

# ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

## ЛЕКЦИЯ 14

### 4. СВЯЗЬ МЕЖДУ ВЫПУКЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ И ВЫПУКЛЫМИ МНОЖЕСТВАМИ



# 4. СВЯЗЬ МЕЖДУ ВЫПУКЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ И ВЫПУКЛЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

4.1. Надграфик выпуклой функции.



4.2. Множество Лебега выпуклой функции.



4.3. Опорная функция подмножества пространства  $R^n$ .

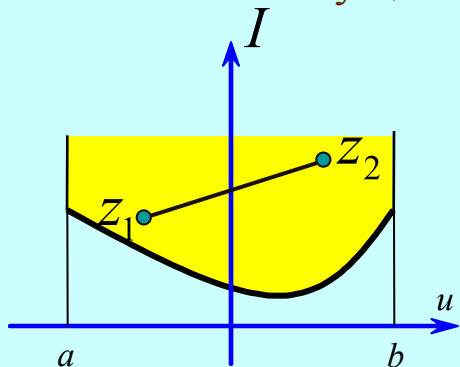


4.4. Опорные функции выпуклых оболочек подмножеств  
пространства  $R^n$ .



## 4.1. Надграфик выпуклой функции. Между выпуклыми функциями и выпуклыми

множествами существует определенная связь.



**Определение 1.** *Надграфиком (эпиграфом) функции  $I$ , определенной на множестве  $U \subset R^n$ , называется множество*

$$\text{epi } I = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ \gamma \end{pmatrix} \in R^{n+1} \mid u \in U, \gamma \geq I(u) \right\}.$$

На рисунке закрашенное множество является надграфиком функции  $I : [a, b] \rightarrow R^1$ .

**Теорема 1.** *Для того чтобы функция  $I$ , определенная на выпуклом множестве  $U \subset R^n$ , была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы ее надграфик был выпуклым множеством.*

**Доказательство. Необходимость.** Пусть функция  $I$  — выпуклая. Для любых двух

точек  $z_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, z_1, z_2 \in \text{epi } I$  составим их выпуклую комбинацию

$$z_\alpha = \alpha z_1 + (1 - \alpha) z_2 = \begin{pmatrix} \alpha u_1 + (1 - \alpha) u_2 \\ \alpha \gamma_1 + (1 - \alpha) \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ \gamma_\alpha \end{pmatrix}, \alpha \in [0, 1].$$

Из выпуклости множества  $U$  следует, что  $u_\alpha = \alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 \in U$ ,

а из выпуклости функции  $I$  вытекает неравенство

$$I(u_\alpha) = I(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) \leq \alpha I(u_1) + (1-\alpha)I(u_2) \leq \alpha \overset{\leq \gamma_1}{I(u_1)} + (1-\alpha) \overset{\leq \gamma_2}{I(u_2)} \leq \alpha \gamma_1 + (1-\alpha)\gamma_2 = \gamma_\alpha$$

которое влечет за собой включение  $z_\alpha = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ \gamma_\alpha \end{pmatrix} \in \text{epi } I = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid u \in U, \gamma \geq I(u) \right\}$

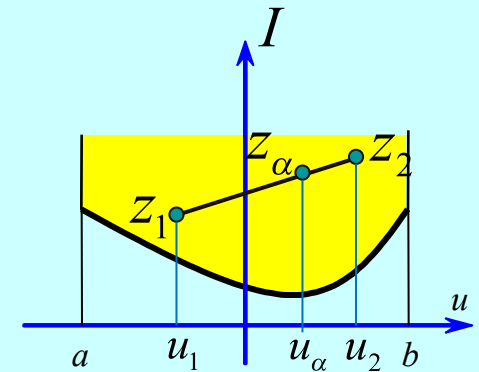
Необходимость доказана.

**Достаточность.** Пусть множество  $\text{epi } I$  выпукло в  $\mathbb{R}^{n+1}$  и  $u_1, u_2 \in U, \alpha \in [0, 1]$ .

Тогда

$$z_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ I(u_1) \end{pmatrix} \in \text{epi } I, \quad z_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ I(u_2) \end{pmatrix} \in \text{epi } I \Rightarrow$$

$$\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2 = \begin{pmatrix} \alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 \\ \alpha I(u_1) + (1-\alpha)I(u_2) \end{pmatrix} \in \text{epi } I,$$



Отсюда в силу определения множества  $\text{epi } I$  следует

$$I(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) \leq \alpha I(u_1) + (1-\alpha)I(u_2)$$

что и означает выпуклость функции  $I$ . Теорема доказана.

**Упражнение.** Построить множество точек на плоскости, координаты  $(x, y)$

которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y - x^2 + 4x - 3 \geq 0, \\ -x + y^2 - y - 2 \leq 0, \end{cases}$$

и доказать, что это множество выпуклое.

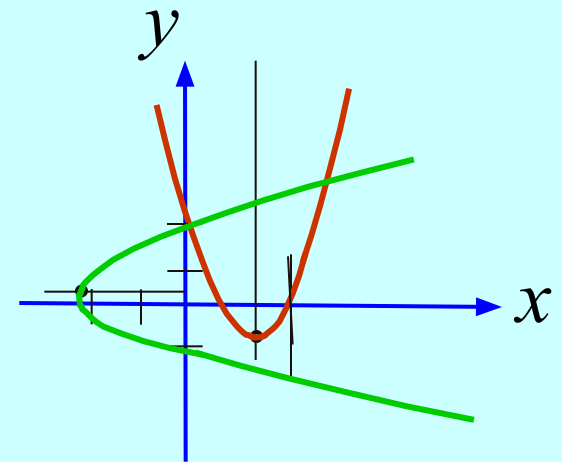
**Решение.**

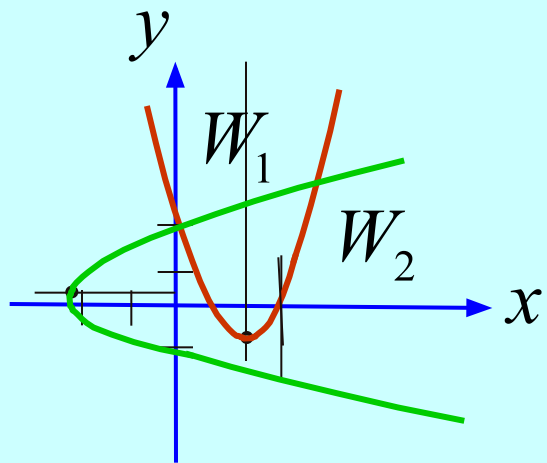
$$\begin{cases} y - x^2 + 4x - 3 \geq 0, \\ -x + y^2 - y - 2 \leq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq x^2 - 4x + 3, \\ x \geq y^2 - y - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x - 4 = 0, \\ \frac{dx}{dy} = 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_* = 2, \\ y_* = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(x_*) = 4 - 8 + 3 = -1, \\ x(y_*) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4} \end{cases}$$

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3,$$

$$y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow y_1 = -1, y_2 = 2$$





Искомое множество строится как пересечение двух множеств

$$W_1 = \{(x, y) \mid y \geq -x^2 + 4x - 3\},$$

$$W_2 = \{(x, y) \mid x \geq y^2 - y - 2\}.$$

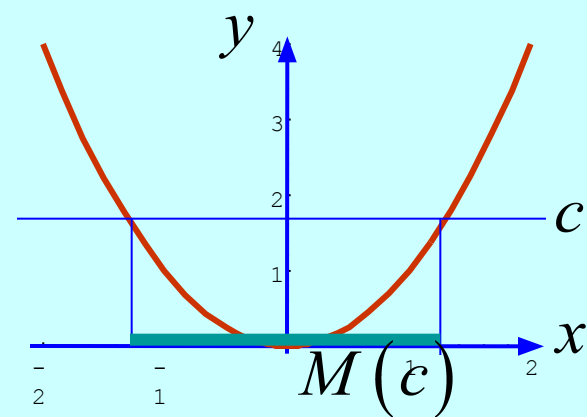
Эти множество будем трактовать как надграфики соответствующих парабол (ветвями вверх). Очевидно, что они выпуклы. Тогда выпукло и их пересечение



## 4.2. Множество Лебега выпуклой функции.

**Определение 2.** Пусть задана функция  $I : U \rightarrow R^1$ , где  $U \subset R^n$ , и число  $c \in R^1$ . Множество  $M(c) = \{ u \in U \mid I(u) \leq c \}$  будем называть множеством Лебега функции  $I$ .

**Теорема 2.** Пусть функция  $I : U \rightarrow R^1$ , где  $U \subset R^n$  выпуклое множество, выпукла. Тогда ее множество Лебега выпукло при всех  $c \in R^1$ .



**Доказательство.** Для любых  $u_1, u_2 \in M(c)$  и  $\alpha \in [0, 1]$  из выпуклости функции  $I$  и определения множества Лебега выводим

$$I(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2) \leq \alpha I(u_1) + (1-\alpha)I(u_2) \leq \alpha c + (1-\alpha)c = c.$$

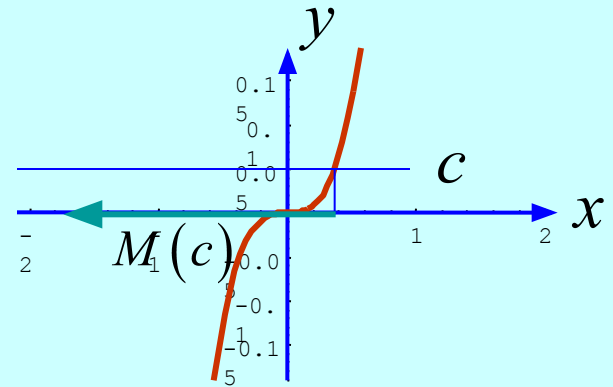
Таким образом,  $\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 \in M(c)$ . Теорема доказана.

Заметим, что обратное утверждение неверно: из выпуклости множеств Лебега при всех  $c \in \mathbb{R}^1$  вообще говоря, не следует выпуклость функции  $I$ . Например, функция  $I(u) = u^3$ ,  $u \in \mathbb{R}^1$  не является выпуклой, а множества Лебега для нее

$$M(c) = \left(-\infty, \sqrt[3]{c}\right] \text{ выпуклы при всех } c \in \mathbb{R}^1.$$

Заметим, что эти множества неограниченны.

Выведем условия, когда множества Лебега ограничены при всех  $c \in \mathbb{R}^1$ . Для этого уточним некоторые свойства неограниченных множеств.



**Определение 3.** Пусть  $M \subset \mathbb{R}^n$  неограниченное множество. Направление  $e \in \mathbb{R}^n, e \neq 0$  будем называть рецессивным направлением этого множества, если  $u + te \in M$  при всех  $u \in M$  и  $t \geq 0$ .

**Упражнение 1.** Найти рецессивное направление для множества

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2, x \in (-\infty, +\infty) \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Показать, что это направление единственно.

**Решение.**

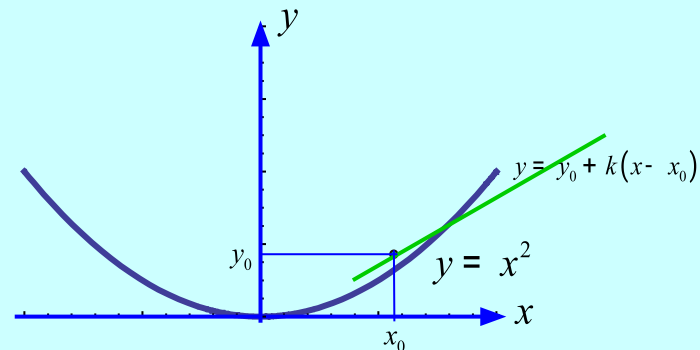
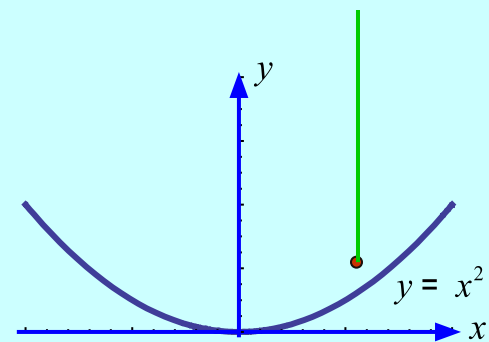
Рецессивным направлением является направление вдоль оси  $Oy$ . Покажем, что направление с угловым коэффициентом  $k \neq \pm\infty$  не может быть рецессивным. Пусть

$$(x_0, y_0) \in M \Rightarrow y_0 \geq x_0^2.$$

Достаточно установить, что квадратное уравнение

$$x^2 = y_0 + k(x - x_0)$$

имеет действительные корни. Действительно,





$$x^2 = y_0 + k(x - x_0) \quad \text{и} \quad x^2 - kx + kx_0 - y_0 = 0$$

Дискриминант этого уравнения

$$D = k^2 - 4(kx_0 - y_0) = k^2 - 4kx_0 + 4y_0 \stackrel{3}{=} k^2 - 4kx_0 + 4x_0^2 =$$

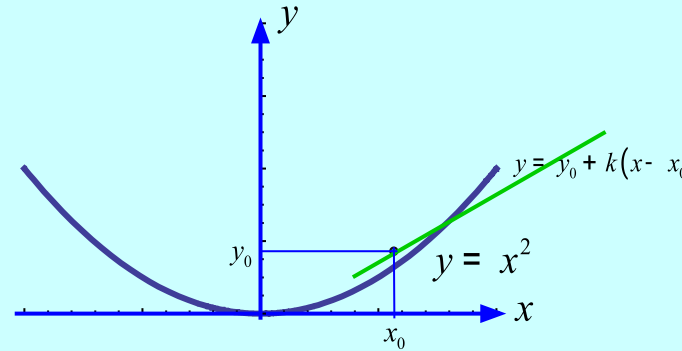
$$= (k - 2x_0)^2 \stackrel{3}{=} 0 \quad \text{и} \quad D \stackrel{3}{=} 0.$$

Установлено, что для любой точки  $(x_0, y_0) \in M$

направление с любым угловым коэффициентом  $k \neq \pm\infty$

пересекает границы множества  $M$ . В случае  $D = 0 \quad \text{и} \quad y_0 = x_0^2, k = 2x_0$ .

Секущая превращается в касательную и не является рецессивным направлением.

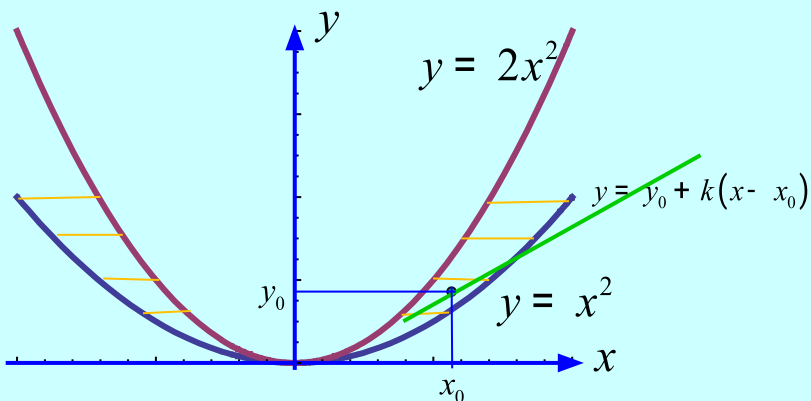


Покажем, что не всякое неограниченное множество имеет рецессивные направления.

Действительно, множество

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^2 \mid x^2 \leq y \leq 2x^2 \right\} \subset R^n.$$

является таковым.



**Лемма 1.** *Замкнутое неограниченное выпуклое множество имеет хотя бы одно рецессивное направление.*

**Доказательство.** Из неограниченности множества  $M$  следует существование последовательности  $\{u_k\}$ ,  $u_k \in M, k = 1, 2, \dots$  такой, что  $\|u_k\| \rightarrow \infty$ .

Пусть  $\bar{u} \in M$ . Полагаем

$$e_k = \frac{u_k - \bar{u}}{\|u_k - \bar{u}\|} \Rightarrow \|e_k\| = 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Не теряя общности, будем считать, что  $e_k \rightarrow e, \|e\| = 1$ . Для произвольного

$t \geq 0$  в силу  $\|u_k\| \rightarrow \infty$  для достаточно больших номеров  $k$  справедливо неравенство  $0 \leq \alpha = \frac{t}{\|u_k - \bar{u}\|} \leq 1$ . Тогда из выпуклости множества  $M$  для

достаточно больших номеров  $k$  имеем

$$\bar{u} + t \frac{u_k - \bar{u}}{\|u_k - \bar{u}\|} = \bar{u} + t \frac{u_k - \bar{u}}{\|u_k - \bar{u}\|} = \bar{u} + \frac{t}{\|u_k - \bar{u}\|} (u_k - \bar{u}) =$$

6447448

$a \in [0,1]$

$$(\bar{u} + te_k) = \bar{u} + \frac{t}{\|u_k - \bar{u}\|} (u_k - \bar{u}) =$$

$$= \bar{u} + a(u_k - \bar{u}) = au_k + (1-a)\bar{u} \in M \quad \bar{u} + te_k \in M.$$

В последнем соотношении перейдем к пределу при  $k \rightarrow \infty$ . В силу замкнутости множества  $M$  получим  $\bar{u} + te \in M, t \geq 0$ .

Покажем, что для направления  $e$  включение  $u + te \in M, t \geq 0$  выполняется

для всех точек  $u \in M$ . Действительно по доказанному,  $\bar{u} + me \in M, m \geq 0$ . Пусть

число  $\mu \geq 0$  столь велико, что имеет место  $\frac{t}{\mu} \in [0,1]$ . Из выпуклости множества  $M$

для произвольной точки  $u \in M$  следует включение

~~$$\frac{t}{m} (\bar{u} + me) + \frac{t}{m} u = \frac{t}{m} \bar{u} + te + u - \frac{t}{m} u =$$~~

$$\frac{t}{m} (\bar{u} + me) + \frac{t}{m} u = \frac{t}{m} \bar{u} + te + u - \frac{t}{m} u =$$

$$= \frac{t}{m} \bar{u} + te + u - \frac{t}{m} u = u + te + \frac{t}{m} (\bar{u} - u) \hat{=} M. \quad (1)$$

Устремляя  $\mu$  в бесконечность, с учетом замкнутости множества  $M$  в пределе из (1) получим  $u + te \hat{=} M$ . Лемма доказана.

**Теорема 3.** Пусть  $I: R^n \Rightarrow R^1$  выпуклая функция. Для ограниченности множеств  $M(c) \subset R^n$  при любых значениях  $c \in R^1$  достаточно существования хотя бы одного числа  $a \in R^1$ , при котором множество  $M(a) \neq \emptyset$  ограничено.

**Доказательство.** Пусть множество  $M(a) \neq \emptyset$  ограничено. Для  $c \leq a$  справедливо включение  $M(c) = \{u \in U \mid I(u) \leq c\} \subset \{u \in U \mid I(u) \leq a\} = M(a)$ .

Остается рассмотреть лишь случай  $c > a$ . Предположим, что при некотором значении  $c > a$  множество  $M(c)$  неограничено. Заметим, что в силу непрерывности выпуклой функции  $I$  это множество замкнуто, а по теореме 2 и выпукло.

Зафиксируем точку  $v \in M(a) \cap M(c)$  ( $c > a$ ,  $M(a) \cap M(c) \neq \emptyset$ ). В силу леммы 1

существует рецессивное направление  $e \in R^n$  для множества  $M(c)$ . Тогда имеет

место включение  $v + te \in M(c)$ ,  $t \geq 0$ . Из ограниченности множества

$M(a)$  вытекает существование числа  $t_0 = \sup\{t \mid v + te \in M(a)\} < +\infty$ .

Тогда

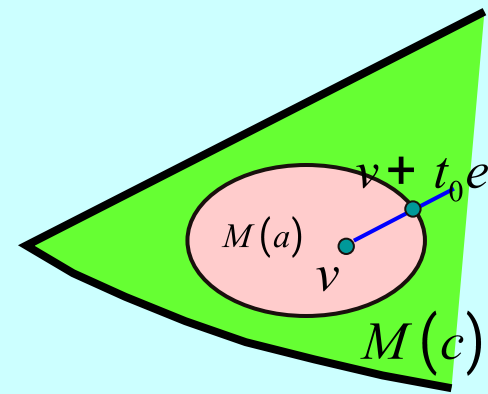
$$t > t_0 \Rightarrow \exists c \in M(c) \quad I(v + te) > a \in M(a) \quad I(v). \quad (2)$$

Заметим, что для всех  $\lambda \in (0, 1)$  имеет место

$$\lambda v + (1 - \lambda)v$$

$$v + te = \lambda v + (1 - \lambda)v + te =$$

$$= \lambda \left( v + \frac{t}{\lambda} e \right) + (1 - \lambda)v.$$



Из выпуклости функции  $I$  отсюда выводим

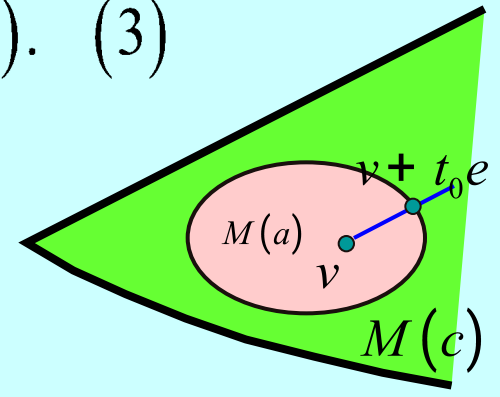
$$I(v + te) = I\left(\lambda \left(v + \frac{t}{\lambda} e\right) + (1 - \lambda)v\right) \leq \lambda I\left(v + \frac{t}{\lambda} e\right) + (1 - \lambda)I(v) \Rightarrow$$

$$I(v+te) \leq \lambda I\left(v + \frac{t}{\lambda}e\right) + (1-\lambda)I(v) \Rightarrow \lambda I\left(v + \frac{t}{\lambda}e\right) \geq I(v+te) - I(v) + \lambda I(v) \Rightarrow$$

$v+te \in M(c) \Rightarrow I(v+te) > a$        $v \in M(a) \Rightarrow I(v) \leq a$

$$I\left(v + \frac{t}{\lambda}e\right) \geq \frac{I(v+te) - I(v)}{\lambda} + I(v). \quad (3)$$

В (3) устремим  $\lambda \xrightarrow{\lambda \in (0,1)} +0$ . В силу неравенства (2)



$I(v+te) > I(v)$  (2) получим  
 $\lambda \rightarrow 0$

$$\frac{I(v+te) - I(v)}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} +\infty \stackrel{(3)}{\Rightarrow} I\left(v + \frac{t}{\lambda}e\right) \rightarrow +\infty.$$

Тогда найдется число  $\lambda_0 > 0$ , что  $I\left(v + \frac{t}{\lambda}e\right) > c$  при всех  $\lambda \in (0, \lambda_0)$ .

С другой стороны, по построению вектора  $e$  (регрессивное направление) имеем

$$v + \frac{t}{\lambda}e \notin M(c) \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

### 4.3. Опорная функция подмножества пространства $R^n$ . Пусть $U \subset R^n$

компактное множество.

**Определение 4.** Функция  $\chi_U : R^n \Rightarrow R^1$ , определенная формулой

$$\chi_U(v) = \max_{u \in U} \langle u, v \rangle, v \in R^n, \quad (1)$$

называется опорной функцией множества  $U$ .

Максимум в правой части (1) действительно достигается в силу компактности множества  $U$  и непрерывности скалярного произведения.

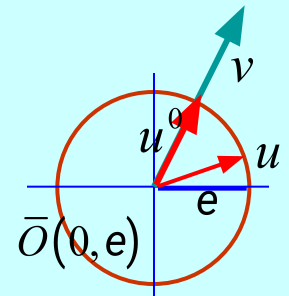
**Упражнение.** Вычислить опорную функцию шара  $\bar{O}(0, e) \subset R^n$ .

**Решение.** Максимум в (1) достигается на векторе  $u^0 = \frac{ev}{\|v\|}$ . Тогда

$$\chi_U(v) = \left\langle v, \frac{ev}{\|v\|} \right\rangle = \frac{e\|v\|^2}{\|v\|} = e\|v\|.$$

**Упражнение.** Вычислить опорную функцию квадрата

$$K(0,1) = \left\{ u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} \in R^2 \mid |u^1| \leq 1, |u^2| \leq 1 \right\}.$$



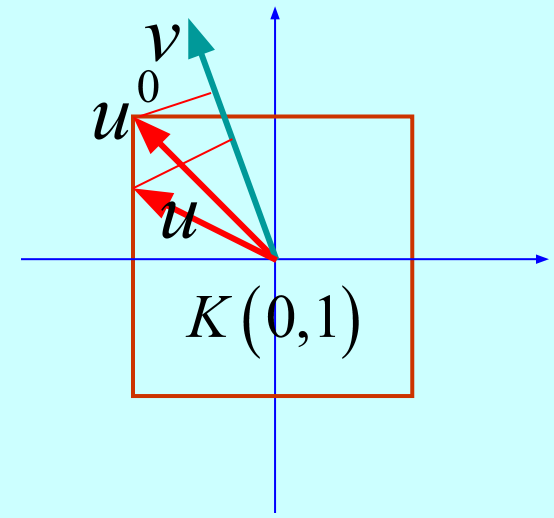
## Решение.

$$\chi_U(v) = \max_{u \in U} \langle u, v \rangle = \max_{|u^1| \leq 1, |u^2| \leq 1} (u^1 v^1 + u^2 v^2) =$$

$$= \max_{|u^1| \leq 1} (u^1 \cdot v^1) + \max_{|u^2| \leq 1} (u^2 \cdot v^2) =$$

$$= \left( \begin{cases} -1, & v^1 < 0, \\ \forall u^1 \in [0, 1], & v^1 = 0, \\ 1, & v^1 > 0 \end{cases} \right) \cdot v^1 + \left( \begin{cases} -1, & v^2 < 0, \\ \forall u^2 \in [0, 1], & v^2 = 0, \\ 1, & v^2 > 0 \end{cases} \right) \cdot v^2 =$$

$$= \left( \begin{cases} -v^1, & v^1 < 0, \\ 0, & v^1 = 0, \\ v^1, & v^1 > 0 \end{cases} \right) + \left( \begin{cases} -v^2, & v^2 < 0, \\ 0, & v^2 = 0, \\ v^2, & v^2 > 0 \end{cases} \right) = |v^1| + |v^2|.$$





**Свойство 1.** *Опорная функция является положительно однородной.*

**Доказательство.**

$$\chi_U \left( \overset{\geq 0}{\lambda \cdot v} \right) = \max_{u \in U} \left\langle u, \overset{\geq 0}{\lambda \cdot v} \right\rangle = \overset{\chi_U(v)}{\lambda \cdot \max_{u \in U} \langle u, v \rangle} = \lambda \cdot \chi_U(v), \quad v \in R^n, \lambda \geq 0.$$

**Свойство 2.** *Для любых  $v_1, v_2 \in R^n$  справедливо неравенство*

$$\chi_U(v_1 + v_2) \leq \chi_U(v_1) + \chi_U(v_2).$$

**Доказательство.**

$$\chi_U(v_1 + v_2) = \max_{u \in U} \langle u, v_1 + v_2 \rangle \leq \overset{\chi_U(v_1)}{\max_{u \in U} \langle u, v_1 \rangle} + \overset{\chi_U(v_2)}{\max_{u \in U} \langle u, v_2 \rangle} = \chi_U(v_1) + \chi_U(v_2).$$

**Свойство 3.** *Опорная функция является выпуклой функцией.*

**Доказательство.** По свойству 1 и 2 имеем

$$\begin{aligned} \chi_U(\alpha v_1 + (1-\alpha)v_2) &\overset{\text{свойство 2}}{\leq} \chi_U(\alpha v_1) + \chi_U((1-\alpha)v_2) \overset{\text{свойство 1}}{=} \\ &\overset{\text{свойство 1}}{=} \alpha \chi_U(v_1) + (1-\alpha) \chi_U(v_2), \quad v_1, v_2 \in R^n, \alpha \in [0, 1]. \end{aligned}$$

**Свойство 4.** Пусть  $U, W \subset R^n$ . Тогда

$$\chi_{U+W}(v) = \chi_U(v) + \chi_W(v).$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \chi_{U+W}(v) &= \max_{z \in U+W} \langle z, v \rangle = \max_{u \in U, w \in W} \langle u + w, v \rangle = \max_{u \in U, w \in W} [\langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle] = \\ &= \max_{u \in U} \langle u, v \rangle + \max_{w \in W} \langle w, v \rangle = \chi_U(v) + \chi_W(v). \end{aligned}$$

**Следствие.** Справедливо равенство

$$c_{\overline{U^e}}(v) = c_{\overline{U}}(v) + e\|v\|.$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \overline{U^e} &= \overline{U} + \overline{O}(0, e) \text{ и} \\ c_{\overline{U^e}}(v) &= c_{\overline{U}}(v) + c_{\overline{O}(0, e)}(v) = c_{\overline{U}}(v) + e\|v\|. \end{aligned}$$

**Пример 3.** Вычислить опорную функцию шара  $\bar{O}(u_0, R) \subset R^n$ .

**Решение.** В силу представления  $\bar{O}(u_0, R) = \{u_0\} + \bar{O}(0, R)$  и свойства 4 опорной функции находим

$$\chi_{\bar{O}(u_0, R)}(v) = \chi_{\{u_0\} + \bar{O}(0, R)}(v) = \chi_{\{u_0\}}(v) + \chi_{\bar{O}(0, R)}(v) = \langle u_0, v \rangle + R \|v\|.$$

Пусть  $A$  квадратная матрица  $n$ -го порядка. Полагаем  $AU = \{v = Au \mid u \in U\}$ .

**Свойство 5.** Справедливо равенство  $\chi_{AU}(v) = \chi_U(A^T v)$ .

**Доказательство.**

$$c_{AU}(v) = \max_{z \in AU} \langle z, v \rangle = \max_{u \in U} \langle Au, v \rangle = \max_{u \in U} \langle u, A^T v \rangle = c_U(A^T v). \quad (2)$$

**Следствие 1.** Имеет место равенство  $\chi_{\lambda U}(v) = \chi_U(\lambda v)$ .

**Доказательство.** Вытекает из свойства 5 при  $A = \lambda E$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \chi_{\lambda U}(v) &= \chi_{(\lambda E)U}(v) \stackrel{\text{свойство 5}}{=} \chi_U((\lambda E)^T v) = \\ &= \chi_U((\lambda E)v) = \chi_U(\lambda v). \end{aligned}$$

**Следствие 2.** *Опорная функция является положительно однородной по аргументу*

$$U \subset R^n, \quad \text{т.е. } \chi_{\lambda U}(v) = \lambda \chi_U(v), \quad \lambda \geq 0.$$

**Доказательство.** Вытекает из предыдущего следствия и свойства 1. Действительно,

$$\chi_{\lambda U}^{\geq 0}(v) \stackrel{\text{следствие 1}}{=} \chi_U \left( \lambda v \right) \stackrel{\text{свойство 1}}{=} \lambda \chi_U(v).$$

**Свойство 6.** *Пусть  $U, W \subset R^n$ ,  $U \subset W$  – компактные множества. Тогда*

$$\chi_U(v) \leq \chi_W(v), \quad v \in \forall R^n.$$

**Доказательство.**

$$\chi_U(v) = \max_{u \in U} \langle u, v \rangle \stackrel{U \subset W}{\leq} \max_{w \in W} \langle w, v \rangle = \chi_W(v), \quad \forall v \in R^n.$$

