Тема 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

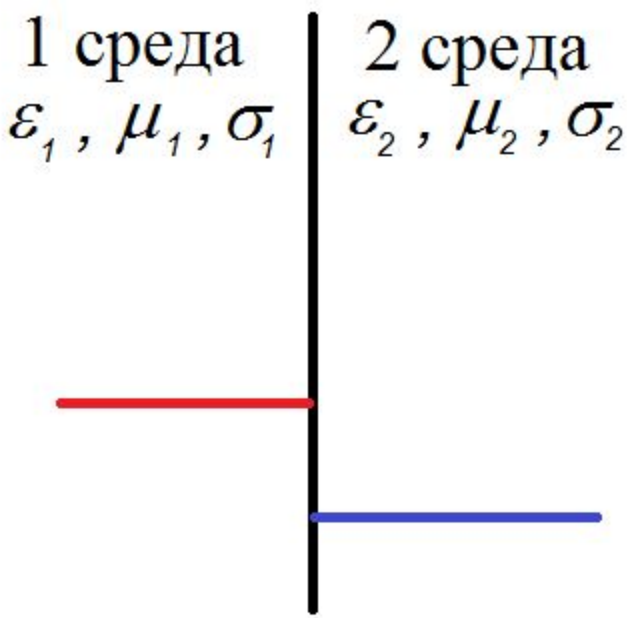
Лекция №2 (2). Основные теоремы электродинамики

1. Граничные условия на поверхностях раздела реальных сред. Условия излучения.
2. Основные теоремы электродинамики.
3. Энергия электромагнитного поля. Теорема Умова-Пойнтинга.

1 Граничные условия на поверхности раздела реальных сред. Условия излучения

1 Необходимость введения граничных условий.

Параметры сред (ε, μ, σ) в заданном объеме могут изменяться произвольно. При переходе через некоторую поверхность (границу раздела сред) параметры изменяются скачком.

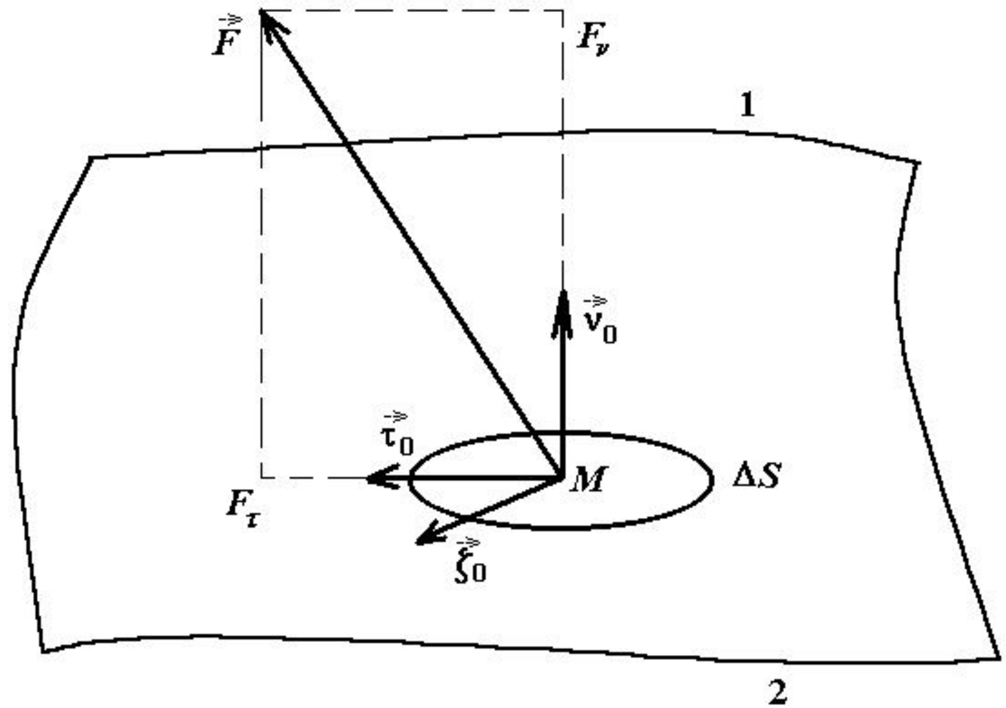


Уравнения Максвелла в дифференциальной форме на границе раздела теряют смысл (производная терпит разрыв). Граничные условия устраняют неопределенность.

2 Типы граничных условий.

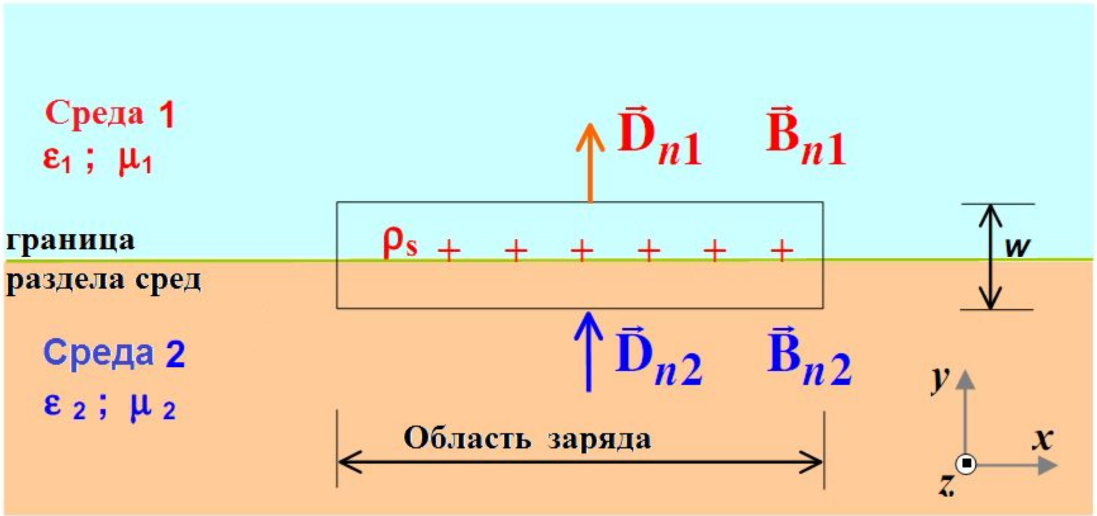
Электромагнитные поля – векторные величины. Могут быть представлены в виде разложения в базис, в том числе и на границе раздела сред ($\Delta S \to 0$):

$$\vec{F} = \underbrace{\vec{\nu}_0 F_\nu}_{\textit{нормальная компонента}} + \underbrace{\vec{\tau}_0 F_\tau + \vec{\xi}_0 F_\xi}_{\textit{тангенциальные (касательные) компоненты}}$$

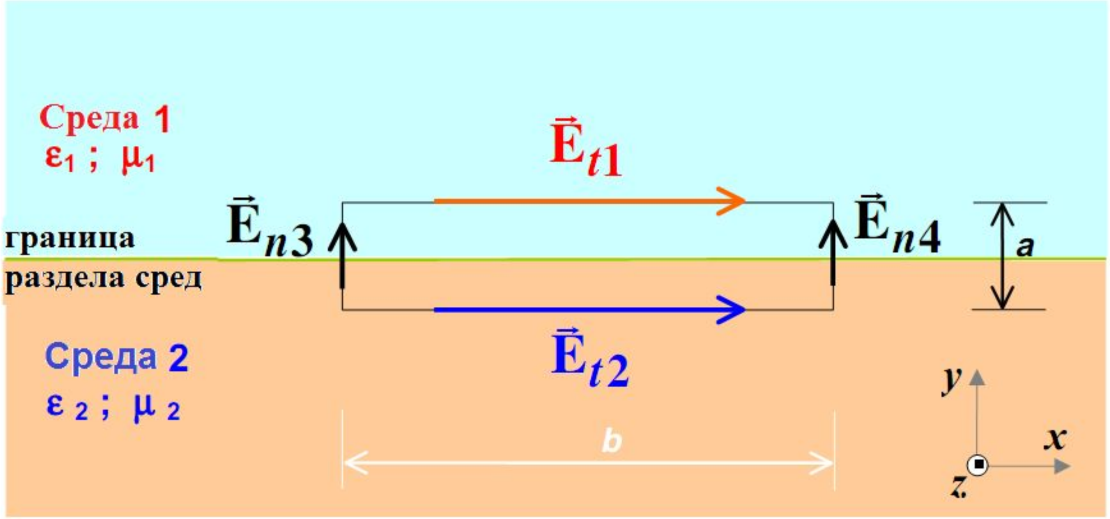


Граничные условия для электрического поля:

- *для нормальных компонент*: $\left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right)\overrightarrow{v_0} = \rho$



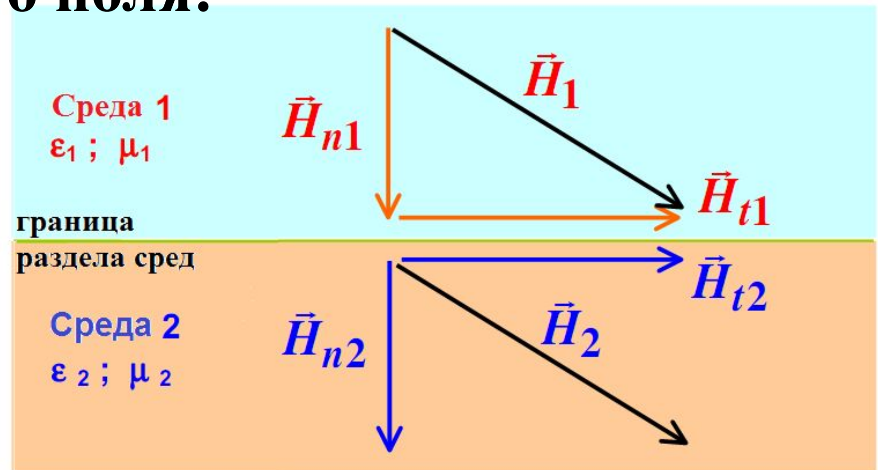
- *для тангенциальных компонент*: $\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right)\overrightarrow{\tau_0} = 0 \quad [\overrightarrow{v_0}, \vec{E}_1 - \vec{E}_2] = 0$



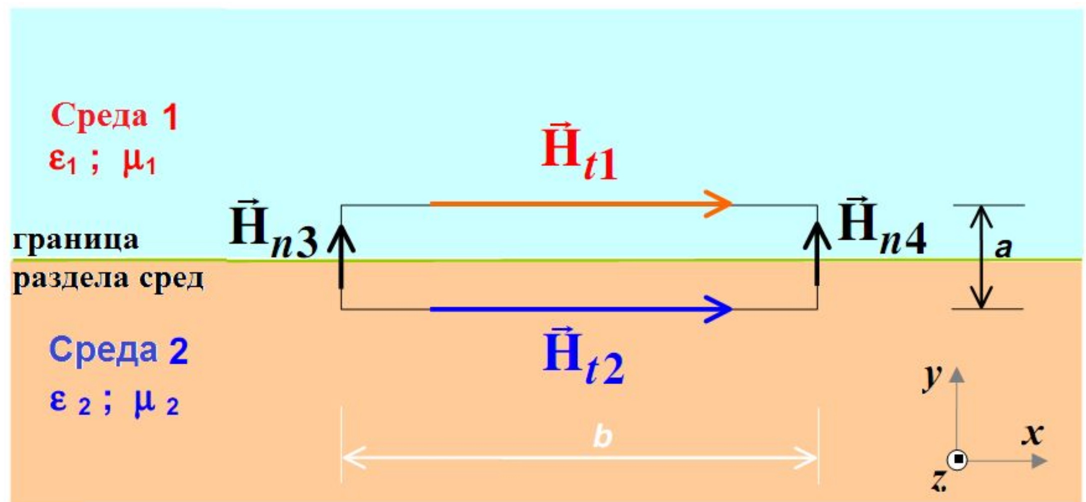
Граничные условия для магнитного поля:

- *для нормальных компонент*:

$$\left(\vec{B}_1-\vec{B}_2\right)\overrightarrow{v_0}=0$$



- *для тангенциальных компонент*:



$$[\overrightarrow{v_0},\overrightarrow{H}_1-\overrightarrow{H}_2]=\vec{\eta}$$

где $\vec{\eta}^{\,э}=\lim\limits_{\Delta l\to 0}\vec{i}_0\dfrac{\Delta I}{\Delta l}$ - поверхностный ток, связанный с объемным током соотношением

$$\vec{j}^{\,э.вт.}(\vec{r})=\vec{\eta}(\vec{\tau},\vec{\zeta})\,\delta(\nu-\nu')$$

Условия излучения: применяются для обеспечения единственности решения. (В общем случае решений дифференциальных уравнений – два. Одно не соответствует физическим понятиям).

Для свободного пространства используется ***условие излучения Зоммерфельда***:

1) амплитуда поля на больших расстояниях от источника должно убывать, по крайней мере, как обратная от данного расстояния величина ($|\mathbf{A}|\sim 1/r$);
2) фаза поля должна быть такой же, как у уходящей на бесконечность волны ($\varphi\sim\exp(-ikr)$).

Для устранения неопределенности при изломах применяют ***условие на ребре***: $\int_{V'}\left(\vec{E}\vec{D}+\vec{H}\vec{B}\right)dV\to 0$ при $dV\to 0$.

Из условия следует, что в окрестности ребра ни одна из составляющих ЭМП не может возрастать быстрее $\rho^{-1+\alpha}$;

где ρ - расстояние от ребра; $0<\alpha<1$

2 Основные теоремы электродинамики

Используются для упрощения физической трактовки ряда явлений и при решении ряда задач.

1. Теорема единственности:

Электромагнитное поле в любой момент времени в любой точке объема определяется уравнениями Максвелла при заданных источниках однозначно, если

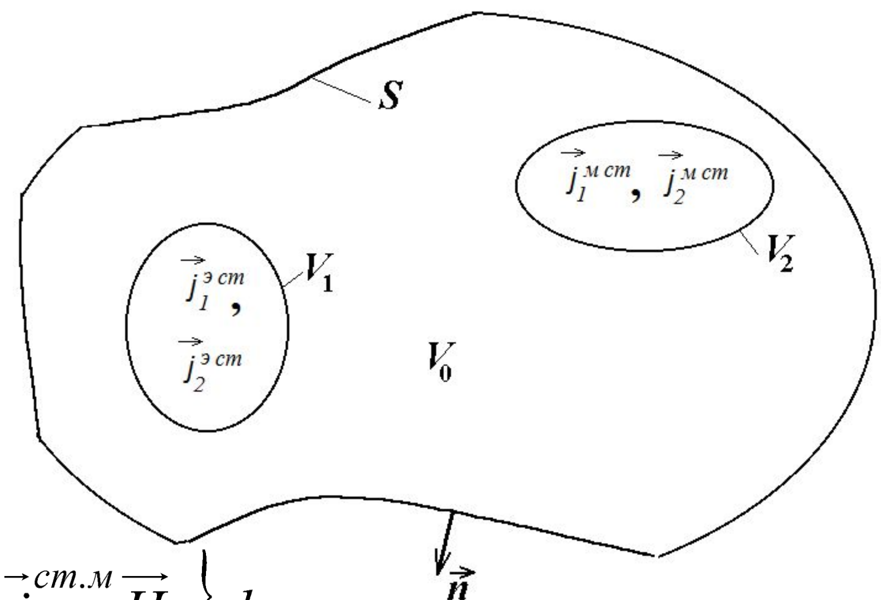
- в каждой точке объема даны начальные значения векторов напряженности электрического и магнитного полей;
- известны граничные значения касательных проекций одного из векторов в точках поверхности S для любого момента времени.

2. *Лемма Лоренца*: взаимодействие между полями в областях

- в дифференциальной форме

$$\operatorname{div}[\vec{E}_1, \vec{H}_2] - \operatorname{div}[\vec{E}_2, \vec{H}_1] = \vec{j}_1^{\,э\,ст}\,\vec{E}_2 - \vec{j}_1^{\,м\,ст}\,\vec{H}_2 -$$

$$- \vec{j}_2^{\,эст}\,\vec{E}_1 + \vec{j}_2^{\,мст}\,\vec{H}_1$$



- в интегральной форме

$$\oint_S \left\{ \left[\vec{E}_1, \vec{H}_2\right] - \left[\vec{E}_2, \vec{H}_1\right] \right\} d\vec{s} =$$

$$= \int_{V_1} \left\{ \vec{j}_1^{\,ст.э}\,\vec{E}_2 - \vec{j}_1^{\,ст.м}\,\vec{H}_2 \right\} dv - \int_{V_2} \left\{ \vec{j}_2^{\,ст.э}\,\vec{E}_1 - \vec{j}_2^{\,ст.м}\,\vec{H}_1 \right\} dv$$

Следствия леммы Лоренца:

– принцип взаимности:

$$\int\limits_{V_1}\left\{\vec{j}_1^{\,\text{ст.э}}\,\vec{E}_2-\vec{j}_1^{\,\text{ст.м}}\,\vec{H}_2\right\}dv=\int\limits_{V_2}\left\{\vec{j}_2^{\,\text{ст.э}}\,\vec{E}_1-\vec{j}_2^{\,\text{ст.м}}\,\vec{H}_1\right\}dv$$

Ограничение применимости – изотропные среды.

- ***теорема эквивалентных токов***. Позволяет находить поле в любой точке пространства при известном решении задачи дифракции по полю вспомогательного диполя и известном распределении полей на поверхности *S*:

для электрического источника

$$\vec{a}\vec{E}(\vec{r})=\int\limits_V\left(\vec{j}^{\,э}\vec{E}^{\,э}_{в}-\vec{j}^{\,м}\vec{H}^{\,э}_{в}\right)dv+\int\limits_S\left\{[\vec{n},\vec{H}]\,\vec{E}^{\,э}_{в}+[\vec{n},\vec{E}]\,\vec{H}^{\,э}_{в}\right\}ds$$

для магнитного источника

$$\vec{b}\vec{H}(\vec{r})=\int\limits_V\left(\vec{j}^{\,э}\vec{E}^{\,м}_{в}-\vec{j}^{\,м}\vec{H}^{\,м}_{в}\right)dv+\int\limits_S\left\{[\vec{n},\vec{H}]\,\vec{E}^{\,м}_{в}+[\vec{n},\vec{E}]\,\vec{H}^{\,м}_{в}\right\}ds$$

Эквивалентные токи:

$$\vec{J}^{\,э}=[\vec{n},\vec{H}]\qquad\qquad \vec{J}^{\,м}=-[\vec{n},\vec{E}]$$

3 Энергия электромагнитного поля. Теорема Умова-Пойнтинга

Сторонний источник – источник, который возбуждает ЭМП, но сам от него не зависит.

ЭМП является носителем энергии. В выделенном объеме энергия может изменяться во времени за счет двух процессов:

- превращения электромагнитной *энергии в другие формы энергии* (тепловая энергия, химическая энергия, кинетическая энергия ускоренных частиц и т.д.) и наоборот;
- *вытекания и втекания электромагнитной энергии* из данного объема через поверхность S, ограничивающую данный объем.

$$P + \frac{dw}{dt} + \wp = p_{\text{ст}}$$

где $p_{\text{ст}}$ - мощность поля, создаваемого сторонними источниками;

dw/dt - мощность, идущая на изменение энергии ЭМП;

$\wp$ - мощность поля, выходящая через поверхность S.

Теорема Умова-Пойнтинга – уравнение баланса энергии.

- в дифференциальной форме:

$$\underbrace{\sigma\vec{E}^2}_{\text{нагрев вещества}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\varepsilon\frac{\vec{E}^2}{2} + \mu_0\mu\frac{\vec{H}^2}{2}\right)}_{\text{колебательные процессы}} + \underbrace{\operatorname{div}[\vec{E},\vec{H}]}_{\text{проход энергии (излучение)}} = \underbrace{-\vec{E}\vec{j}^{\,\text{ст}}}_{\text{энергия стороннего источника}}$$

- в интегральной форме:

$$\int\limits_V \sigma\vec{E}^2 dv + \int\limits_V \left(\vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)dv + \oint\limits_S [\vec{E},\vec{H}]\,d\vec{s} = -\int\limits_V \vec{j}^{\,\text{э.ст.}}\vec{E}dv$$

Определения:

- ***отдаваемая мощность:*** $P = \int\limits_V \vec{j}\vec{E}dv$

- ***мощность излучения:*** $\wp = \oint\limits_S [\vec{E},\vec{H}]\,d\vec{s}$

- ***вектор Пойнтинга:*** $\vec{\Pi} = [\vec{E},\vec{H}]$

Физическая трактовка уравнения баланса энергии.

Первое слагаемое – работа, совершаемая ЭМП (в том числе и на нагрев вещества).

Второе слагаемое - колебательные процессы - связано с процессом перехода энергии электрического поля

$$W^{э} = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_V \varepsilon \vec{E}^2\, dv = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\vec{E}\, dv$$

в магнитное

$$W^{м} = \frac{\mu_0}{2}\int_V \mu \vec{H}^2\, dv = \frac{1}{2}\int_V \vec{B}\vec{H}\, dv$$

и наоборот.

Третье слагаемое описывает поток энергии или мощность излучения через замкнутую поверхность *S*.

Баланс считается ***активным***, если преобладает отдача энергии во внешнее пространство $\wp > 0$.

Баланс считается ***пассивным***, если преобладает поглощение энергии из внешнего пространства $\wp < 0$.

Баланс нейтрален, если $\wp = 0$.