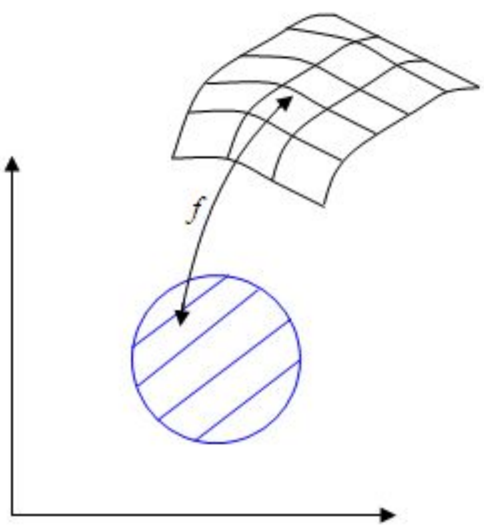
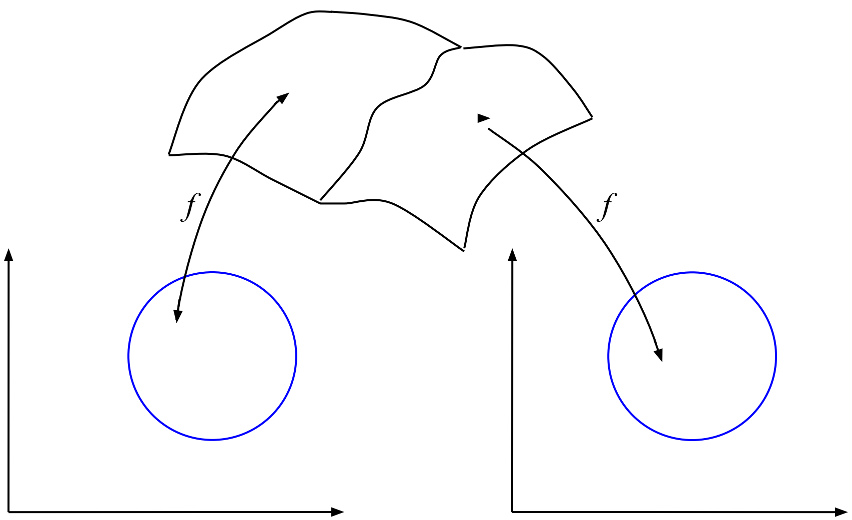
ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Задание поверхности

Определение поверхности



Определение: геометрическое место точек пространства, топологически эквивалентное множеству точек круга на плоскости, называется ***простым куском поверхности***.

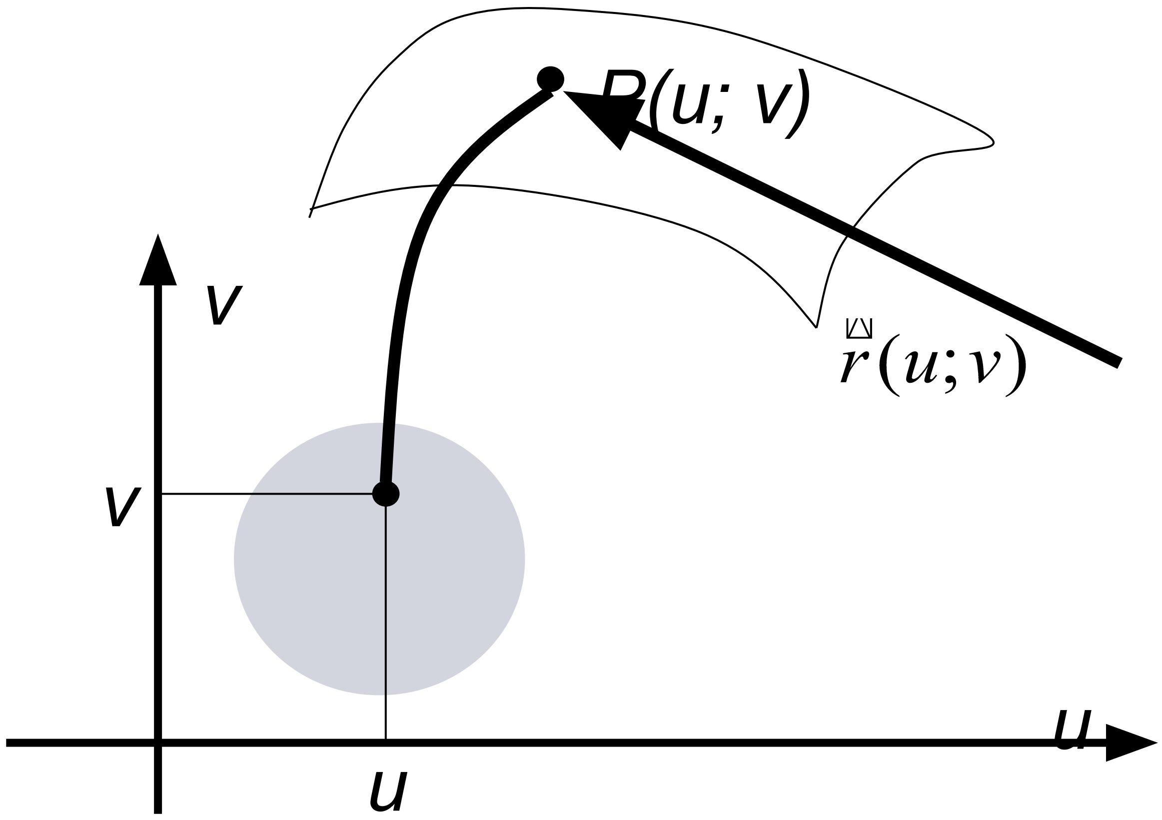


Определение: два простых куска поверхности называются ***склеенными***, если части их границ или целиком обе границы совпадают между собой.

Определение поверхности

Определение: ***поверхностью*** называется множество точек, которые могут быть склеены из конечного или счётного множества простых кусков.

Уравнение поверхности. Криволинейные координаты на поверхности



Уравнение поверхности. Криволинейные координаты на поверхности

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) \qquad (1)$$

(1) - выражает радиус-вектор точек поверхности в некоторой системе координат как функцию двух параметров *u* и *v.*

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \qquad (2)$$

(2) - параметрическое уравнение поверхности.

В отличие от кривых, поверхности параметризуются двумя параметрами *u* и *v.*

Уравнение поверхности. Криволинейные координаты на поверхности

$$I = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

(5) – матрица Якоби.

Пусть $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$,из теоремы об обратной функции следует,

что первые два уравнения системы (2) можно обратить:

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

Уравнение поверхности. Криволинейные координаты на поверхности

$$z = f(x, y) \qquad (3)$$

(3) – задание поверхности в явном виде.

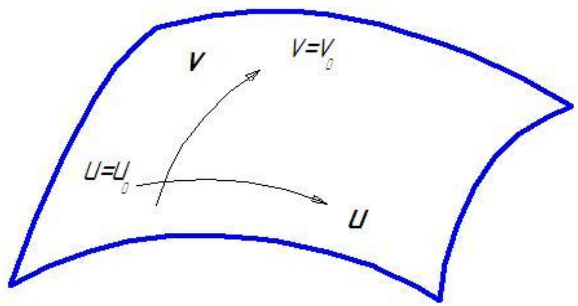
$$F(x, y, z) = 0 \qquad (4)$$

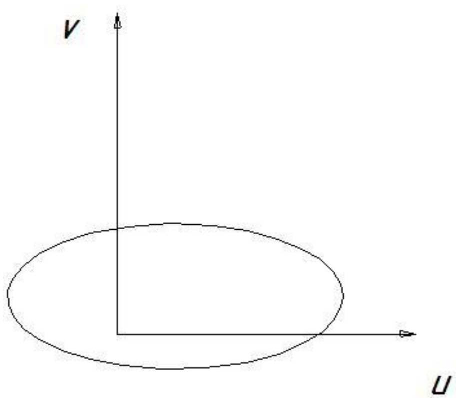
(4) – неявное уравнение поверхности.

Определение: рассмотрим линии на поверхности, в каждой точке которой выполняется: $u = u_0$ - $const$ или $v = v_0$ - $const$ Такие линии на поверхности называются ***координатными***, а u, v - ***криволинейными координатами***.

Определение: если в каждой точке поверхности ранг матрицы Якоби (3) равен 2, то система криволинейных координат на поверхности называется ***правильной***.

Уравнение поверхности. Криволинейные координаты на поверхности





Рассмотрим линию $v = v_0$ - $const$

$\bar{r} = \bar{r}(u, v_0)$ - уравнение кривой.

$\bar{r}_u \equiv \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial u}$ - касательный вектор к линии

$v = const.$

Рассмотрим линию $u = u_0$ - $const$

$\bar{r} = \bar{r}(u_0, v)$ - уравнение кривой.

$\bar{r}_v \equiv \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial v}$ - касательный вектор к линии

$u = const.$

Уравнение поверхности. Криволинейные координаты на поверхности

Определение: $\bar{r}_u, \bar{r}_v$ - называются ***координатными векторами***.

$$\bar{r}_u = \{x_u, y_u, z_u\}$$
$$\bar{r}_v = \{x_v, y_v, z_v\}$$

- строки в матрице Якоби.

Утверждение:

Сеть криволинейных координат – правильная $\Leftrightarrow$ $\bar{r}_u$ не коллинеарен $\bar{r}_v$.