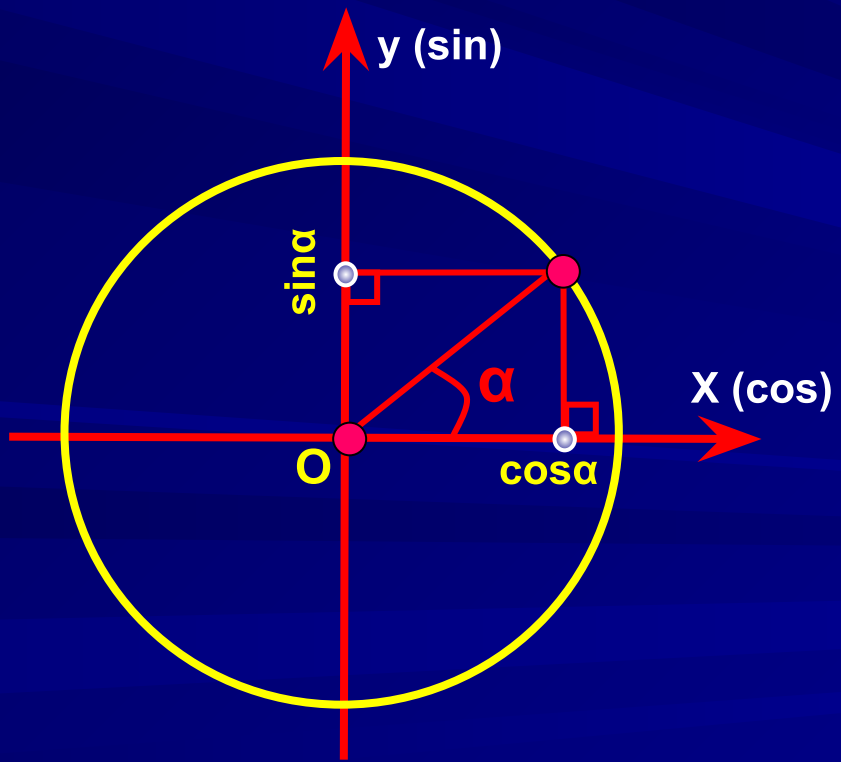
Тригонометрические формулы

Синусом угла **α** называется ордината точки, полученной поворотом точки **(1; 0)** вокруг начала координат на угол **α**.

Косинусом угла **α** называется абсцисса точки, полученной поворотом точки **(1; 0)** вокруг начала координат на угол **α**.



E(sin) = [-1; 1],

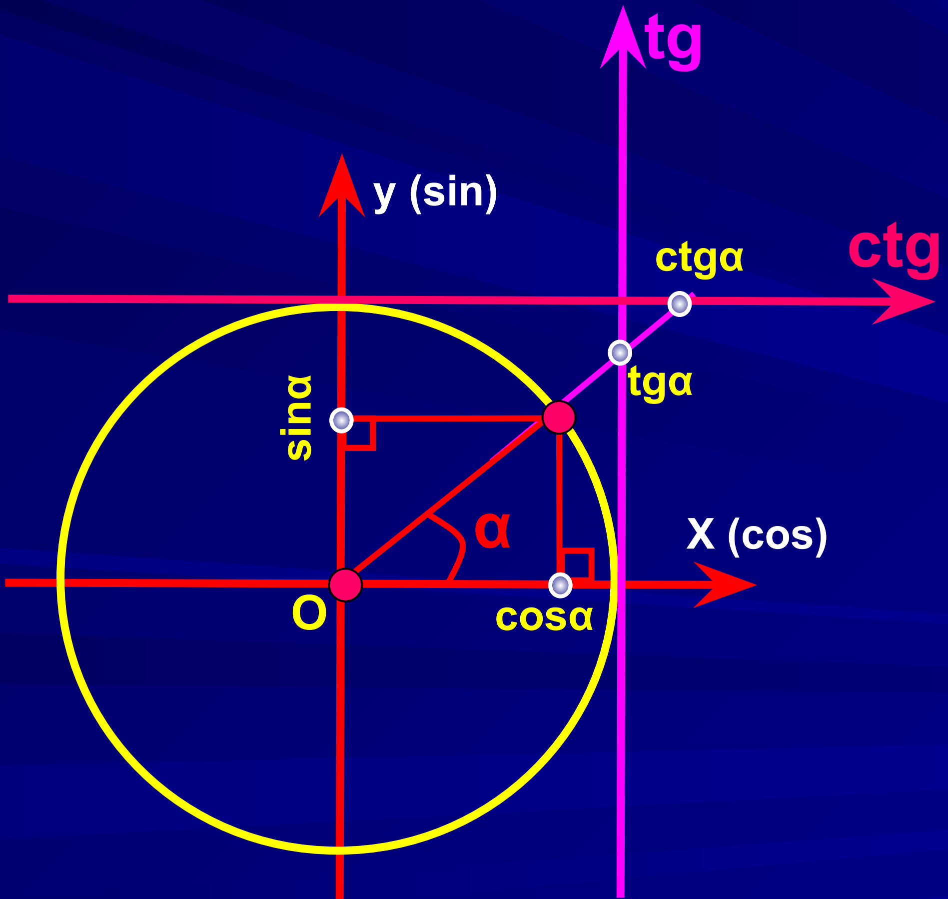
D(sin) = R,

E(cos) = [-1; 1],

D(cos) = R.

Тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к его косинусу: $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Котангенсом угла α называется отношение Косинуса угла α к его синусу: $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$



$E(tg) = (-\infty; +\infty)$,

$D(tg)$: $\cos\alpha \neq 0$,

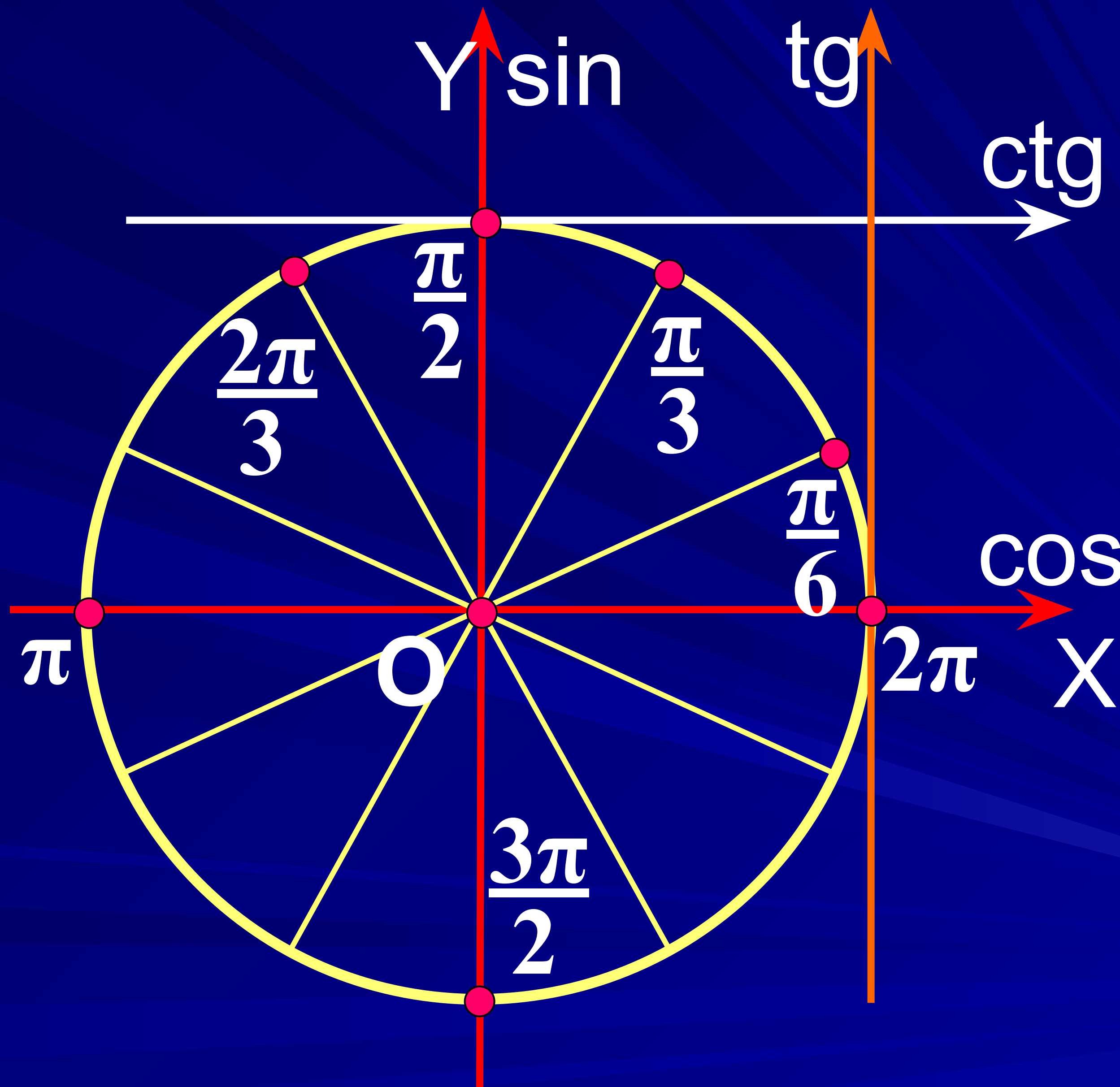
$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$,

$E(ctg) = (-\infty; +\infty)$,

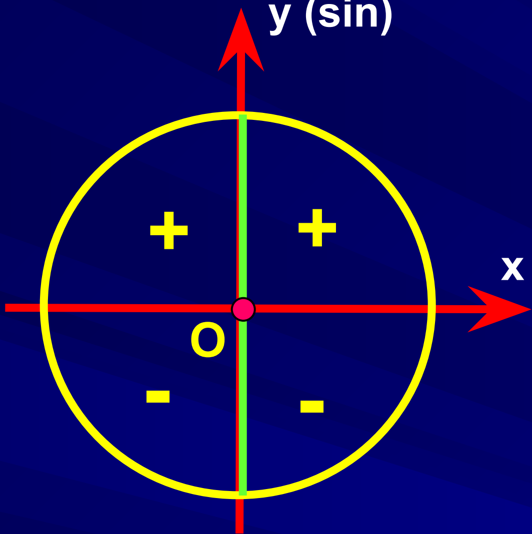
$D(ctg)$: $\sin\alpha \neq 0$,

$\alpha \neq \pi k,\ k \in Z$.

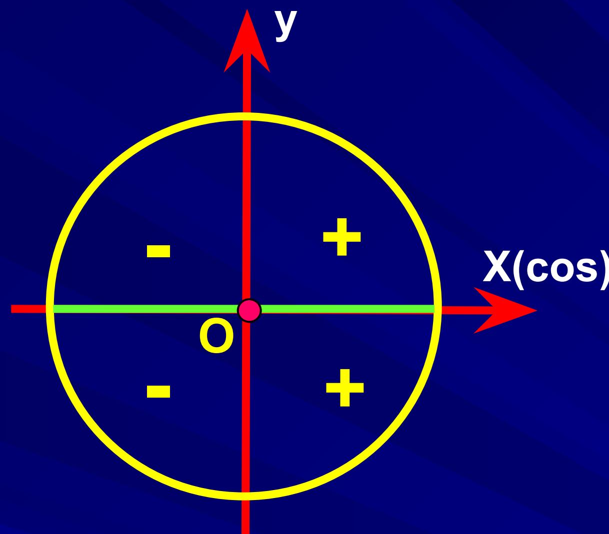
Тригонометрический круг



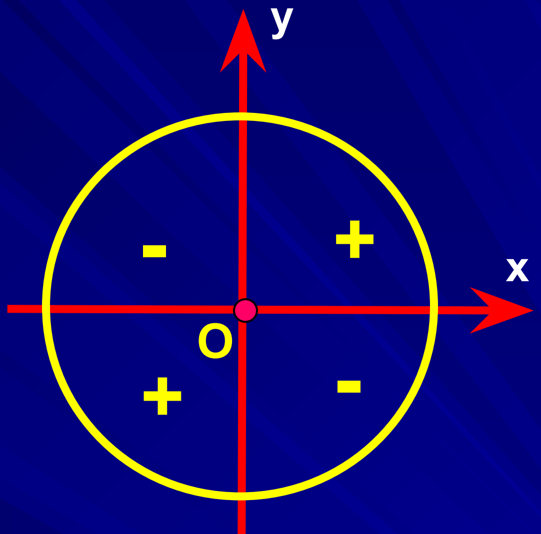
Знаки тригонометрических функций



Знаки синуса



Знаки косинуса



Знаки тангенса и котангенса

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Свойство четности (нечетности)

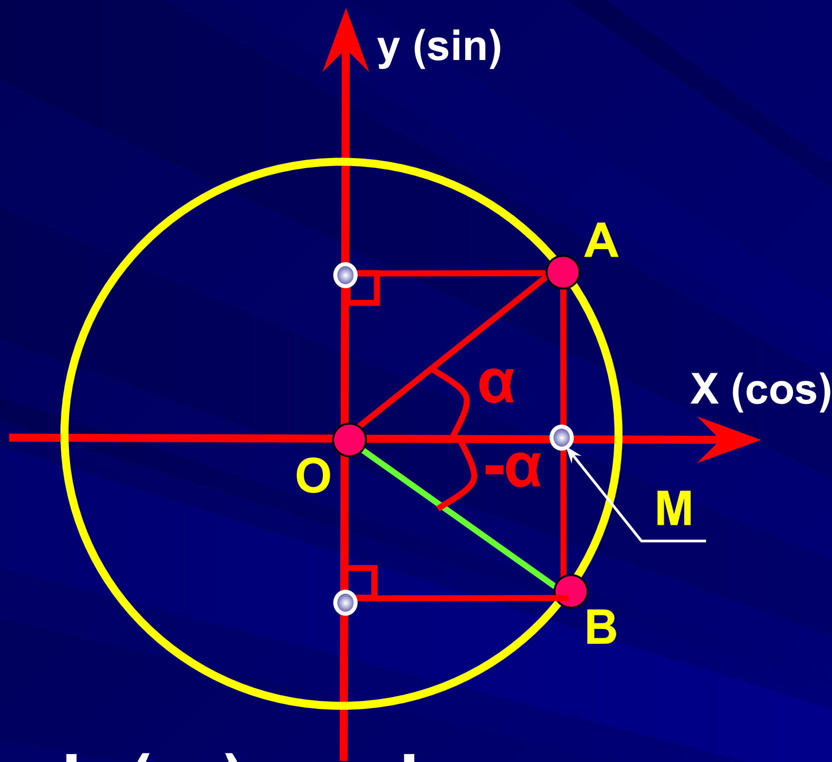


График нечетной функции симметричен относительно начала координат

График четной функции симметричен относительно оси ординат

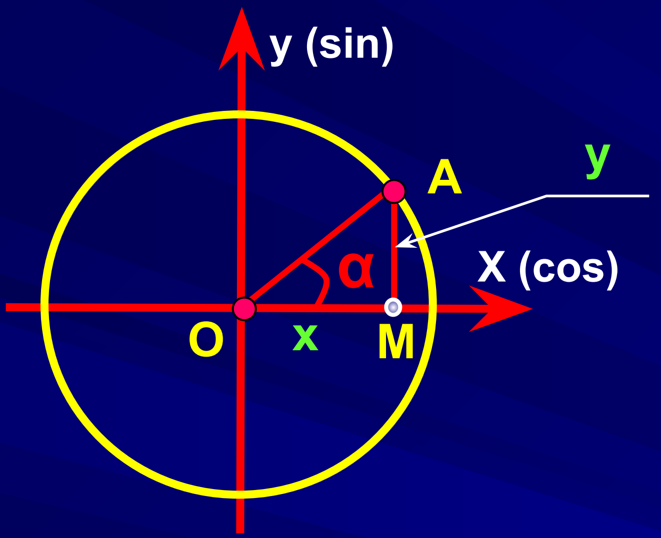
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, нечетная,

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, четная,

$$\mathrm{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\,\mathrm{tg}\alpha,$$ нечетная,

$$\mathrm{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\,\mathrm{ctg}\alpha,$$ нечетная.

1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента



$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha,$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha,$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha},$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha};$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1,$$

$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}, \qquad ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha};$$

1. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \mid : \cos^2\alpha \neq 0$

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha};$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \mid : \sin^2\alpha \neq 0$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha};$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \ \cos ec\alpha = \frac{1}{\sin\alpha};$$

Формулы приведения

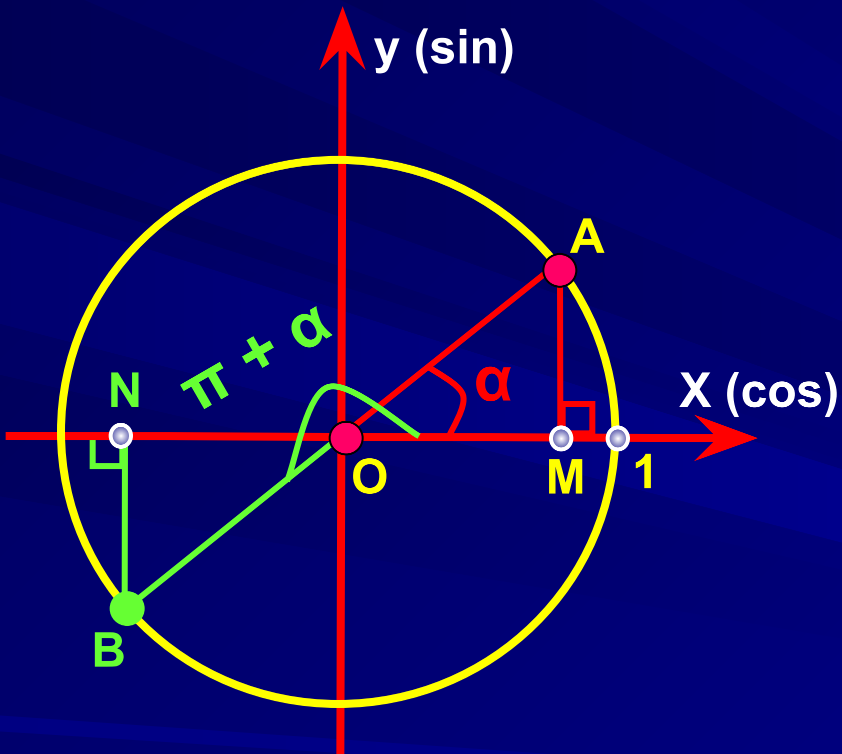
Тригонометрические функции углов вида $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$, где α - острый угол,

могут быть выражены через функции угла α с помощью формул, которые называются **формулами приведения**.

1. Для углов $\pi \pm \alpha$ и $2\pi \pm \alpha$ название исходной функции сохраняется, для углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ название исходной функции меняется: синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс.

2. Знак функции определяется, используя тригонометрическую окружность.

Формулы приведения



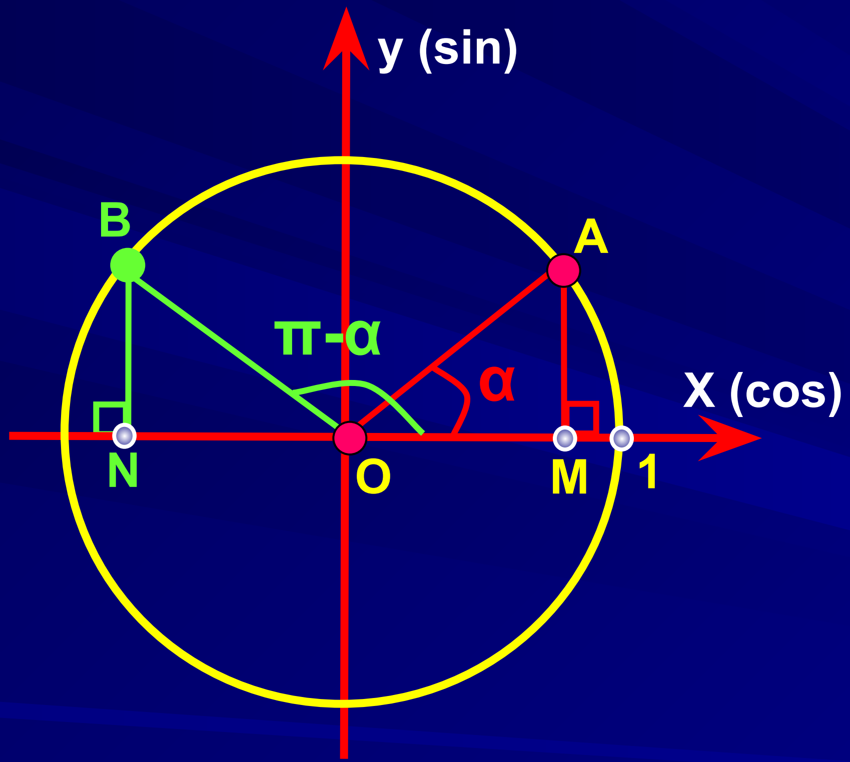
$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha,$

$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha,$

$\mathrm{tg}(\pi+\alpha) = \mathrm{tg}\alpha,$

$\mathrm{ctg}(\pi+\alpha) = \mathrm{ctg}\alpha;$

Формулы приведения



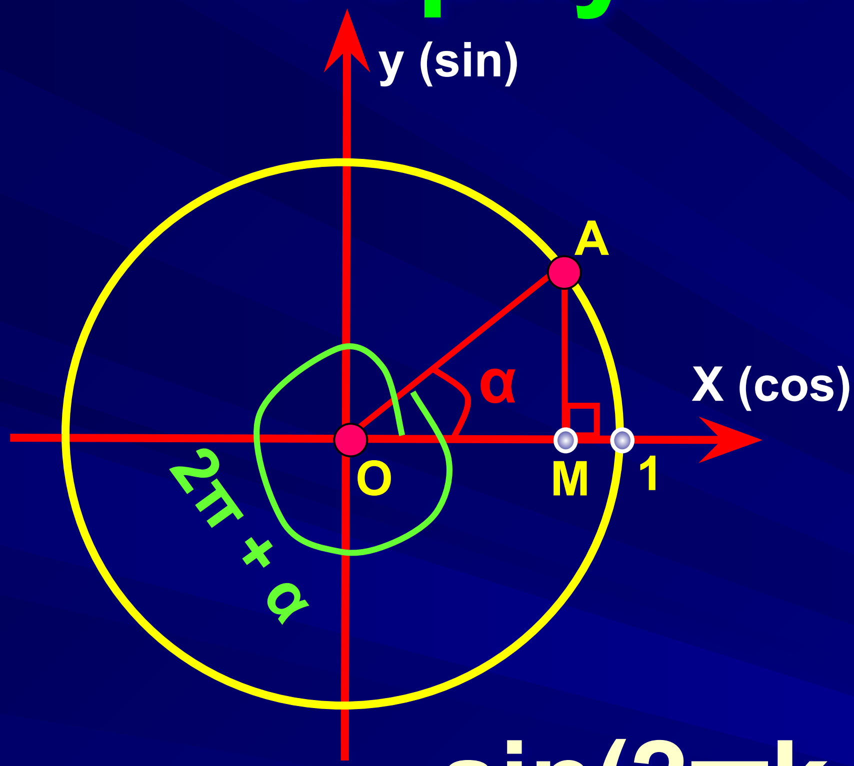
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha,$$

$$\mathrm{ctg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha;$$

Формулы приведения



$\sin(2\pi+\alpha) = \sin\alpha,$

$\cos(2\pi+\alpha) = \cos\alpha,$

$tg(2\pi+\alpha) = tg\alpha,$

$ctg(2\pi+\alpha) = ctg\alpha;$

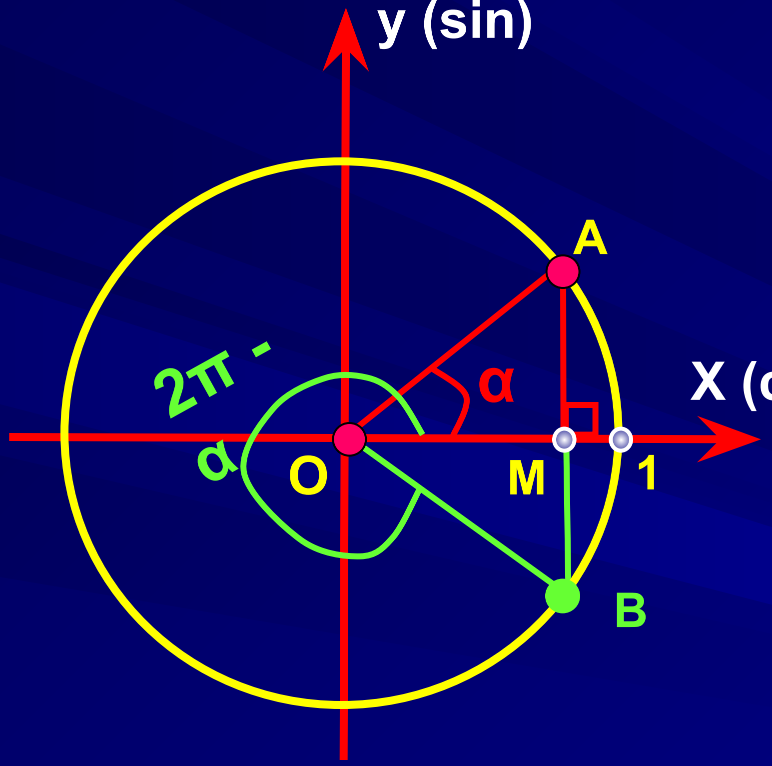
$\sin(2\pi k+\alpha) = \sin\alpha, k\in Z,$

$\cos(2\pi k+\alpha) = \cos\alpha, k\in Z,$

$tg(2\pi k+\alpha) = tg\alpha, k\in Z,$

$ctg(2\pi k+\alpha) = ctg\alpha,$

Формулы приведения



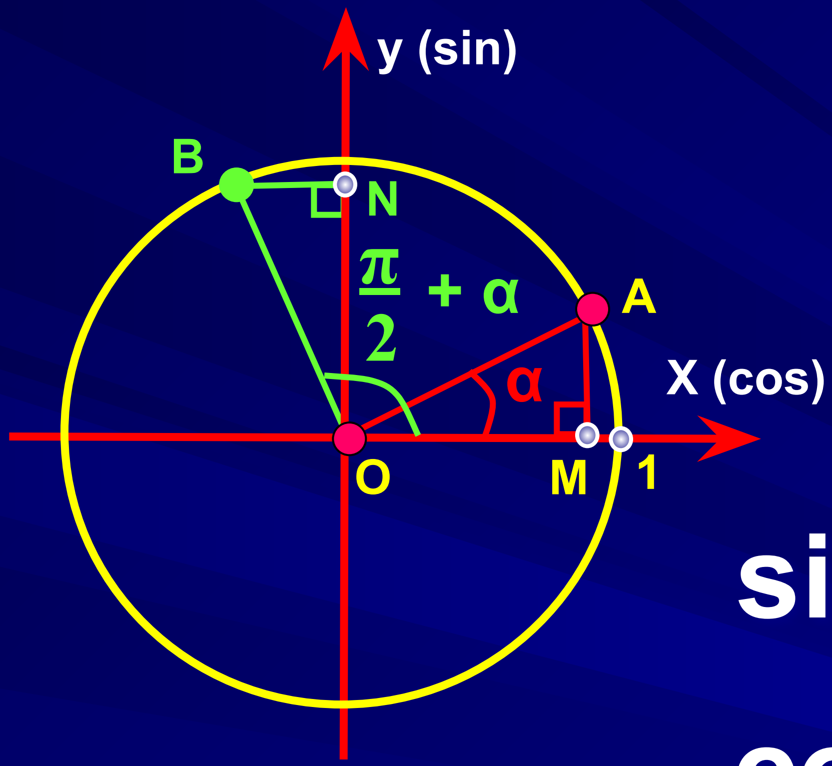
$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha,$

$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha,$

$tg(2\pi - \alpha) = -tg\alpha,$

$ctg(2\pi - \alpha) = -ctg\alpha;$

Формулы приведения



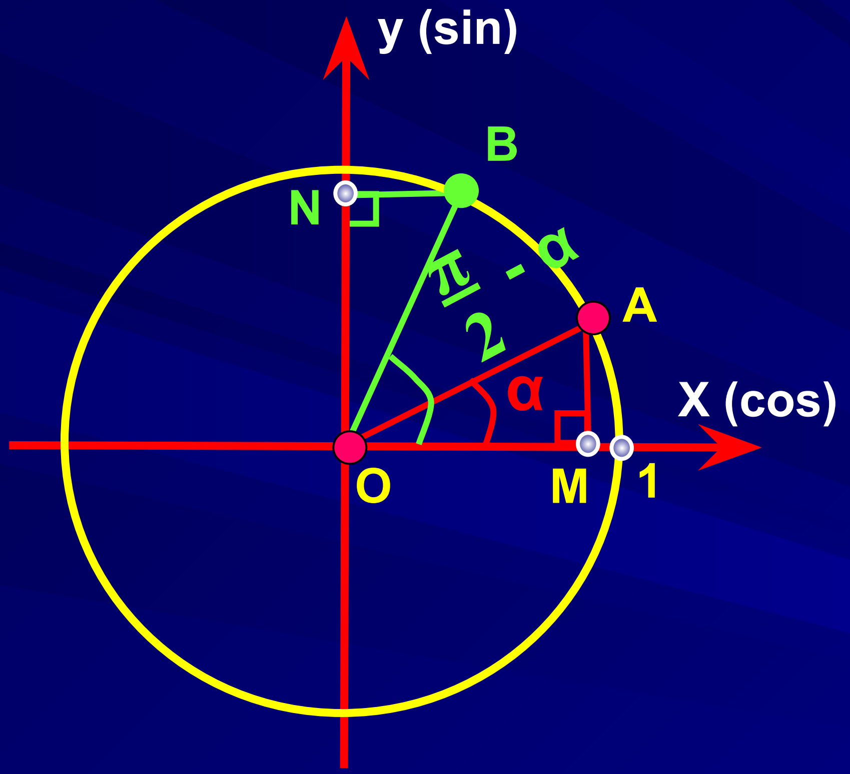
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathrm{ctg}\alpha,$$

$$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathrm{tg}\alpha;$$

Формулы приведения



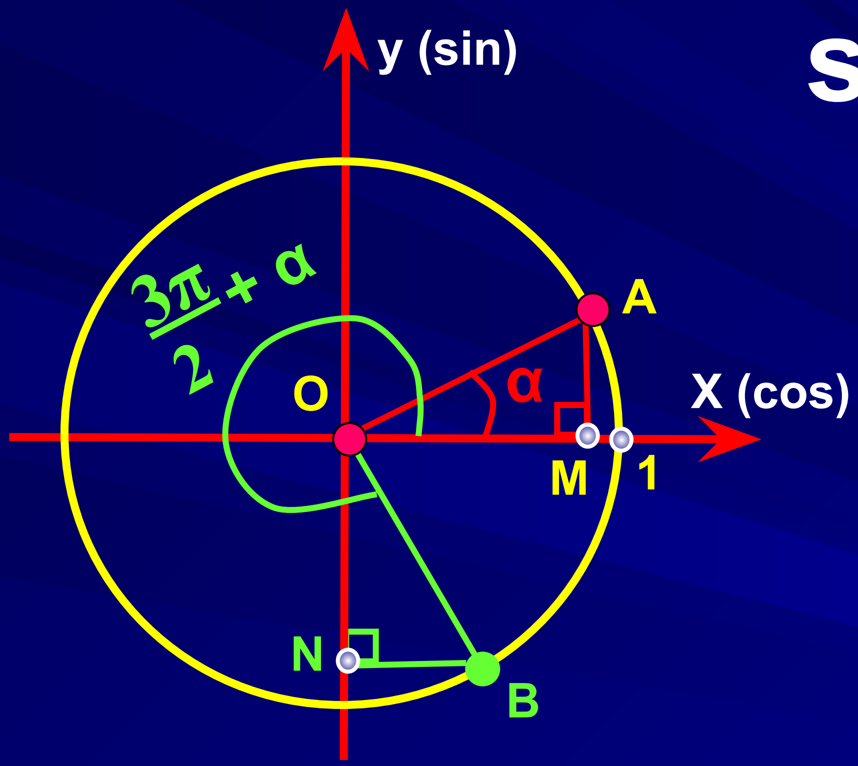
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{ctg}\,\alpha,$$

$$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{tg}\,\alpha;$$

Формулы приведения



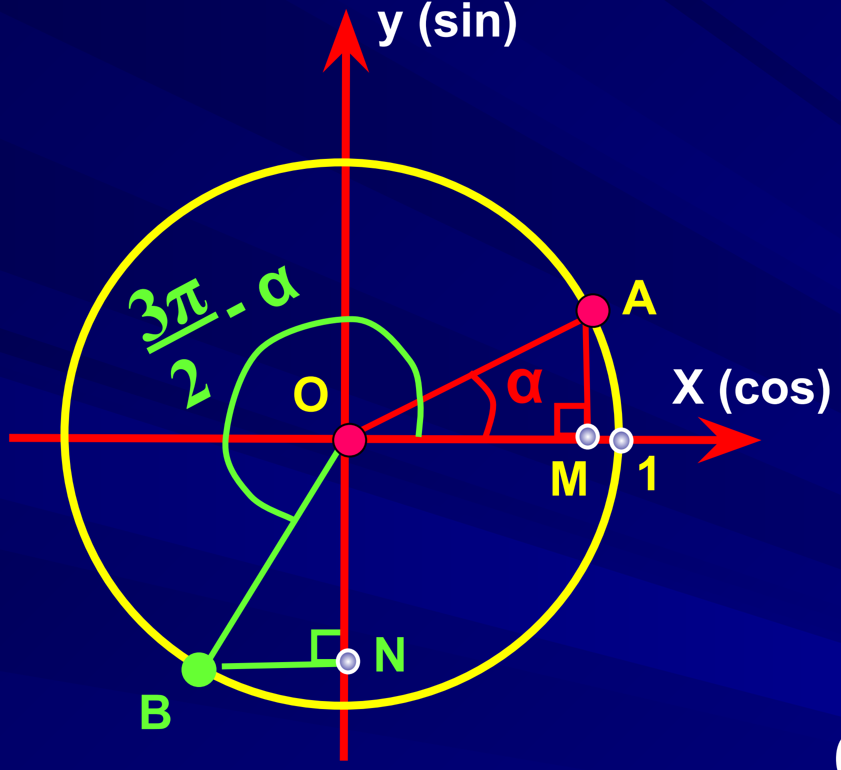
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathrm{ctg}\,\alpha,$$

$$\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathrm{tg}\,\alpha;$$

Формулы приведения



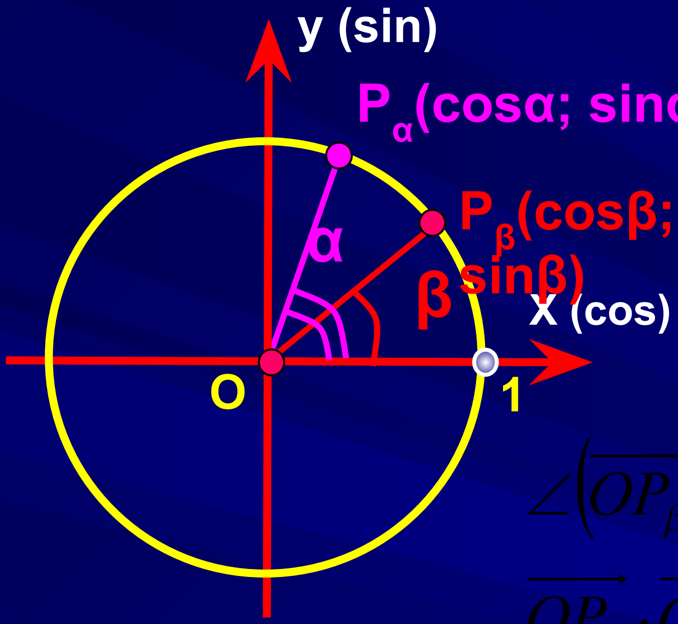
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha;$$

2. Формулы сложения и вычитания аргументов тригонометрических функций



$$\angle\left(\overrightarrow{OP_\beta}; \overrightarrow{OP_\alpha}\right) = (\alpha - \beta),$$

$$\overrightarrow{OP_\alpha} \cdot \overrightarrow{OP_\beta} = \left|\overrightarrow{OP_\alpha}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OP_\beta}\right| \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha - \beta),$$

$$\overrightarrow{OP_\alpha} \cdot \overrightarrow{OP_\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

cos(α-β) = cosα • cosβ + sinα • sinβ

cos(α+β) = cosα • cosβ - sinα • sinβ

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

sin(α+β) = sinα • cosβ + cosα • sinβ

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=$$

$$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

sin(α-β) = sinα • cosβ - cosα • sinβ

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$

$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\mathrm{tg}(\alpha+(-\beta))=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)\,\frac{\mathrm{ctg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\beta-1}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}$$

$$ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$$

3. Формулы двойных и тройных углов

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha =$
$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$
$= 2(1 - \sin^2\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha =$
$= \sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) + \cos\alpha\, 2\sin\alpha\cos\alpha =$
$= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\cos^2\alpha\sin\alpha = \sin\alpha - 2\sin^3\alpha +$
$+ 2(1 - \sin^2\alpha)\sin\alpha = \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha =$
$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha =$
$= \cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) - \sin\alpha\, 2\sin\alpha\cos\alpha =$
$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha -$
$- 2(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha =$
$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

$$\mathrm{tg}3\alpha = \frac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\mathrm{tg}^2\alpha} \qquad \mathrm{ctg}3\alpha = \frac{3\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}^3\alpha}{1 - 3\mathrm{ctg}^2\alpha}$$

$$\mathrm{tg}3\alpha = \mathrm{tg}(\alpha + 2\alpha) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}2\alpha}{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}2\alpha} =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\alpha + \dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}}{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha + 2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha - 2\mathrm{tg}^2\alpha} =$$

$$= \frac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\mathrm{tg}^2\alpha}$$

4. Преобразование в произведение сумм sinα ± sinβ, cosα ± cosβ

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Используем следующий искусственный прием:

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}, \quad \beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha + \sin\beta =$$

$$= \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} +$$

$$+ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

5. Формулы половинного аргумента

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}, \quad \Rightarrow \quad 2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha.$$

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}, \quad \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\pm\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\pm\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha};$$

6. Формулы универсальной подстановки

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \qquad = \left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

7. Преобразование произведений в суммы или разности

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right) = \frac{1}{2}\left(-2\sin\alpha\sin(-\beta)\right) = \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right)$$

8. Преобразование выражений *acosα + bsinα* путем введения вспомогательного угла

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(\alpha - \varphi),$$

$$a^2 + b^2 \neq 0,$$

φ – *вспомогательный аргумент, определяется из условия*

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2},$$

выполняется основное тригонометрическое тождество,

обозначим :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi, \qquad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi,$$

φ *– вспомогательный угол.*

$$a\cos\alpha+b\sin\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\cos\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\sin\alpha\right)=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\varphi\cos\alpha+\sin\varphi\sin\alpha\right)=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\varphi-\alpha)$$

Утверждение доказано