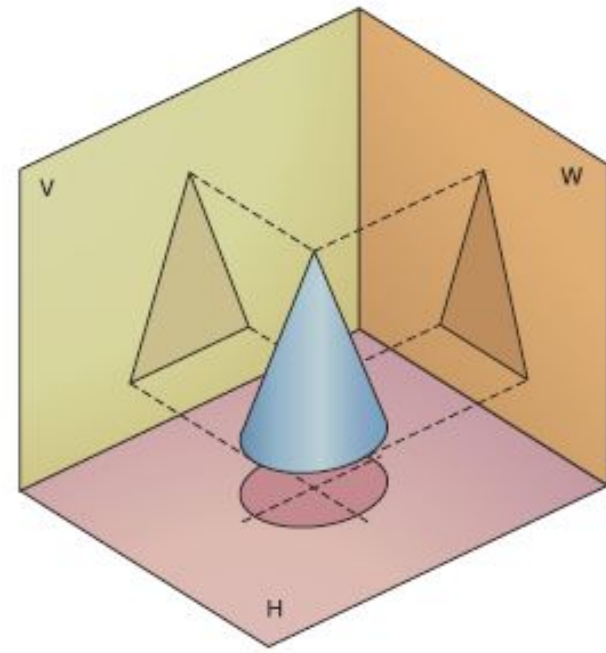


Геометрія

Повторення
Планіметрія





ПОВТОРЕННЯ КУРСУ ПЛАНІМЕТРІЇ

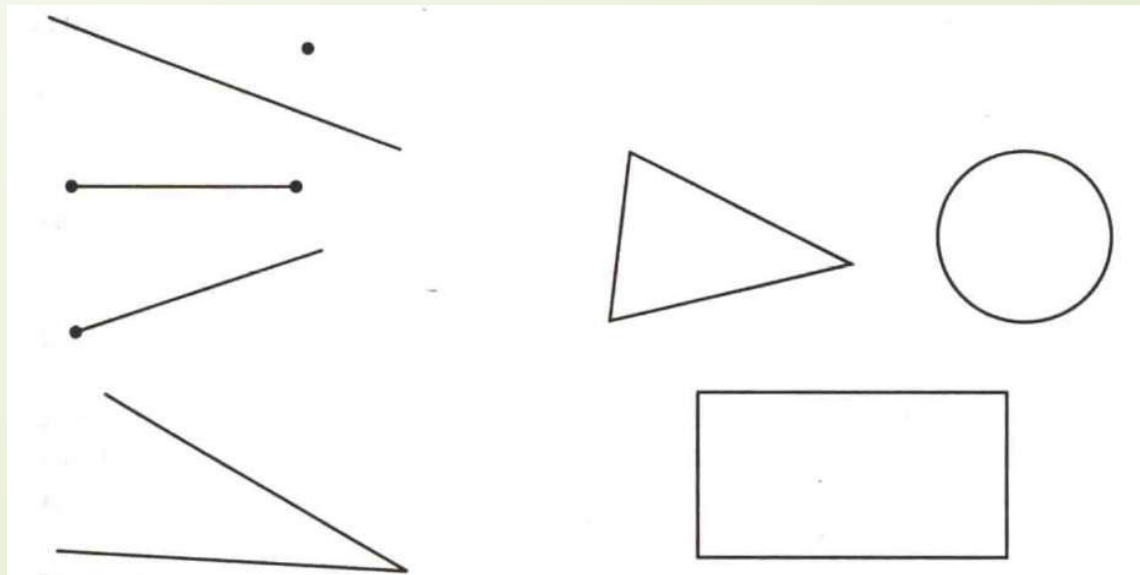
- основні поняття планіметрії;
- аксіоми – твердження, істинність яких
- приймають без доведень;
- основні властивості геометричних фігур
- та їх ознаки;
- методи розв'язування геометричних задач

ОПОРНІ ФАКТИ ПЛАНІМЕТРІЇ

В планіметрії основними фігурами є *точка і пряма*, а основними відношеннями – *«належати»*, *«лежати між»*, *«накладання»*.

Вони вводяться без означень. Використовуючи ці поняття, ми даємо означення іншим фігурам (*променю, відрізка, куту* тощо) та відношенням (*рівності, подібності, паралельності* тощо). Так само, кілька перших тверджень приймають як істинні без доведень. Їх називають *аксіомами*.

Всі інші твердження доводять, спираючись на аксіоми, означення понять та раніше доведені теореми.



Мал. 1

Мал. 2

АКСІОМИ ПЛАНІМЕТРІЇ

- 1. Існують точки, що лежать на прямій, і точки, що їй не належать.
- 2. Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.
- 3. З трьох точок прямої одна і тільки одна лежить між двома іншими.
- 4. Будь-яка фігура F накладанням суміщається сама із собою.
- 5. Якщо фігура F_1 накладанням суміщається з фігурою F_2 , то і фігура F_2 накладанням суміщається з фігурою F_1 .
- 6. Якщо фігура F_1 накладанням суміщається з фігурою F_2 , а фігура F_2 – з фігурою F_3 , то фігура F_1 накладанням суміщається з фігурою F_3 .

АКСІОМИ ПЛАНІМЕТРІЇ

→ 7. $\frac{\text{Довжина}}{\text{Градусна міра}}$ кожного $\frac{\text{відрізка}}{\text{кута}}$ більша за нуль.

→ 8. $\frac{\text{На промені від його початку}}{\text{Від променя по один бік від нього}}$ можна відкласти тільки один $\frac{\text{відрізок даної довжини}}{\text{кут даної градусної міри}}$.

→ 9. $\frac{\text{Довжина відрізка}}{\text{Градусна міра кута}}$ дорівнює сумі $\frac{\text{довжина відрізків}}{\text{градусних мір кутів}}$,
на які він розбивається $\frac{\text{будь-якою його точкою}}{\text{будь-яким променем, що проходить між сторонами кута}}$.

→ 10. (Аксіома паралельних прямих). Через будь-яку точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

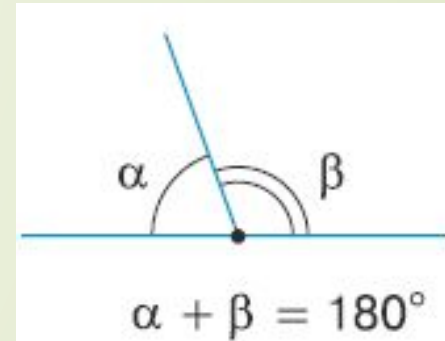
Кути

Два кути називаються суміжними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші сторони є доповняльними променями (мал. 1).

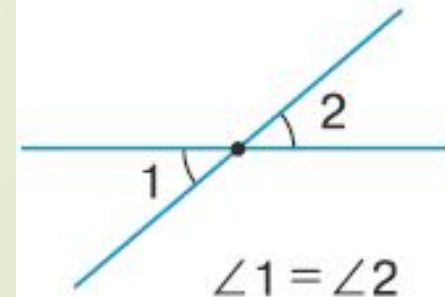
Сума суміжних кутів дорівнює 180° .

Два кути називаються вертикальними, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого (мал. 2).

Вертикальні кути рівні.



Мал. 1

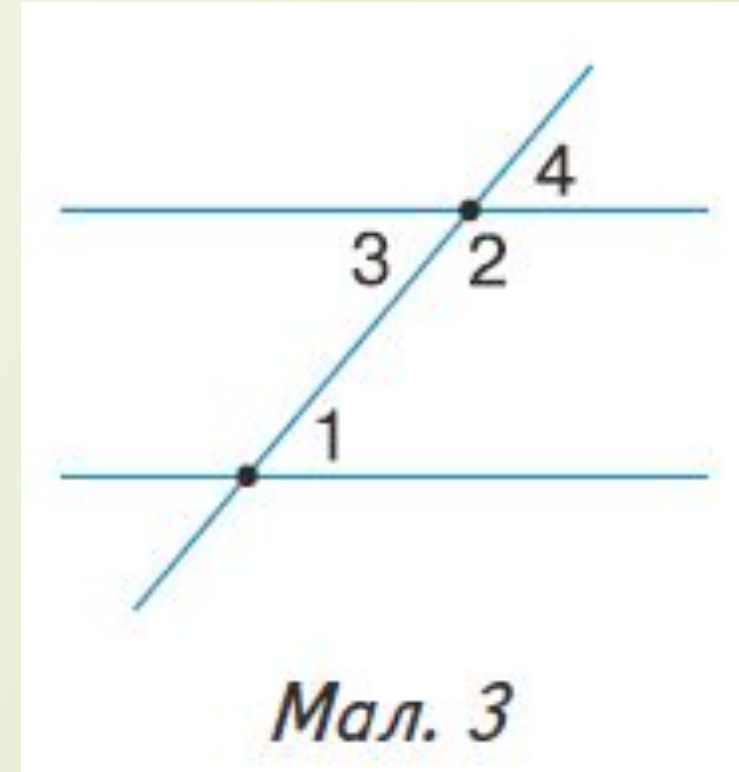


Мал. 2

Властивості паралельних прямих

Якщо дві паралельні прямі перетинає третя (мал. 3), то:

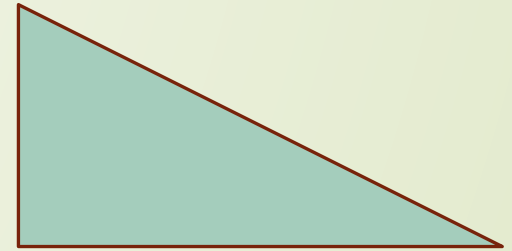
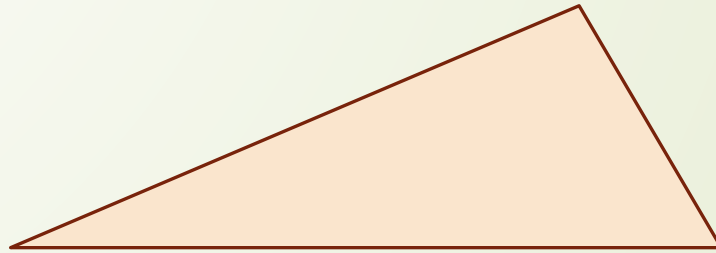
- 1) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180° : $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$;
- 2) внутрішні різносторонні кути рівні: $\angle 1 = \angle 3$;
- 3) відповідні кути рівні: $\angle 1 = \angle 4$.



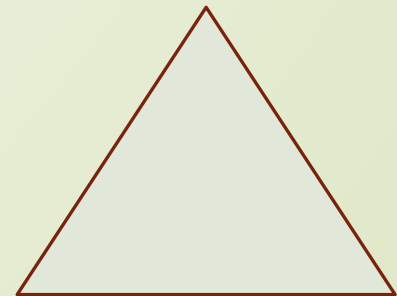
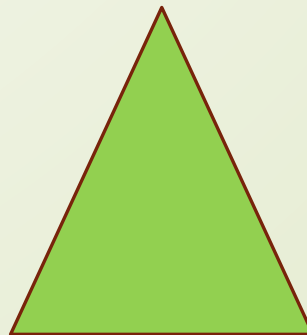
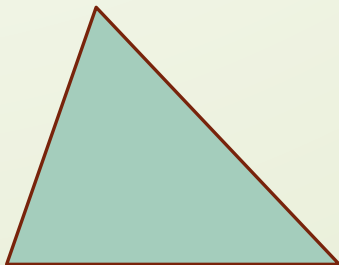
Мал. 3

Трикутники

Залежно від міри кутів, трикутники поділяють на гострокутні, тупокутні й прямокутні.



Залежно від довжин сторін трикутники поділяють на різносторонні, рівнобедрені й рівносторонні.



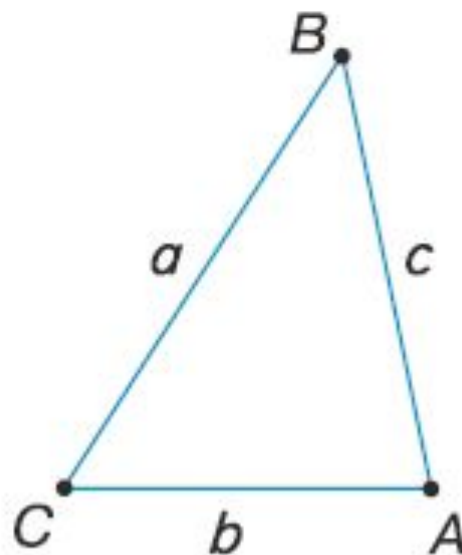
Трикутники

У будь-якому трикутнику ABC (мал. 4):

1) $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (теорема про суму кутів трикутника);

2) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$ (теорема косинусів);

3) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (теорема синусів), де R – радіус описаного кола.

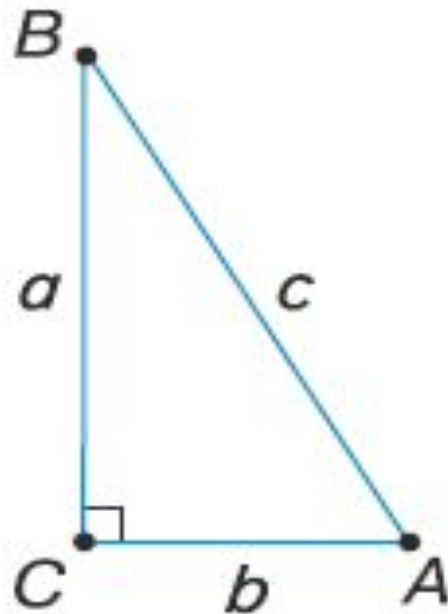


Мал. 4

Трикутники

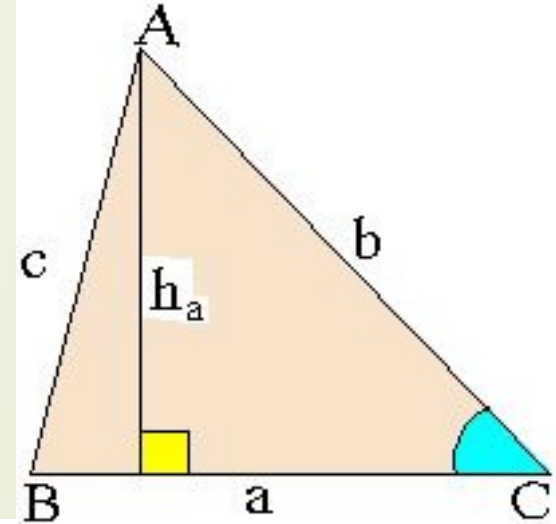
У прямокутному трикутнику ABC (мал. 5):

- 1) $\angle A + \angle B = 90^\circ$;
- 2) $c^2 = a^2 + b^2$ (теорема Піфагора);
- 3) $a = c \sin A = c \cos B = b \operatorname{tg} A$.



Мал. 5

Трикутник



Периметр трикутника дорівнює сумі довжин його сторін.

Площу трикутника можна обчислити за формулами:

1) $S = \frac{1}{2} ah_a$, де h_a – висота, проведена до сторони a ;

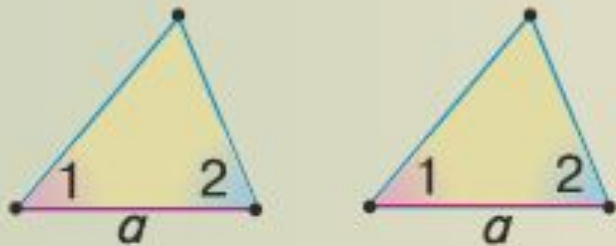
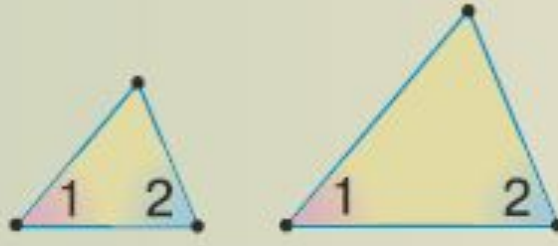
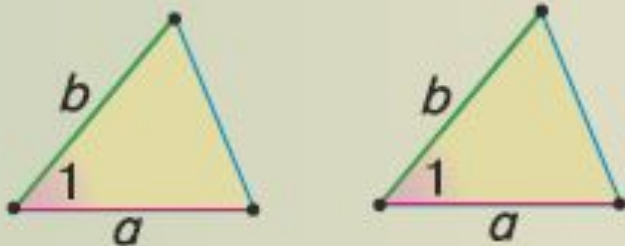
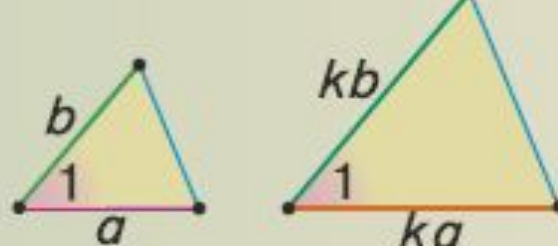
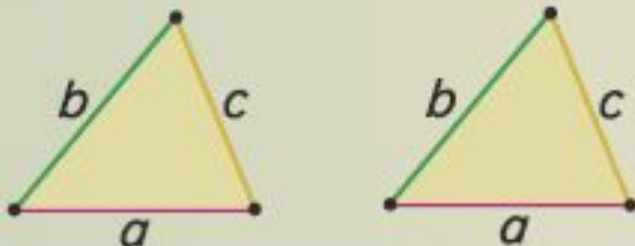
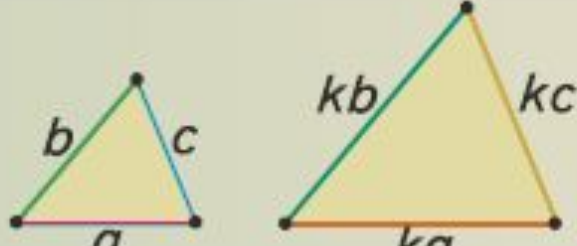
2) $S = \frac{1}{2} bc \sin A$;

3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де p – півпериметр (формула Герона);

4) $S = pr$, де p – півпериметр, r – радіус вписаного кола;

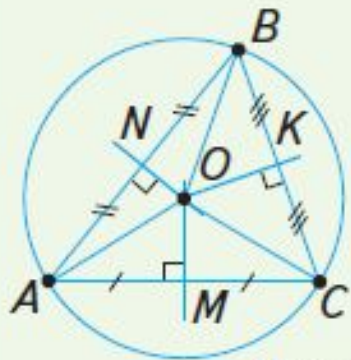
5) $S = \frac{abc}{4R}$, де R – радіус описаного кола.

Ознаки рівності й ознаки подібності трикутників

Трикутники рівні, якщо:	Трикутники подібні, якщо:
 Two triangles are shown. In the first, the bottom-left angle is marked with a pink '1', the bottom-right angle with a blue '2', and the bottom side with a pink 'a'. The second triangle is identical, with corresponding angles and side marked with the same colors and labels.	 Two triangles are shown. In the first, the bottom-left angle is marked with a pink '1' and the bottom-right angle with a blue '2'. The second triangle is identical, with corresponding angles marked with the same colors and labels.
 Two triangles are shown. In the first, the bottom-left angle is marked with a pink '1', the bottom side with a pink 'a', and the left side with a green 'b'. The second triangle is identical, with corresponding angles and sides marked with the same colors and labels.	 Two triangles are shown. In the first, the bottom-left angle is marked with a pink '1', the bottom side with a pink 'a', and the left side with a green 'b'. The second triangle is larger, with the bottom-left angle marked with a pink '1', the bottom side with an orange 'ka', and the left side with a green 'kb'.
 Two triangles are shown. In the first, the bottom side is marked with a pink 'a', the left side with a green 'b', and the right side with a yellow 'c'. The second triangle is identical, with corresponding sides marked with the same colors and labels.	 Two triangles are shown. In the first, the bottom side is marked with a pink 'a', the left side with a green 'b', and the right side with a blue 'c'. The second triangle is larger, with the bottom side marked with an orange 'ka', the left side with a green 'kb', and the right side with a yellow 'kc'.

Означення вписаних і описаних трикутників та їх властивості

КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА



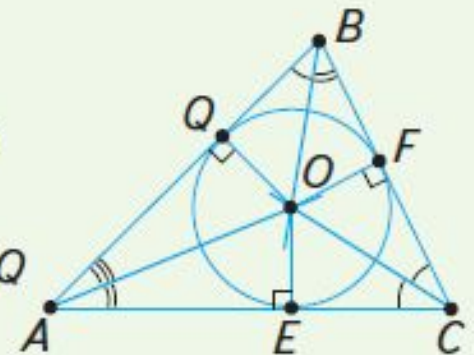
Центр O кола — точка перетину

*серединних
перпендикулярів*

$$R = OA = OB = OC$$

Навколо будь-якого трикутника
У будь-який трикутник

КОЛО, ВПИСАНЕ У ТРИКУТНИК



бісектрис кутів

$$r = OE = OF = OQ$$

можна $\frac{\text{описати}}{\text{вписати}}$ коло і до того ж тільки одне

Довжину кола і площу круга можна обчислити за формулами:

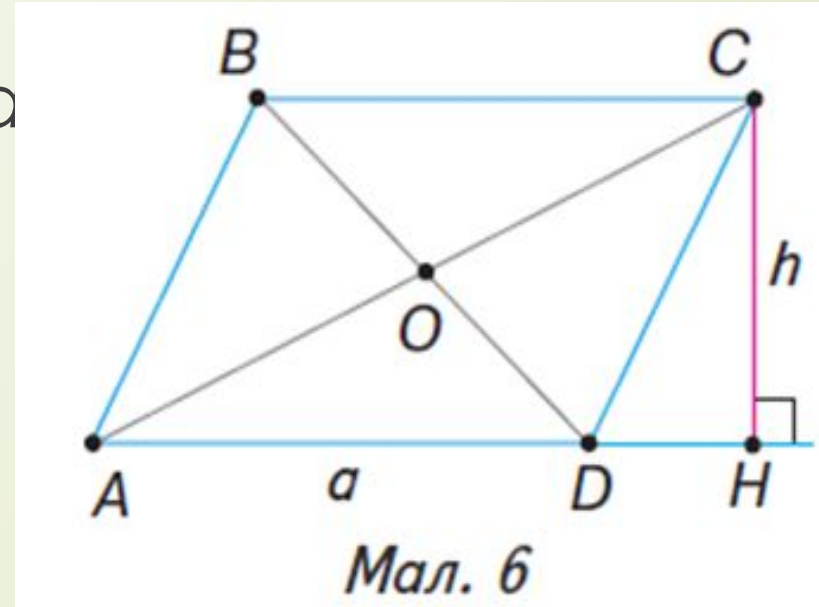
$$C = 2\pi R = \pi D, S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}, \text{ де } R - \text{ радіус кола, } D - \text{ його діаметр.}$$

Паралелограм

Паралелограм $ABCD$ (ма

- 1) $AD \parallel BC, AB \parallel DC$;
- 2) $AD = BC, AB = DC$;
- 3) $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$;
- 4) $AO = OC, BO = OD$;
- 5) $\angle A + \angle B = 180^\circ, \angle A + \angle D = 180^\circ$.

Площа паралелограма: $S = ah$.

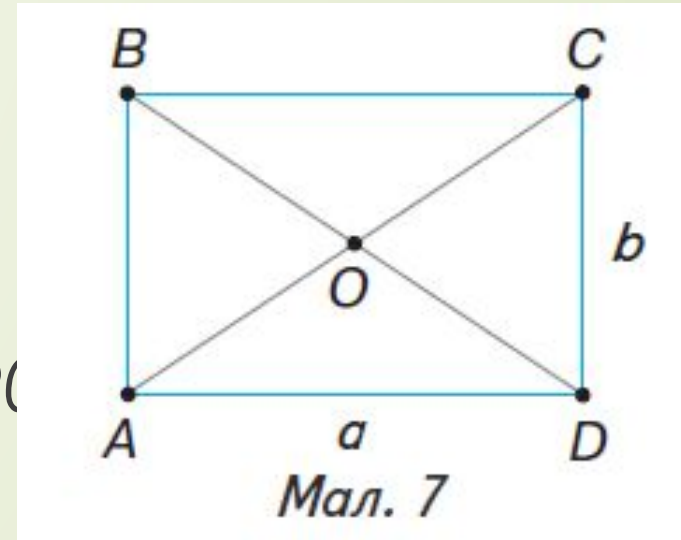


Прямокутник

Прямокутник $ABCD$ (мал. 7):

- 1) усі властивості паралелограма;
- 2) $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$
- 3) $AC = BD$.

Площа прямокутника: $S = ab$.

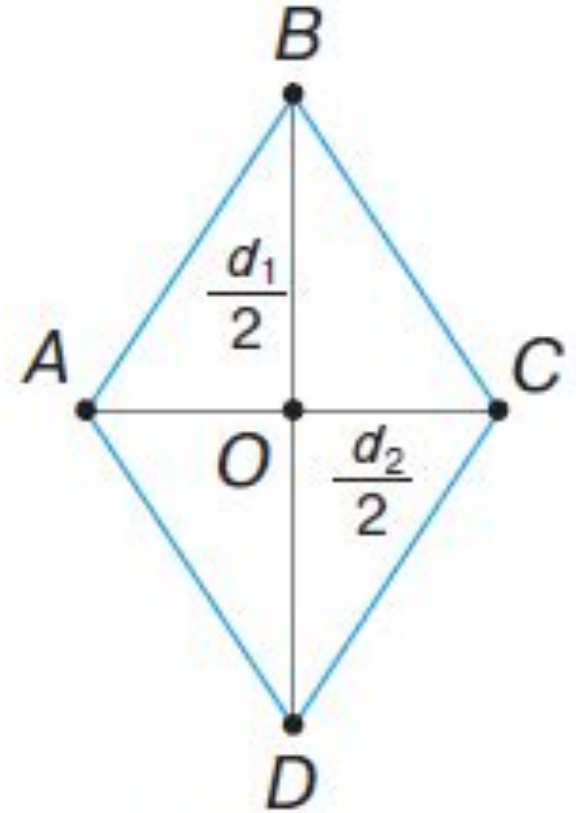


Ромб

Ромб $ABCD$ (мал. 8):

- 1) усі властивості паралелограма;
- 2) $AB = BC = CD = DA$;
- 3) $AC \perp BD$;
- 4) $\angle ABD = \angle CBD$, $\angle BAC = \angle DAC$

Площа ромба: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

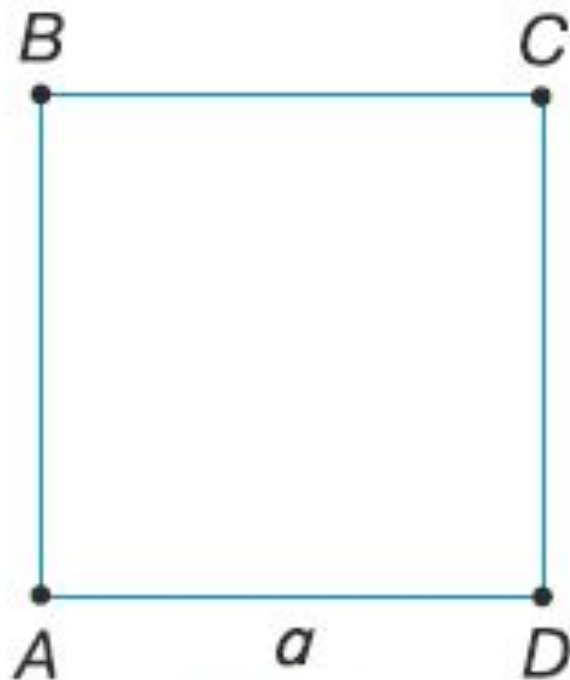


Мал. 8

Квадрат

Квадрат $ABCD$ (мал. 9): усі властивості паралелограма, прямокутника, ромба.

Площа квадрата: $S = a^2$.



Мал. 9

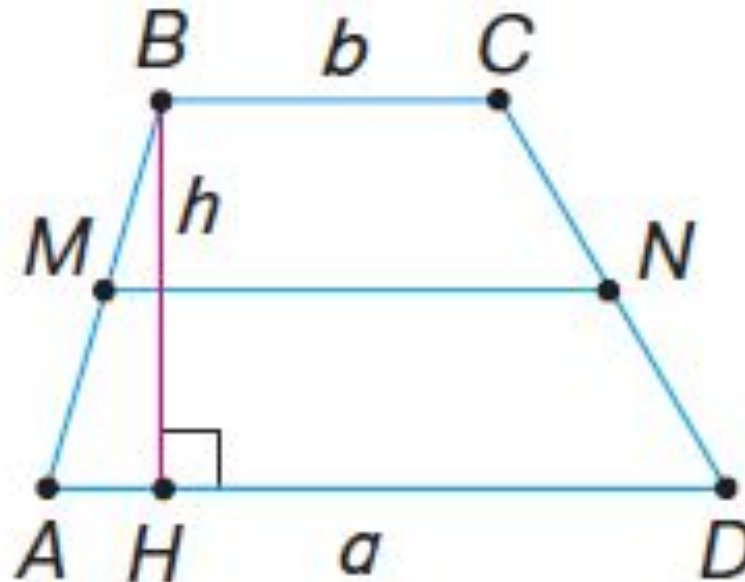
Трапеція

Трапеція $ABCD$ (мал. 10):

1) $AD \parallel BC$;

2) $MN \parallel AD, MN \parallel BC, MN = \frac{AD + BC}{2}$,
де MN – середня лінія.

Площа трапеції: $S = \frac{(a + b)h}{2}$.



Мал. 10

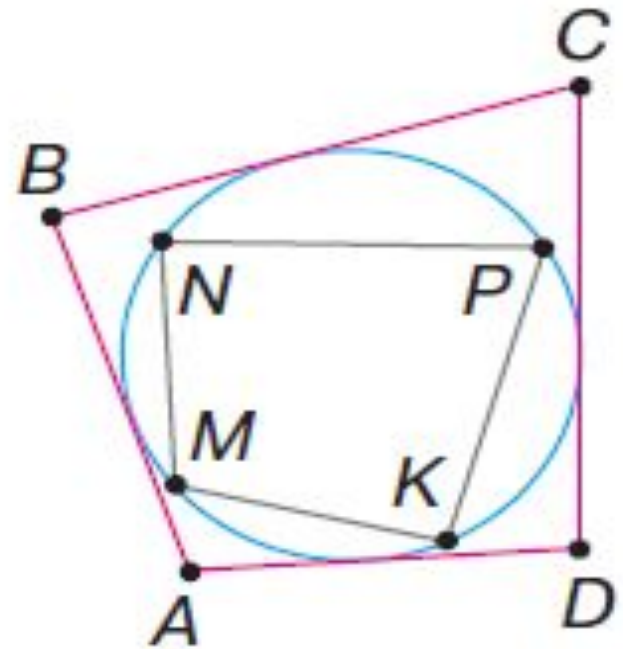
Властивості вписаних і описаних чотирикутників

1) у вписаному чотирикутнику
 $MNKP$

(мал. 11): $\angle M + \angle P = 180^\circ$,
 $\angle N + \angle K = 180^\circ$;

2) в описаному чотирикут-
нику $ABCD$

(мал. 11): $AB + CD = AD + BC$.

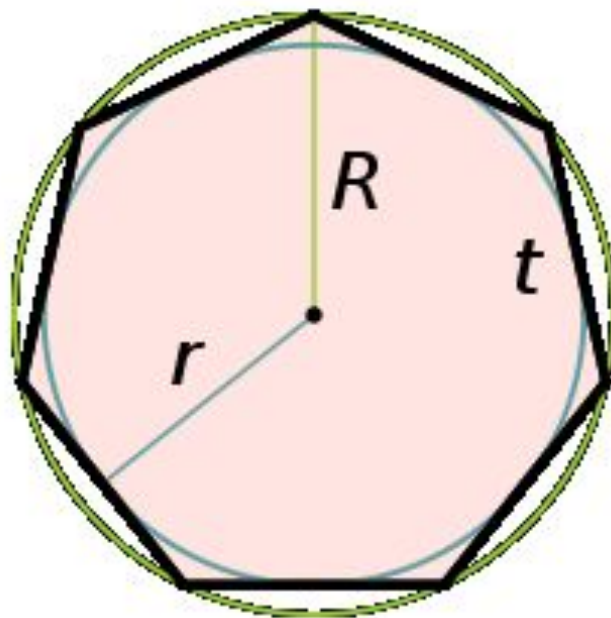


Мал. 11

МНОГОКУТНИКИ

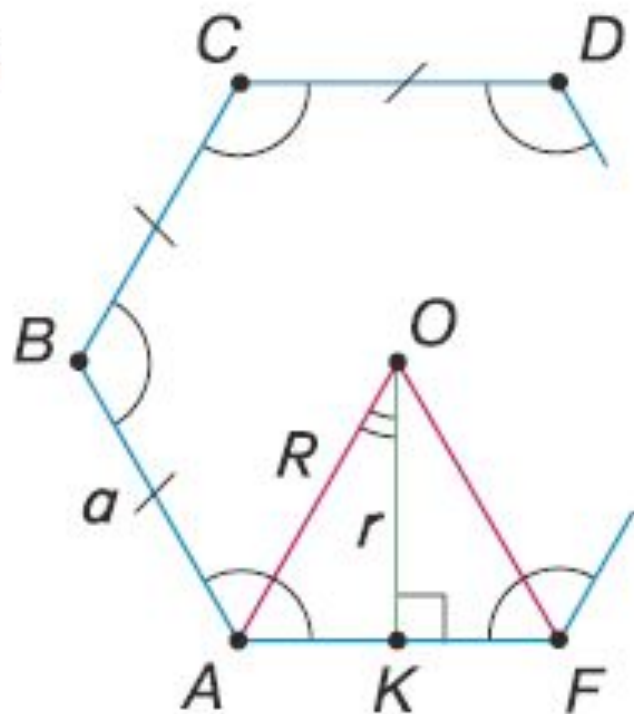
Вписані й описані многокутники

Многокутник називається $\frac{\text{вписаним у коло}}{\text{описаним навколо кола}}$,
якщо всі його $\frac{\text{вершини лежать на колі}}{\text{сторони дотикаються до кола}}$.



Правильні многокутники

- 1) $AB = BC = \dots = AF$ і $\angle A = \angle B = \dots = \angle F$;
- 2) точка O є центром описаного кола і вписаного кола;
- 3) $\angle AOF = \frac{360^\circ}{n}$;
- 4) $\angle A + \angle B + \dots + \angle F = 180^\circ (n - 2)$;
- 5) $r = \frac{AK}{\operatorname{tg} \angle AOK} = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$;
- 6) $R = \frac{AK}{\sin \angle AOK} = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$.



Мал. 12



Дякую за увагу !