Государственное образовательное учреждение высшего образования Московской области
Московский государственный областной университет

Физико-математический факультет

Кафедра высшей алгебры, элементарной математики и методики преподавания математики

Методы и приемы решения иррациональных уравнений с параметром

Студент: Кошма Анастасия Руслановна
Научный руководитель: доцент Забелина С.Б.

Москва, 2017

Введение

Целью курсовой работы является изучение методов и приемов решения иррациональных уравнений (разных видов), содержащие параметр.

Для достижения данной цели нам необходимо выделить следующие задачи:

1) Дать основные понятия иррациональных уравнений с параметром;
2) Выявить основные положения теории решения иррациональных уравнений с параметром;
3) Рассмотреть примеры решения тригонометрических уравнений с параметром;

Изучение многих физических процессов и геометрических закономерностей часто приводит к решению уравнений, содержащих параметр.

В настоящее время, задачи и уравнения, содержащие параметр, входят в Единый Государственный Экзамен, но, к сожалению, их решение часто вызывает трудности у учеников.

Глава I

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Способы решения иррациональных уравнений

Равенство двух функций, от одних и тех же аргументов называется уравнением. Уравнения подразделяются на две большие группы: алгебраические и трансцендентные.

Способы решения иррациональных уравнений

Среди алгебраических уравнений выделяют также:
1) целые — с обеими частями, состоящими из целых алгебраических выражений по отношению к неизвестным;
2) дробные — содержащие целые алгебраические выражения в числителе и знаменателе;
3) иррациональные — алгебраические выражения в котором переменная содержится под знаком радикала или возведена в дробную степень.

Более подробно мы будем рассматривать уравнения 3 типа.

Способы решения иррациональных уравнений

К иррациональным уравнениям относятся уравнения вида $\sqrt{A(x)} = B(x)$, $\sqrt{A(x)}=\sqrt{B(x)}$, $A\sqrt{B(x)} = 0$ где A(x) и B(x) – выражения с переменной.

Главной идеей решения иррационального уравнения состоит в сведении этого уравнения к рациональному уравнению, которое либо равносильно исходному иррациональному уравнению.

Основной способ для избавления от корня и получить рациональный вид уравнения – это возведение обеих частей этого уравнения в одну и ту же степень, которая имеет корень, содержащий неизвестное, и последующее «освобождение» от радикалов по формуле:

$$(\sqrt[n]{\varphi(x)})^n = \varphi(x).$$

Способы решения иррациональных уравнений

Рассмотрим применение данного метода для решения иррациональных уравнений вида:

$$\sqrt[2k]{A(x)} = B(x)$$

Например, решим иррациональное уравнение: $\sqrt{5-4x} = 2x+5$

Решение. Нам необходимо сначала возвести обе части в квадрат. Это действие мы производим для того, что бы избавиться от радикалов.

Благодаря этому, уравнение приобретет привычный нам с Вами вид и решить его нам не составит особых трудностей:

$$5 - 4x = 4x^2 + 20x + 25$$

Перенесем все в правую сторону и приравняем к нулю:

$$4x^2 + 20x+4x - 5 + 25 = 0$$

$$4x^2 + 24x + 20 = 0$$

Разделим все уравнение на 4:

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

Способы решения иррациональных уравнений

Получили привычное нам квадратное уравнение. Решить его можно с помощью нахождения дискриминанта, либо с помощью теоремы Виета. Воспользуемся дискриминантом:

$$D = b^2 - 4ac = 36 – 4 * 1* 5 = 36 – 20 = 16;$$

$$\sqrt{D} = \pm 4;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x_1 = -5, x_2 = -1;$$

Выполним проверку: подставим значение (-5) в наше исходное уравнение:

$\sqrt{5 + 20} = -10 + 5;$

5 = -5 – неверно, соответственно значение (-5) не подходит.

Подставим (-1):

$\sqrt{5 + 4} = -2 + 5$

3 = 3 – верно, соответственно значение (-1) является корнем данного иррационального уравнения.

Ответ: -1

Способы решения иррациональных уравнений

В процессе решения уравнений важно знать, при каких преобразованиях данное уравнение переходит в равносильное ему уравнение.

Теорема 1: Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив его знак, то получим уравнение, равносильное данному.

Доказательство:

Докажем, что уравнение $f(x) = g(x)+q(x)$ (1)

равносильно уравнению

$f(x) – q(x) = g(x)$ (2)

Пусть $x = a$ – корень уравнения. Значит имеет место числовое равенство $f(a)=g(a)+q(a)$. Но тогда по свойству действительных чисел будет выполняться и числовое равенство $f(a)-q(a)=g(a)$ показывающее, что a – корень уравнения (2). Аналогично доказывается, что каждый корень уравнения (2) является и корнем уравнения (1).

Что и требовалось доказать.

Способы решения иррациональных уравнений

Теорема 2: Если обе части уравнения умножить на отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

Доказательство: докажем, что уравнение 6х–3=0 равносильно уравнению 2х–1=0

решим уравнение 6х–3=0 и уравнение 2х–1=0

$$\begin{cases} 6x = 3, \\ 2x = 1; \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}5, \\ x = 0{,}5. \end{cases}$$

Так как корни уравнений равны, то уравнения равносильны.

Что и требовалось доказать.

Сущность решения задач с параметром

Параметр - это величина, которая входящих в формулы и выражения, значение коей в рамках рассматриваемой задачи является постоянным.

Существует несколько способов решения задач с параметром. Рассмотрим их:

Способ I - аналитический. Это способ так называемого прямого решения, повторяющего стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра.

Способ II - графический. В зависимости от задачи (с переменной x и параметром a) рассматриваются графики или в координатной плоскости (x;y), или в координатной плоскости (x;a).

Способ III - решение относительно параметра. При решении этим способом переменные x и a принимаются равноправными и выбирается та переменная, относительно которой аналитическое решение признается более простым. После естественных упрощений возвращаемся к исходному смыслу переменных x и a и заканчиваем решение.

Глава II

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Сущность решения задач с параметром

Способ I - аналитический.

$x - \sqrt{a - x^2} = 1$ (1)

Решение:

Возведем в квадрат обе части данного уравнения с последу ющей проверкой полученных решений. Перенесем x в правую сторону и умножим на (-1):

$\sqrt{a - x^2} = x - 1$ (2)

При возведении в квадрат обеих частей исходного уравнен ия и проведения тождественных преобразований получим:

$2x^2 - 2x + (1 - a) = 0$

$D = 2a - 1$

Особое значение : $a = 0{,}5$. Отсюда :

1) при $a > 0{,}5$ $x_{1,2} = 0{,}5\,(1 \pm \sqrt{2a-1})$;

2) при $a = 0{,}5$ $x = 0{,}5$;

3)при $a < 0{,}5$ уравнение не имеет решений.

Проверка:

1) при подстановке $x = 0{,}5$ в уравнение (2), равносильное исходному, получим неверное равенство. Соответственно,$x = 0{,}5$ не является решением (2) и (1) уравнений;

2) если подставить $x_1 = 0{,}5\,(1 \pm \sqrt{2a-1})$ в (2) получим:

$-0{,}5\,(1 + \sqrt{2a-1}) = \sqrt{a} - (0{,}5\,(1 - \sqrt{2a-1}))^2$

Так как левая часть равенства отрицательна, тоx_1 не удовлетворяет исходному уравнению.

3) подставим x_2 в уравнение (2):

$$\sqrt{a - \left(\frac{1 + \sqrt{2a-1}}{2}\right)^2} = \frac{1 + 2a - 1}{2}$$

Проведя равносильные преобразования, получим:

Если $\frac{\sqrt{2a-1} - 1}{2} \geq 0$ то можно возвести полученное равенство в квадрат, то получим:

$$\frac{a - \sqrt{2a-1}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2a-1} - 1}{2}\right)^2$$

Имеем истинное равенство при условии, если: $\frac{\sqrt{2a-1} - 1}{2} \geq 0$ [10]

Это условие выполняется тогда и только тогда, если $a \geq 1$.

Так как равенство истинно при $a \geq 1$, а x_2 может быть корнем уравнения (1) при $a > 0{,}5$, соответственно, x_2 является корень уравнения при $a \geq 1$.

Сущность решения задач с параметром

Способ II - графический.

Стандартный способ решения уравнений в отдельных случаях приводит к сложным преобразованиям. Процесс решения может быть упрощен, если применить графический прием. Использование графического метода сводится к построению и анализу графиков функций, с помощью которых составлено уравнение.

$a(x+1)=\sqrt{x}$

Используя графический метод решения, найдем все значения параметра, при которых прямая $y = a(x+1)$ имеет хотя бы одну общую точку с графиком функции $y=\sqrt{x}$. Заметим, что для прямой $y = a(x+1)$ параметр a является угловым коэффициентом (при изменении параметра одна прямая будет переходить в другую с помощью поворота около точки (-1;0), так как для любого ау(-1) = 0.

По графику, который изображен выше, мы видим, что искомыми являются прямые, лежащие внутри заштрихованной пары вертикальных углов, включая границы. Им соответствуют значения $a \in [0; a_0]$, где a_0 отвечает моменту касания прямойу $= a(x+1)$ графика функции $y=\sqrt{x}$

$a_0 > 0$

Значение a_0 находим из условия, что уравнение $a(x+1) = \sqrt{x}$ имеет ровно один корень. После преобразований получим квадратное уравнение:

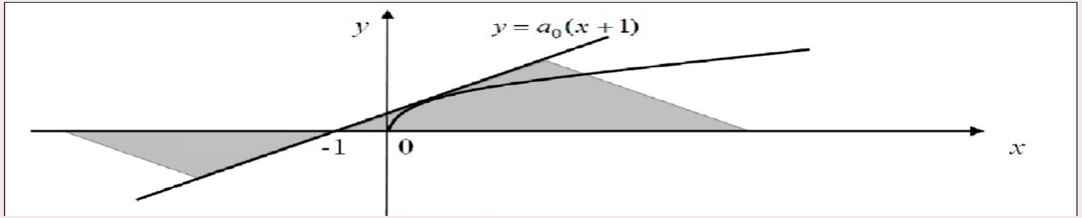
$a_0{}^2 x^2 + (2a_0{}^2 - 1)x + a_0{}^2 = 0$

$D = 1 - 4a_0{}^2$

$1 - 4a_0{}^2 = 0$

$a_0 = \pm 0{,}5$

Так как $a_0 > 0$,то корнем данного уравнения будет являться число 0,5



Сущность решения задач с параметром

Способ III - решение относительно параметра.

$$\begin{cases} \sqrt{x+a} - \sqrt{y+b} = 1 \\ \sqrt{y+a} - \sqrt{x+b} = 1 \end{cases}$$

В данной системе вычтем из первого уравнения второе

$\sqrt{x+a} - \sqrt{y+b} - \sqrt{y+a} - \sqrt{x+b} = 0$

$\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{y+b} + \sqrt{y+a}$

Рассмотрим функцию $f(t) = \sqrt{t+a} + \sqrt{t+b}$

Используя свойство суммы возрастающих функций, делаем вывод что функция $f(t)$ возрастающая. Заметим, что $f(x) = f(y)$. Следовательно $x = y$.

Отсюда получаем

$\sqrt{x+a}$-$\sqrt{x+b} = 1$

$$\begin{cases} x \geq -a \\ y \geq -b \\ x + a = 2\sqrt{x+b} + b + x + b + 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \geq -a \\ y \geq -b \\ \sqrt{x+b} = \dfrac{a-b-1}{2} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a \geq b+1 \\ x \geq -b \\ x = \dfrac{(a-b-1)^2}{4} \end{cases}$$

Очевидно, что $x = \frac{(a-b-1)^2}{4} - b \geq -b$

А значит, если $a \geq b + 1$, то $x = y = \frac{(a-b-1)^2}{4}$, если $a<b + 1$, то система не имеет решений.

Примеры

Пример 1

$$\sqrt{x-1} = x - a$$

Решение:

Перепишем уравнение в следующем виде:

$x - 1 - \sqrt{x-1} + 1 - a = 0$

Рассмотрим его как квадратное относительно $\sqrt{x-1}$. Находим дискриминант уравнения

$D = 4a - 3$

Уравнение (1) имеет решение только в том случае, если $a \geq \frac{3}{4}$.

Имеем: $\begin{cases} \sqrt{x-1} = \frac{1-\sqrt{4a-3}}{2} & (2) \\ \sqrt{x-1} = \frac{1+\sqrt{4a-3}}{2} & (3) \end{cases}$

Заметим, что уравнение (2) имеет решение тогда и только тогда, когда $1 - \sqrt{4a-3} \geq 0$, то есть при $a \leq 1$. Решив уравнения (2) и (3), получим при $\frac{3}{4} \leq a \leq 1$:

$x_1 = \frac{2a+1-\sqrt{4a-3}}{2}$, $x_2 = \frac{2a+1+\sqrt{4a-3}}{2}$

Таким образом, приходим к следующему:

при $\frac{3}{4} \leq a \leq 1$ уравнение имеет два корня: x_1 и x_2; при $a > 1$, уравнение имеет один корень: x_2; при $a < \frac{3}{4}$ решений нет.

Примеры

Пример 3

$$\sqrt{a-x} = 2 + x$$

Решение:

$$\sqrt{a-x} = 2 + x \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + x \geq 0 \\ a - x = 4 + 4x + x^2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2 + 5x + 4 = a. \end{cases} f(x) = x^2 + 5x + 4$$

$f(x) = a$, $x \geq -2$

Построим графики этих функций (рис.2).

Из графика видно, что при уравнение имеет единственное решение.

$a \geq -2$

Ответ: уравнение имеет единственное решение -2

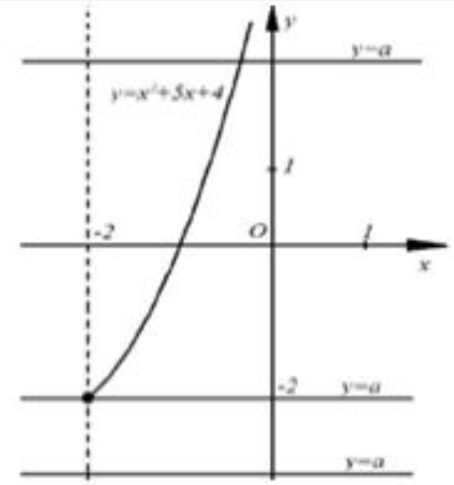


Рис. 2

Примеры

Пример 8

$$\begin{cases}\sqrt{2x+a} + \sqrt{2y+b} = 4 \\ \sqrt{2y+a} + \sqrt{2x+b} = 4\end{cases}$$

Решение

В этой системе нам необходимо вычесть из первого уравнения второе

$$\sqrt{2x+a} + \sqrt{2y+b} - \sqrt{2y+a} + \sqrt{2x+b} = 0$$

$$\sqrt{2x+a} + \sqrt{2x+b} = \sqrt{2y+a} - \sqrt{2y+b}$$

Рассмотрим функцию $f(t) = \sqrt{t+a} + \sqrt{t+b}$

По свойству суммы возрастающих функций делаем вывод, что $f(t)$ является возрастающей функцией.

$f(x) = f(y)$, а следовательно $x=y$

Получаем

$$\sqrt{2x+a} + \sqrt{2x+b} = 4$$

$$\begin{cases} x \geq -a \\ y \geq -b \\ x + a = 2\sqrt{2x+b} + b + x + b + 2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \geq -a \\ y \geq -b \\ \sqrt{2x+b} = \dfrac{a-b-2}{4} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a \geq b+2 \\ x \geq -b \\ x = \dfrac{(a-b-2)^2}{8} \end{cases}$$

Не трудно заметить, что $x = \frac{(a-b-2)^2}{8} = y$, но если $a < b + 2$, то система не имеет решений.

Заключение

- В данной курсовой работе познакомились с понятием уравнения, параметра, иррационального уравнения, а так же научились решать иррациональные уравнения, содержащие параметр.

Список литературы

- 1) Открытый урок : [Электронный ресурс]., 2003 – 2017. http://xn--i1abbnckbmcl9fb.xn--p1ai/%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D1%8C%D0%B8/579138/:(Дата обращения на ресурс 25. 11. 17).
- 2) Алгебра [Текст]: учебник для 9 класса средней школы / Ш.А. Алимов [и др.]; отв. ред. А.Н. Тихонов. – М.: Просвещение, 1992.
- 3) Алгебра [Текст]: учебник для 9 класса средней школы / Ю.Н. Макарычев [и др.]; отв. ред. С.А.
- 4) Ратников, Н.П. От уравнения с параметром – к графику, задающему параметр [Текст]/ Н.П. Ратников // Математика в школе – 1990. - №3. – С. 80.
- 5) Кожухова, С.А. Свойства функций в задачах с параметром [Текст]/ С.А. Кожухова, С.К. Кожухов // Математика в школе – 2003. - №7. – С. 17-24.
- 6) Национальная психологическая энциклопедия: [Электронный ресурс]., 2017. https://vocabulary.ru/termin/parametr.html (Дата обращения на ресурс: 15. 10 .17).
- 7) Электронный научно – практический журнал «Современные научные исследования и инновации» [Электронный ресурс]., 2017. http://web.snauka.ru/issues/2015/10/58207 (Дата обращения на ресурс 25.11.17).
- 8)Инфоурок [Электронный ресурс]., 2017. https://infourok.ru/metody_resheniya_zadach_s_parametrami-398722.htm(Дата обращения на ресурс 8.10.17)
- 9) Педагогические технологии и информационное образование [Электронный ресурс]., 2017. http://ikted.ru/articles/94/ (Дата обращения на ресурс 2.10.17)
- 10) Параметры [Электронный ресурс]., http://parametry.narod.ru/uravneniya.html (Дата обращения на ресурс 18.10.17)
- 11) Дробно – рациональные и иррациональные уравнения и неравенства с параметрами [Электронный ресурс]., https://pedportal.net/attachments/000/500/568/500568.pdf?1426921098 (Дата обращения на ресурс 22.11.17)
- 12) Старков В. Н. «165 задач с параметрами» [Электронный ресурс]., http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/starkov/165.pdf (Дата обращения на ресурс 25.11.17)
- 13) Математика химия физика [Электронный ресурс] http://studbooks.net/2192503/matematika_himiya_fizika/transtsendentnye_uravneniya_parametrom_metody_resheniy (Дата обращения на ресурс25.11.17)