

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ АДДИТИВНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ АЭРОМЕХАНИКИ

БРЕНДАКОВ В.Н.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПОТОКА

Методы идентификации основаны на сравнении различных числовых характеристик функций отклика. Используется понятие момента, согласно которому, функция распределения случайной величины может быть охарактеризована числовыми величинами (моментами различных порядков).

Безразмерным начальным моментом i - го порядка, характеризующим ϕ - кривую, является интеграл вида:

$$M_i = \int_0^{\infty} t^i \phi(t) dt$$

где t и $\phi(t)$ – безразмерные время и концентрация.

Безразмерный центральный момент i - го порядка имеет вид:

$$\eta_i = \int_0^{\infty} (t - M_1)^i \phi(t) dt$$

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПОТОКА

Для функции распределения времени пребывания, получаемой при импульсном вводе трассера в поток на входе его в аппарат, первый начальный момент M_1 представляет собой среднее время пребывания.

Первый центральный момент всегда равен нулю, т.е. $\eta_1 = 0$.

Второй центральный момент, называемый дисперсией, является мерой рассеяния времени пребывания и определяется по формуле

$$\eta_2 = \sigma^2 = \int_0^{\infty} (t - M_1)^2 \varphi(t) dt = M_2 - M_1^2.$$

Третий центральный момент η_3 называется асимметрией, характеризует степень асимметричности кривой распределения (ϕ - кривой), и определяется из уравнения

$$\eta_3 = \int_0^{\infty} (t - M_1)^3 \varphi(t) dt = M_3 - 3M_1M_2 + 2M_1^3.$$

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПОТОКА

Четвертый центральный момент, называемый эксцессом распределения, характеризует островершинность распределения и равен

$$\eta_4 = \int_0^{\infty} (t - M_1)^4 \varphi(t) dt = M_4 - 4M_1M_3 + 6M_1^2M_2 - 3M_1^4.$$

Обычно при расчете моментов по экспериментальным кривым используется ступенчатая аппроксимация, т.е. расчет моментов выполняется по формулам:

– начальные моменты

$$M_0 = \sum_{i=1}^n \Delta t \cdot c_i; \quad M_1 = \sum_{i=1}^n \Delta t \cdot t_i \cdot c_i; \quad M_2 = \sum_{i=1}^n \Delta t \cdot t_i^2 \cdot c_i;$$

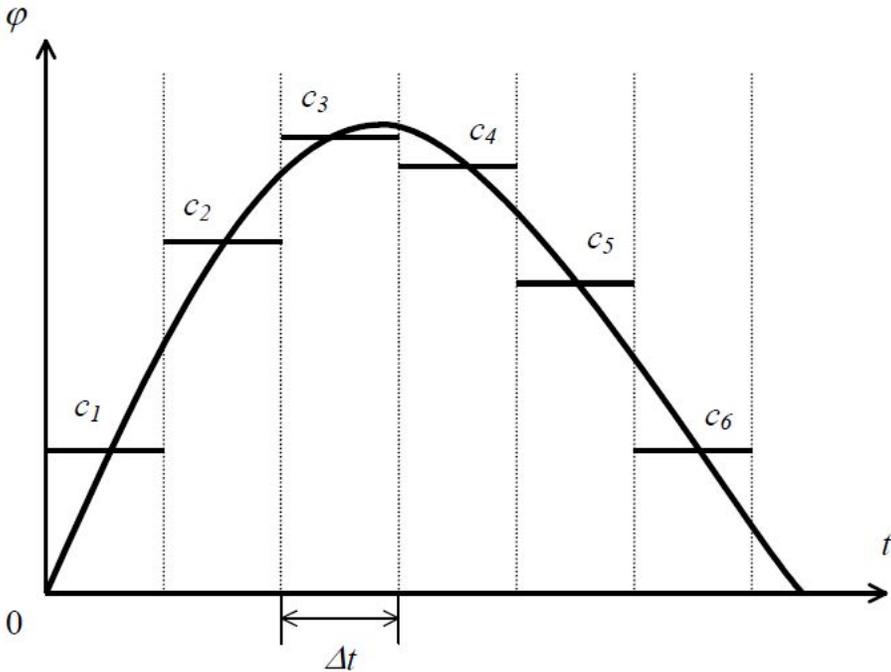
– масштабированные моменты

$$M_0^M = \frac{M_0}{M_0} = 1; \quad M_1^M = \frac{M_1}{M_0}; \quad M_2^M = \frac{M_2}{M_0};$$

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПОТОКА

– безразмерные моменты $M_i^T = \frac{M_i^M}{(M_1^M)^i}$; $M_2^T = \frac{M_2^M}{(M_1^M)^2}$

В формулах для начальных моментов значения c_i определяются из графика экспериментальной кривой $\varphi(t)$ как среднее значение внутри каждого интервала



Между безразмерными моментами и параметрами моделей существуют следующие соотношения

– безразмерные моменты $M_i^T = \frac{M_i^M}{(M_1^M)^i}$; $M_2^T = \frac{M_2^M}{(M_1^M)^2}$

В формулах для начальных моментов значения c_i определяются из графика экспериментальной кривой $\varphi(t)$ как среднее значение внутри каждого интервала

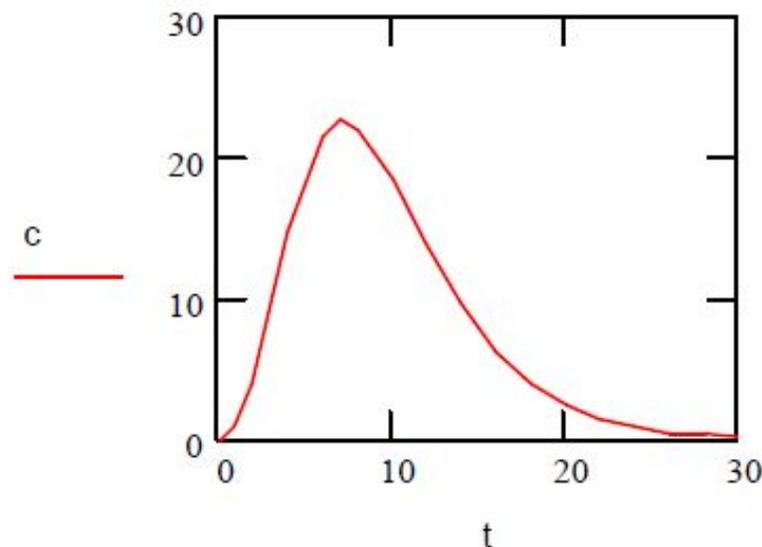
Алгоритм идентификации математической модели структуры потока - это вычисление всех моментов и определение с их помощью параметров модели.

ПРАКТИЧЕСКИЙ ПРИМЕР

Через насадочный аппарат длиной $L = 10$ м, внутренним диаметром $d = 0,065$ м, и коэффициентом заполнения насадкой $\phi = 0,7$ протекает жидкость с объемной скоростью $\nu = 0,001$ м³/с. Построить математическую модель структуры гидродинамического потока в аппарате.

На вход аппарата подается трассирующее вещество в виде δ - функции. На выходе аппарата замеряем его концентрацию, представляющую собой дифференциальную функцию распределения времени пребывания.

t	0	1	2	4	6	7	8	10		
c	0	1	3.8	14.6	21.3	22.6	21.8	18.4		
t	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
c	14	9.6	6.2	3.8	2.3	1.4	1	0.5	0.3	0.1



ПРАКТИЧЕСКИЙ ПРИМЕР

Второй этап – выбор вида модели. Выбор математической модели можно сделать на основе анализа кривой функции распределения времени пребывания частиц в аппарате и соотношения его размеров. Исходя из соотношения размеров аппарата ($L / d > 20$), можно выбрать либо модель идеального вытеснения, либо однопараметрическую диффузионную модель. Из рисунка видно, что график дифференциальной функции, построенной по данным таблицы, соответствует однопараметрической диффузионной модели. Уравнение этой модели:

$$\text{– безразмерные моменты } M_1^T = \frac{M_1^M}{(M_1^M)^2}; \quad M_2^T = \frac{M_2^M}{(M_1^M)^2}$$

В формулах для начальных моментов значения c_i определяются из графика экспериментальной кривой $\varphi(t)$ как среднее значение внутри каждого интервала

Начальные условия $t = 0; \quad c(x, 0) = 0;$

Граничные условия $x = 0; \quad c(0, t) = c_{вх};$

ПРАКТИЧЕСКИЙ ПРИМЕР

Третий этап – идентификация параметров выбранной зависимости. Для вычисления моментов необходимо получить таблицу значений t_i .

t_i	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29
c_i	1	9.2	17.9	22.6	20.1	16.2	11.8	7.9	5.0	3.1	1.9	1.2	0.8	0.4	0.2

– безразмерные моменты $M_1^T = \frac{M_1^M}{(M_1^M)^2}$; $M_2^T = \frac{M_2^M}{(M_1^M)^2}$

Эффективный объем аппарата V рассчитывается по формуле В формулах для начальных моментов значения c_i определяются из графика экспериментальной кривой $\varphi(t)$ как среднее значение внутри каждого интервала

– безразмерные моменты $M_1^T = \frac{M_1^M}{(M_1^M)^2}$; $M_2^T = \frac{M_2^M}{(M_1^M)^2}$

Линейная скорость потока равна

В формулах для начальных моментов значения c_i определяются по графика экспериментальной кривой $\varphi(t)$ как среднее значение внутри каждого интервала

Коэффициент продольного перемешивания D_x равен

– безразмерные моменты $M_1^T = \frac{M_1^M}{(M_1^M)^2}$; $M_2^T = \frac{M_2^M}{(M_1^M)^2}$

В формулах для начальных моментов значения c_i определяются из графика экспериментальной кривой $\varphi(t)$ как среднее значение внутри каждого интервала

ПРАКТИЧЕСКИЙ ПРИМЕР

Для нахождения значения критерия Пекле Pe рассмотрим дифференциальную функцию распределения времени пребывания, полученную на основе экспериментальных данных. Эта функция может быть охарактеризована ее числовыми характеристиками – моментами. Для определения моментов построенный график разбиваем по оси X на равные интервалы и методом прямоугольников находим площадь под кривой для каждого интервала.

$$t_i = 1 \dots 29, \quad \Delta t = 2, \quad n = 14$$

Вычислим размерные моменты

$$M_0 = \sum_{i=1}^n \Delta t \cdot c_i; \quad M_1 = \sum_{i=1}^n \Delta t \cdot t_i \cdot c_i; \quad M_2 = \sum_{i=1}^n \Delta t \cdot t_i^2 \cdot c_i;$$

– безразмерные моменты $M_i^T = \frac{M_i^M}{(M^M)^i}; \quad M_2^T = \frac{M_2^M}{(M^M)^2}$

В формулах для начальных моментов значения c_i определяются из графика экспериментальной кривой $\varphi(t)$ как среднее значение внутри каждого интервала

ПРАКТИЧЕСКИЙ ПРИМЕР

– безразмерные моменты

$$M_i^T = \frac{M_i^M}{(M_1^M)^i}; \quad M_2^T = \frac{M_2^M}{(M_1^M)^2}$$

В формулах для начальных моментов значения c_i определяются из графика экспериментальной кривой $\varphi(t)$ как среднее значение внутри каждого интервала

В формулах для начальных моментов значения c_i определяются из графика экспериментальной кривой $\varphi(t)$ как среднее значение внутри каждого интервала

– безразмерные моменты

$$M_i^T = \frac{M_i^M}{(M_1^M)^i}; \quad M_2^T = \frac{M_2^M}{(M_1^M)^2}$$

В формулах для начальных моментов значения c_i определяются из графика экспериментальной кривой $\varphi(t)$ как среднее значение внутри каждого интервала

Начальные условия $t = 0; \quad c(x, 0) = 0;$

Граничные условия $x = 0; \quad c(0, t) = c_{ex};$

ПРАКТИЧЕСКИЙ ПРИМЕР

Решение дифференциальных уравнений в частных производных (уравнение ОДМ) достаточно сложно, поэтому для проверки адекватности модели перейдем к ячеечной модели. Это допустимо, если

– безразмерные моменты $M_i^T = \frac{M_i^M}{(M_1^M)^i}; M_2^T = \frac{M_2^M}{(M_1^M)^2}$

– безразмерные моменты $M_i^T = \frac{M_i^M}{(M_1^M)^i}; M_2^T = \frac{M_2^M}{(M_1^M)^2}$

В формулах для начальных моментов значения c_i определяются из графика экспериментальной кривой $\varphi(t)$ как среднее значение внутри каждого интервала

Число ячеек равно

В формулах для начальных моментов значения c_i определяются из графика экспериментальной кривой $\varphi(t)$ как среднее значение внутри каждого интервала

Получили ячеечную модель с четырьмя ячейками, уравнения которой записываются следующим образом

– безразмерные моменты $M_i^T = \frac{M_i^M}{(M_1^M)^i}; M_2^T = \frac{M_2^M}{(M_1^M)^2}$

В формулах для начальных моментов значения c_i определяются из графика экспериментальной кривой $\varphi(t)$ как среднее значение внутри каждого интервала

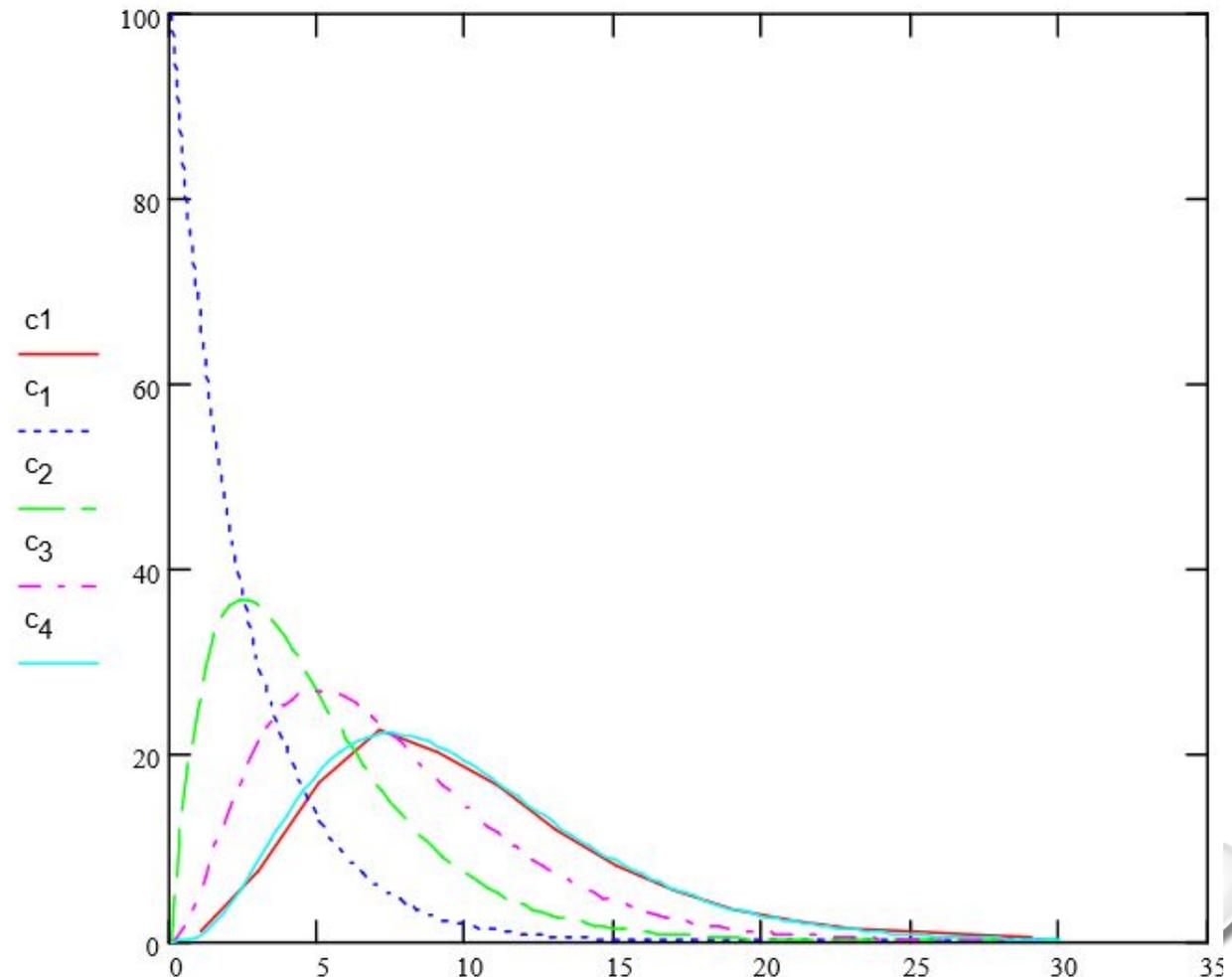
– безразмерные моменты $M_i^T = \frac{M_i^M}{(M_1^M)^i}; M_2^T = \frac{M_2^M}{(M_1^M)^2}$

В формулах для начальных моментов значения c_i определяются из графика экспериментальной кривой $\varphi(t)$ как среднее значение внутри каждого интервала

ПРАКТИЧЕСКИЙ ПРИМЕР

При выборе модели и определении параметров выбранной зависимости получили систему четырех дифференциальных уравнений с четырьмя неизвестными, но нас интересуют только значения концентрации на выходе последней ячейки, т.е. изменение концентрации c_4 . Систему решаем численным методом.

Сравнение экспериментальной кривой и расчетной функции распределения в последней ячейке дает возможность судить об адекватности модели.



ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

– безразмерные моменты $M_i^T = \frac{M_i^M}{(M_1^M)^i}; M_2^T = \frac{M_2^M}{(M_1^M)^2}$

В формулах для начальных моментов значения c_i определяются из графика экспериментальной кривой $\phi(t)$ как среднее значение внутри каждого интервала

t, c	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	5,4	0,3	0,1	4,3	0,5	0,1	6,5	1,0	0,1	3,3
2	14,4	2,0	0,8	12,2	2,8	0,5	16,5	4,9	1,1	9,9
3	21,7	4,9	2,6	19,3	6,8	1,8	23,6	10,6	3,6	16,5
4	25,8	8,7	5,5	24,2	11,3	3,9	26,8	16,1	7,2	21,7
5	27,1	12,6	9,0	26,6	15,5	6,8	26,7	20,0	11,3	25,1
6	26,1	16,1	12,5	27,0	18,9	9,9	24,5	22,0	14,9	26,8
7	23,8	18,9	15,6	25,9	21,2	13,0	21,3	22,3	17,6	27,0
8	20,9	20,9	17,8	23,8	22,2	15,6	17,7	21,2	19,1	26,1
9	17,4	22,0	19,1	21,3	22,3	17,6	14,3	19,3	19,5	24,5
10	14,7	22,4	19,5	18,5	21,6	18,9	11,2	16,9	19,0	22,4
12	9,5	21,2	18,2	13,2	18,5	19,4	6,6	11,9	16,0	17,7
14	5,8	18,5	15,2	8,9	14,6	17,9	3,6	7,7	12,1	13,2
16	3,4	15,2	12,6	5,8	10,8	15,2	1,9	4,6	8,4	9,5
18	1,9	11,9	8,4	3,6	7,7	12,1	1,0	2,7	5,4	6,6
20	1,1	8,9	5,7	2,2	5,2	9,1	0,5	1,5	3,4	4,5
22	0,6	6,5	3,8	1,3	3,4	6,6	0,2	0,8	2,0	3,0
24	0,3	4,6	2,4	0,8	2,2	4,7	0,1	0,4	1,2	1,9
26	0,2	3,3	1,5	0,5	1,4	3,2	0	0,2	0,6	1,2
28	0,1	2,2	0,9	0,3	0,9	2,1		0,1	0,4	0,8
30	0	1,5	0,5	0,2	0,5	1,4		0	0,2	0,5
32		1,0	0,3	0,1	0,3	0,9			0,1	0,3
34		0,7	0,2	0	0,2	0,6			0	0,2
36		0,4	0,1		0,1	0,4				0,1
38		0,3	0		0	0,2				0
40		0,2				0,1				
42		0,1				0				
44		0								
ϕ	0,77	0,6	0,625	0,74	0,66	0,6	0,8	0,73	0,67	0,7