простейших тригонометрических выражений.

Лекция 1. Основные формулы тригонометрии

Формулы приведения

- $\sin(t + 2\pi k) = \sin t$; $\cos(t + 2\pi k) = \cos t$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $\sin(t + \pi) = -\sin t$; $\cos(t + \pi) = -\cos t$;
- $\sin(-t) = -\sin t$; $\cos(-t) = \cos t$;
- $\sin(\pi - t) = \sin t$; $\cos(\pi - t) = -\cos t$;
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$;

- $\operatorname{tg}(t + k\pi) = \operatorname{tg} t$; $\operatorname{ctg}(t + k\pi) = \operatorname{ctg} t$; $k \in \mathbf{Z}$;
- $\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$; $\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg} t$;
- $\operatorname{tg}(\pi - t) = \operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg} t$; $\operatorname{ctg}(\pi - t) = -\operatorname{ctg} t$;
- $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{ctg} t$; $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \operatorname{tg} t$.

Формулы сложения

- $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta;$
- $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta;$
- $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha;$
- $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\,\cos\beta - \sin\beta\,\cos\alpha;$
- $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta};$
- $\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}.$

Формулы удвоения

- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$;
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;
- $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Формулы половинного угла

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha); \quad \sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha).$$

Примеры

Формулы приведения

- $\sin 370^\circ = \sin(10^\circ + 360^\circ) = \\ = \sin 10^\circ;$
- $\cos 190^\circ = \cos(10^\circ + 180^\circ) = \\ = -\cos 10^\circ;$
- $\operatorname{tg} = \dfrac{9\pi}{8} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{8} + \pi\right) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8};$
- $\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \\ = \cos 10^\circ.$

Формулы сложения

- $\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) =$
$= \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ =$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 2} - \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}\left(1 - \sqrt{3}\right)}{4};$$
- $\sin 20^\circ \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \sin 40^\circ =$
$$= \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$
- $\operatorname{tg} 75^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ + 30^\circ) =$
$$= \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 30^\circ}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$
$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\left(\sqrt{3} + 1\right)^2}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$