом:

1. Заменим бесконечный предел на конечный, например, b.

2. Вычислим $\int_a^b f(x)dx$ (он будет функцией переменной b).

3. Найдем предел этого интеграла при условии, что $b \to \infty$.

Этот предел называют ***несобственным интегралом с бесконечным пределом*** и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Таким образом, $$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Если этот предел существует, то несобственный интеграл называется ***сходящимся*** (существует), в противном случае – ***расходящимся*** (не существует).

Аналогично определяется интеграл с бесконечным нижним пределом:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

Интеграл, у которого оба предела бесконечны, определяется формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

где c – любая фиксированная точка.

Интеграл в левой части существует (сходится), если существуют оба интеграла в его правой части.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx$.

Решение: $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^{b} e^{-\alpha x}dx = -\frac{1}{\alpha}\lim\limits_{b\to+\infty}(e^{-\alpha b}-1) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, \text{ если } \alpha > 0, \\ +\infty, \text{ если } \alpha < 0. \end{cases}$

При $\alpha > 0$ $\lim\limits_{b\to+\infty} e^{-\alpha b} = \lim\limits_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{\alpha b}} = 0$, так как $e^{\alpha b}\to+\infty$ при $b\to+\infty$.

При $\alpha = 0$ несобственный интеграл расходится.

Поэтому заключаем, что исходный интеграл сходится при $\alpha > 0$ и равен в этом случае $\frac{1}{\alpha}$, а при $\alpha \le 0$ интеграл расходится, и суммы не имеет.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx$.

Решение: Разобьем интеграл на два точкой 0: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx = \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx + \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx$

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx = \int\limits_{-\infty}^{0} arctg^2 x\, d(arctg\, x) = \frac{1}{3}arctg^3 x\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{3}(0-(-\pi/2)^3) = \pi^3/24,$$

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{arctg^2 x}{1+x^2}dx = \int\limits_{0}^{+\infty} arctg^2 x\, d(arctg\, x) = \frac{1}{3}arctg^3 x\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{3}((\pi/2)^3-0) = \pi^3/24.$$

Так как оба интеграла сходятся, то исходный интеграл сходится и равен:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{arctg^2 x}{1+x^2} dx = \pi^3/24 + \pi^3/24 = \pi^3/12.$$

Замечание. Иногда замена переменной может превратить несобственный интеграл в определенный.

Пример. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение: Введем новую переменную и найдем соответствующие пределы интегрирования.

$$t = arctg\, x \Rightarrow dt = \frac{dx}{1+x^2},\ x = -\infty \Rightarrow t = -\frac{\pi}{2},\ x = \infty \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt = t\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi.$

Замечание. При решении примеров, связанных с несобственными интегралами

допускается следующая формальная запись: $\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$,

где $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.

Интегралы от разрывных функций (интеграл II рода).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;\, b)$ и в точке b имеет разрыв.
1. Заменим верхний предел b точкой $b-\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$).
По определению функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b-\varepsilon]$.
2. Вычислим определенный интеграл $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

3. Найдем предел этого определенного интеграла при $\varepsilon \to 0$.

Этот предел называют ***несобственным интегралом от разрывной функции***.
Если предел существует, то говорят, что интеграл сходится (существует).
В противном случае интеграл расходится (не существует).

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если же подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на $(a;\, b]$, то интеграл $\int f(x)dx$ определяется так:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Если же точка разрыва $x = c$ лежит внутри отрезка $[a;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Интеграл в левой части равенства называется сходящимся, если существуют оба интеграла в правой части.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{x-1}$.

Решение: Особая точка лежит внутри отрезка интегрирования. Поэтому разобьем интеграл на два:

$$\int_0^2 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^2 \frac{dx}{x-1}.$$

У первого интеграла особой точкой является верхняя граница интегрирования, у второго – нижняя.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln|x-1| \Big\|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln\varepsilon = -\infty.$$

Так как первый интеграл расходится, то независимо от того, сходится или расходится второй интеграл, исходный интеграл расходится.

Замечание. Если действовать формально, применяя формулу Ньютона-Лейбница, то получили бы заведомо неверный результат $\int_0^2 \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| \Big\|_0^2 = 0$.

Эта ошибка вызвана неправильным применением формулы Ньютона-Лейбница.

Замечание. Все виды несобственных интегралов можно определить как пределы определенных интегралов (а не пределы интегральных сумм).

Признаки сходимости несобственных интегралов.

Иногда нет необходимости вычислять несобственный интеграл, а достаточно знать сходится ли он или нет.

В таких случаях бывает полезно сравнить данный несобственный интеграл с другим, сходимость или расходимость которого заранее известна.

Приведем теоремы, устанавливающие признаки сходимости или расходимости, основанные на сравнении несобственных интегралов.

Теорема. Пусть на промежутке $[a;+\infty)$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и удовлетворяют условиям $0 \le \varphi(x) \le f(x)$.

Тогда

а) если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$;

б) если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Решение: $(x-1)^2 \ge 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \ge 0 \Rightarrow -x^2 \le -2x + 1$. Так как функция e^x монотонная, то $e^{-x^2} \le e^{-2x+1}$ или $e^{-x^2} \le e \cdot e^{-2x}$. Так как интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x}dx$ сходится. Поэтому сходится и исходный интеграл.

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на промежутке $[a; b)$ непрерывны и удовлетворяют условиям $0 \le \varphi(x) \le f(x)$, а в точке $x = b$ имеют разрыв. Тогда

а) если интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$.

б) если расходится интеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$, то расходится и интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Интегральный признак Коши сходимости знакоположительных рядов.

Теорема (интегральный признак Коши).

Пусть члены знакоположительного ряда

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

являются значениями при $x = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ некоторой функции $f(x)$, положительной, непрерывной, убывающей на промежутке $[1; +\infty)$, так что

$$u_1 = f(1), u_2 = f(2), \ldots, u_n = f(n), \ldots.$$

Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Если данный интеграл сходится, то сходится исходный ряд, а если расходится интеграл, то расходится ряд.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ с помощью интегрального признака сходимости рядов.

Решение: Так как $f(n)=\frac{1}{n\sqrt{n}}$, то $\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}dx=\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{x^{3/2}}dx=-2x^{-1/2}\Big|_{1}^{+\infty}=2$, следовательно, интеграл сходится, а значит, на основании интегрального признака Коши сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Спасибо за внимание