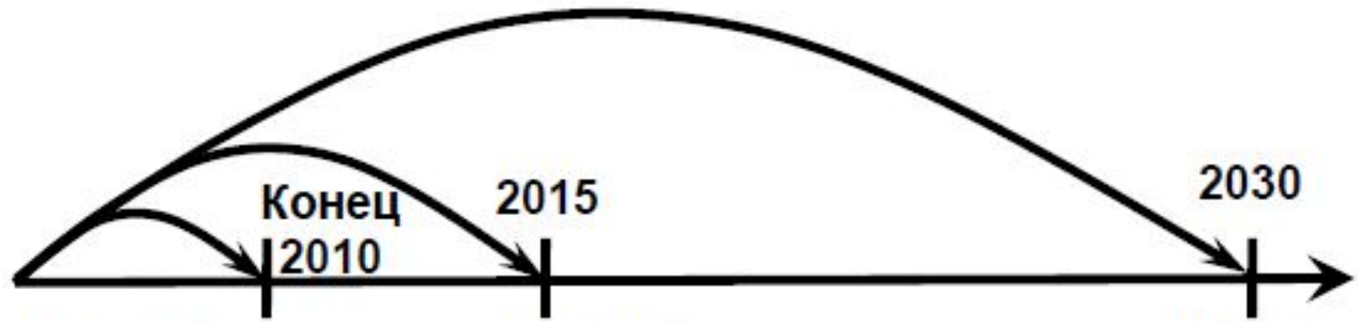
Лекция №7,8

Общая характеристика информационных технологий прогнозирования в менеджменте

Вопросы:

- **Постановка задачи факторного анализа**
- **Метод наименьших квадратов**
- **Принципы построения многофакторных моделей**
- **Авторегрессия**
- **Мультитрендовые модели**
- **Динамическое программирование**

Стратегические горизонты



Горизонт стратегических задач

Перечень задач, которые необходимо решить в течение определенного времени, для того, чтобы обеспечить построение модели бизнеса
Удержать согласованность деятельности

Удержать согласованность деятельности

Горизонт формирования модели бизнеса

Основные решения, связанные с «конструированием» модели бизнеса, которая обеспечит успех компании
на горизонте стратегического видения

Удержать целостность деятельности и устойчивость денежного потока.

Горизонт стратегическог о видения

Видение будущего

Понимание успеха компании

Миссия

Удержать смысл деятельности

Примерно до середины XX в. в организациях западных государств, в том числе в крупных корпорациях, не создавались специальные отделы долгосрочного планирования. Формальное планирование преимущественно сводилось к составлению бюджетов по статьям расходов для каждой крупной производственно-хозяйственной функции и по отдельным структурным единицам предприятия. Планирование характеризовалось краткосрочным характером (преимущественно на один год) и внутриорганизационной направленностью.

Идея долгосрочного планирования появилась впервые в нашей стране в 20-е годы прошлоговека и эффективно использовалась при реализации 5-х планов.

Первым единым государственным планом восстановления и развития народного хозяйства Советской республики был план ГОЭЛРО, разработанный в 1920 по заданию и под руководством В. И. Ленина.

С 1928 разрабатываются пятилетние государственные планы развития народного хозяйства страны. В соответствии с Конституцией СССР руководство экономикой осуществляется на основе государственных планов экономического и социального развития, с учетом отраслевого и территориального принципов, при сочетании централизованного управления с хозяйственной самостоятельностью и инициативой предприятий, объединений и др. организаций. При этом активно используется хозяйственный расчет (Система. экономических рычагов и стимулов в социалистическом народном хозяйстве).

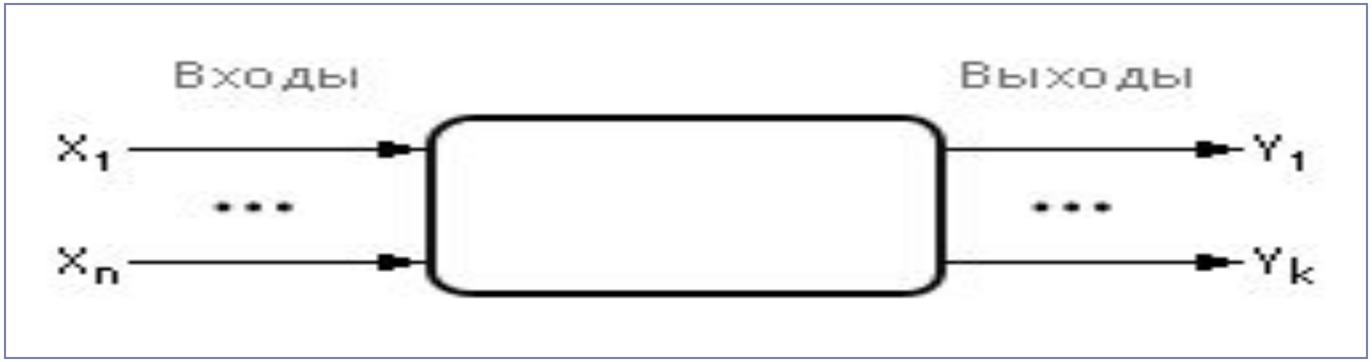
Идея долгосрочного планирования в США появилась относительно недавно - в 1950-х - начале 1960-х гг. Опыт СССР, высокие темпы роста товарных рынков и хорошая предсказуемость тенденций их развития побудили компании расширять горизонт планирования.

В основе долгосрочного планирования лежит прогноз производства и продаж продукции на несколько лет вперед, ***построенный по принципу экстраполяции - распространения известных в прошлом тенденций на будущий период***.

Постановка задачи факторного анализа

По степени информированности исследователя об объекте существует деление объектов на три типа «ящиков»:

- **«белый ящик»**: об объекте известно все;
- **«серый ящик»**: известна структура объекта, неизвестны количественные значения параметров;
- **«черный ящик»**: об объекте неизвестно ничего.

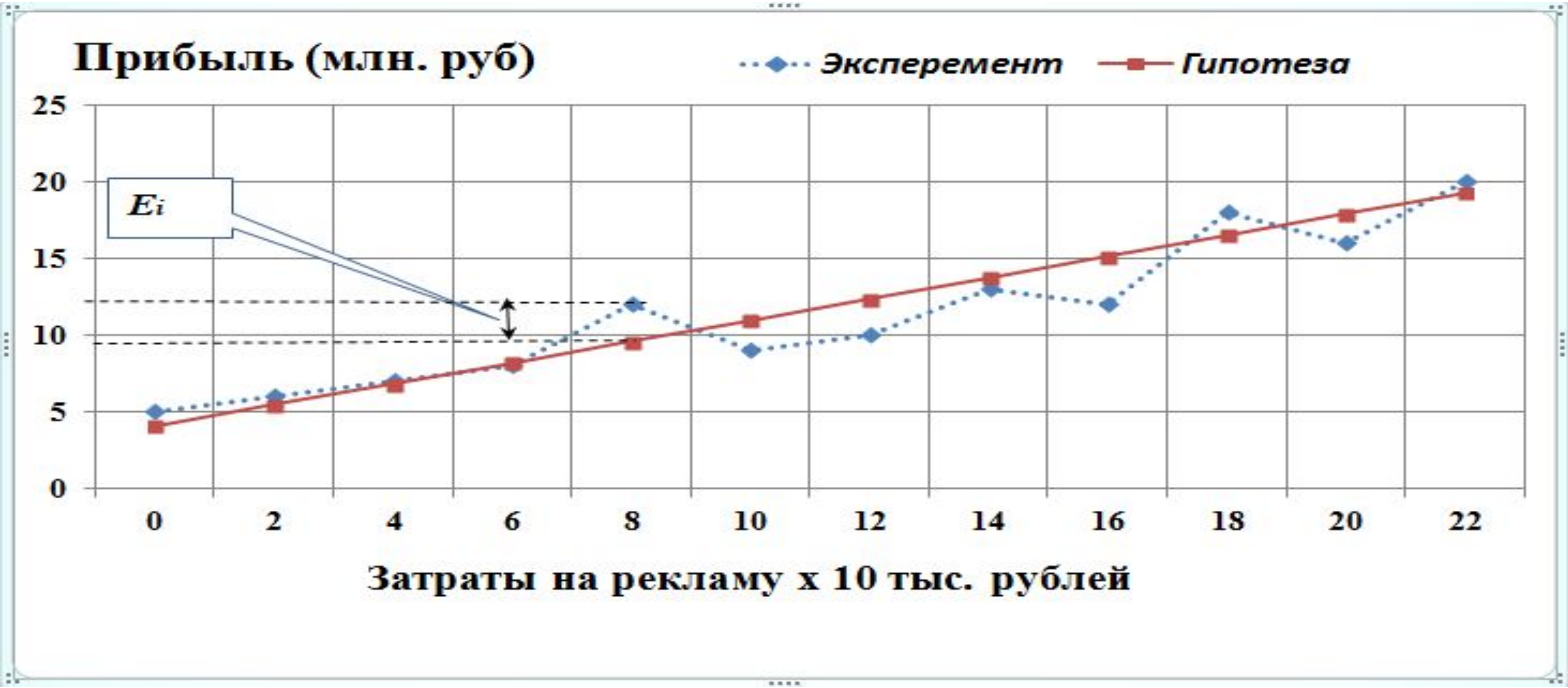


Значения на входах и выходах черного ящика можно наблюдать и измерять. Содержимое ящика ***неизвестно.***

Задача состоит в том, чтобы, зная множество значений на входах и выходах, построить модель, то есть определить функцию ящика, по которой вход преобразуется в выход. Такая задача называется **задачей регрессионного анализа**.

Задача

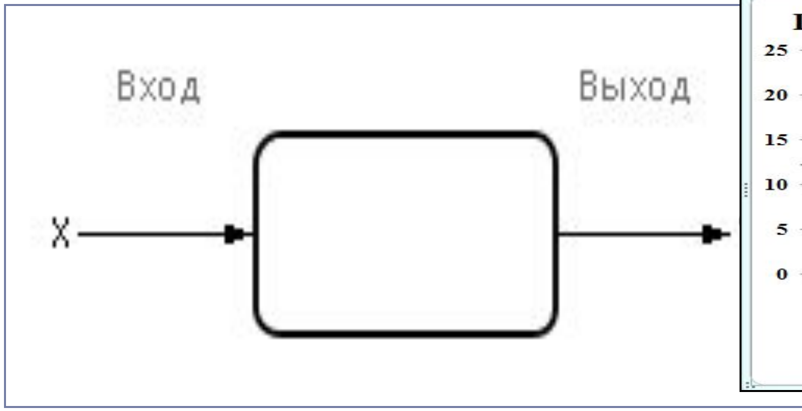
Определить, как зависит прибыль фирмы от затрат на рекламу.

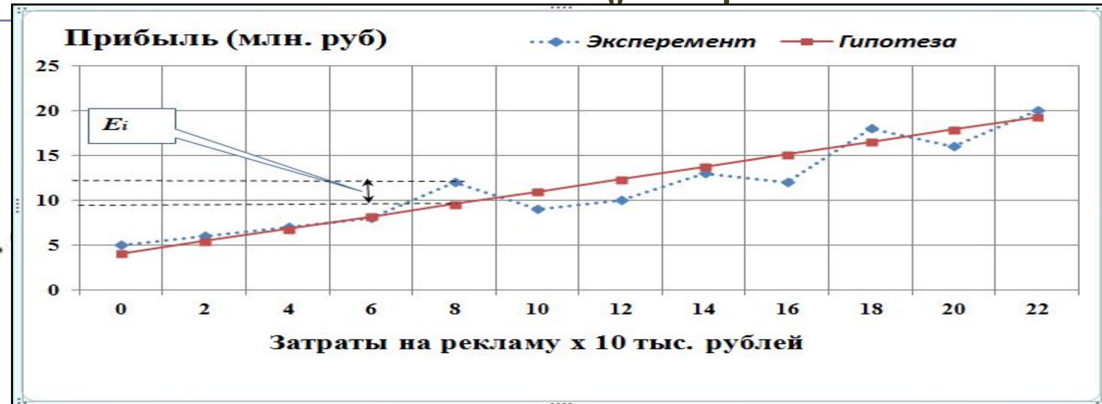


1) Исследователь вносит гипотезу о структуре ящика

Y зависит от входа X линейно, то есть гипотеза имеет вид: $Y = A_1 X + A_0$

2) Определение неизвестных коэффициентов A_0 и A_1 модели





Для каждой из n снятых экспериментально точек вычислим ошибку (E_i) между экспериментальным значением ($Y_i^{\text{Эксп.}}$) и теоретическим значением ($Y_i^{\text{Теор.}}$), лежащим на гипотетической прямой $A_1X + A_0$

$$E_i = (Y_i^{\text{Эксп.}} - Y_i^{\text{Теор.}}),\ i = 1, \ldots, n;$$

$$E_i = Y_i - A_0 - A_1 \cdot X_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Ошибки E_i для всех n точек следует сложить. Чтобы положительные ошибки не компенсировали в сумме отрицательные, каждую из ошибок возводят в квадрат и складывают их значения в суммарную ошибку F уже одного знака:

$$\boldsymbol{E_i^2 = (Y_i - A_0 - A_1 \cdot X_i)^2,\ i = 1, \ldots, n.}$$

$$F(A_0, A_1) = \sum_{i=1}^{n} E_i^2$$

Метод наименьших квадратов

Цель метода — минимизация суммарной ошибки *F* за счет подбора коэффициентов A_0, A_1. Другими словами, это означает, что необходимо найти такие коэффициенты A_0, A_1 линейной функции $Y = A_1X + A_0$, чтобы ее график проходил как можно ближе одновременно ко всем экспериментальным точкам. Поэтому данный метод называется **методом наименьших квадратов**

$$F(A_0, A_1) = \sum_{i=1}^{n} E_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - A_0 - A_1 X_i)^2 \Rightarrow \min_{A_0,\, A_1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - A_0 - A_1 X_i) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_1} = -2 \sum_{i=1}^{n} (Y_i - A_0 - A_1 X_i) X_i = 0$$

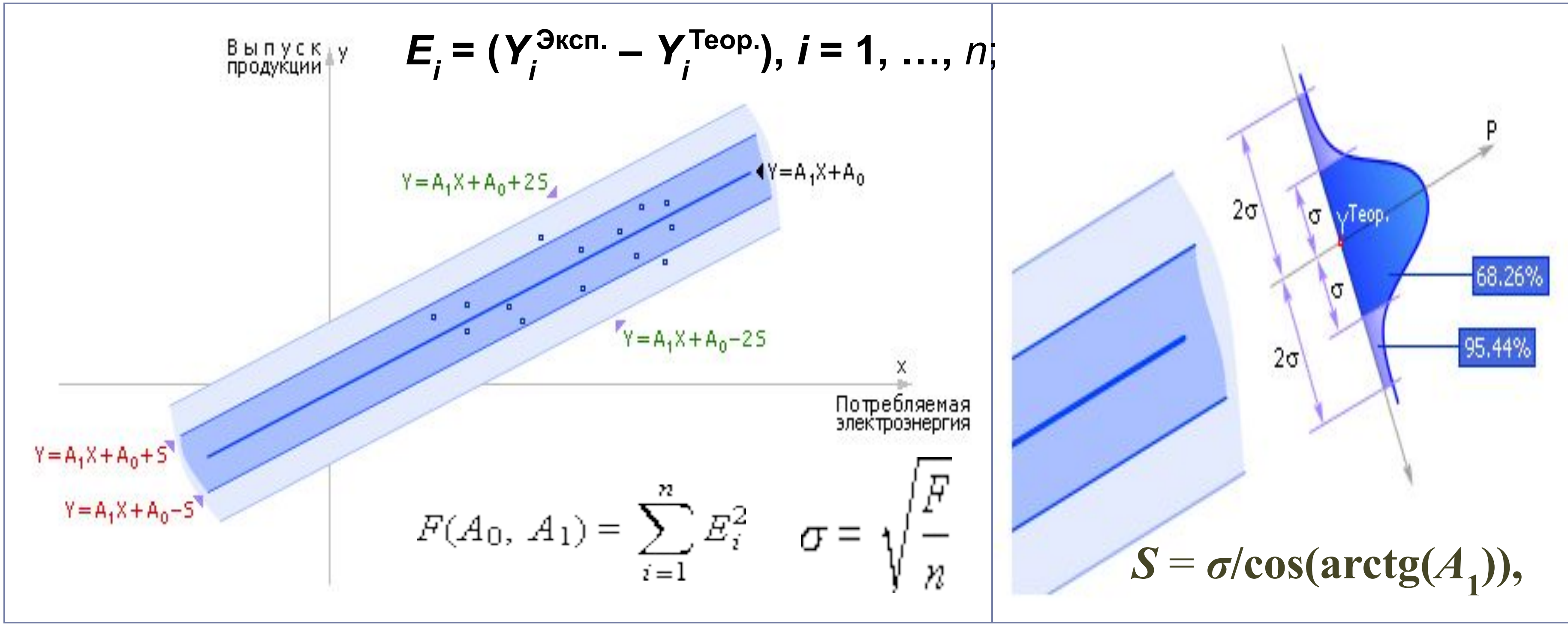
Решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \sum_{i=1}^{n} X_i}{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}$$

$$A_1 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{i=1}^{n} X_i}{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}$$

3) Проверка качества модели

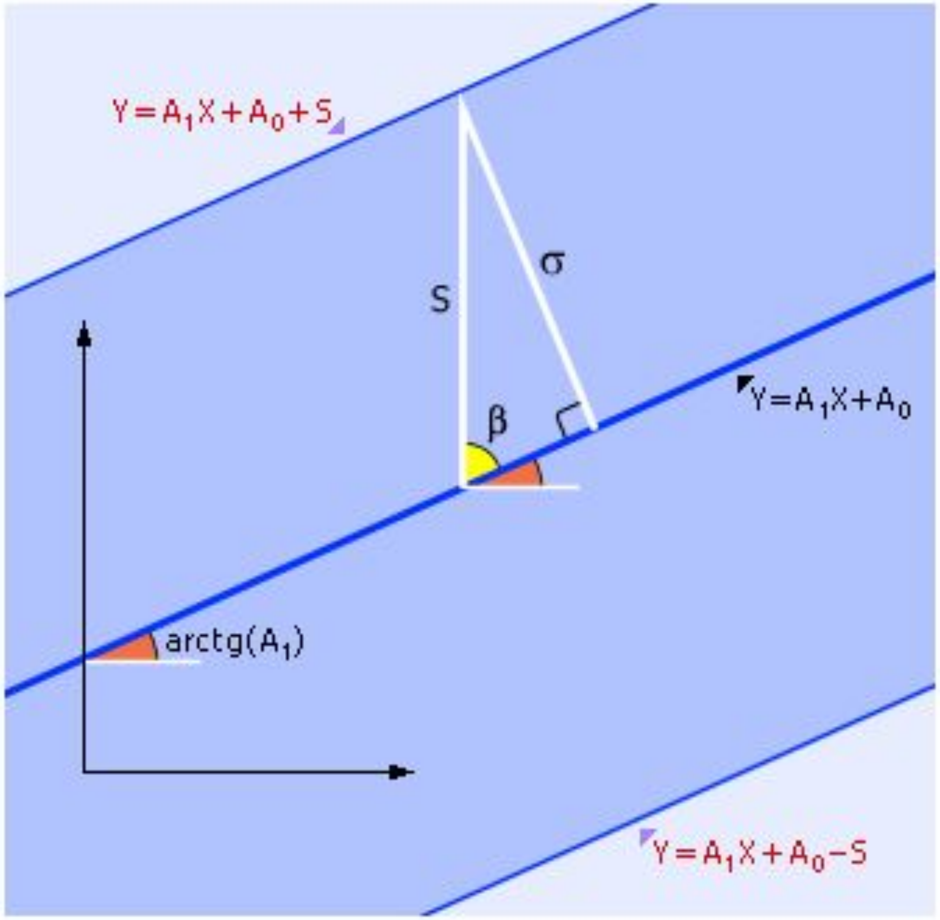


$$E_i = (Y_i^{Эксп.} - Y_i^{Теор.}),\ i = 1, \dots, n;$$

$$F(A_0, A_1) = \sum_{i=1}^{n} E_i^2 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{F}{n}}$$

$$S = \sigma/\cos(\mathrm{arctg}(A_1)),$$

Если в полосу, ограниченную линиями $Y^{Теор.} - S$ **и** $Y^{Теор.} + S$**)**, попадает 68.26% и более экспериментальных точек $Y_i^{Эксп.}$, то выдвинутая нами гипотеза принимается. В противном случае выбирают более сложную гипотезу или проверяют исходные данные. Если требуется б**о**льшая уверенность в результате, то используют дополнительное условие: в полосу, ограниченную линиями $Y^{Теор.} - 2S$ и $Y^{Теор.} + 2S$**,** должны попасть 95.44% и более экспериментальных точек $Y_i^{Эксп.}$.



$$\boldsymbol{S} = \sigma/\sin(\beta) = \sigma/\sin(90° - \mathrm{arctg}(A_1))$$
$$= \boldsymbol{\sigma/\cos(\mathrm{arctg}(A_1))},$$

Расчет коэффициентов модели

i	X_i	Y_i	X_i^2	X_iY_i
1	0	5	0	0
2	2	6	4	12
3	4	7	16	28
4	6	8	36	48
5	8	12	64	96
6	10	9	100	90
7	12	10	144	120
8	14	13	196	182
9	16	12	256	192
10	18	18	324	324
11	20	16	400	320
12	22	20	484	440
Сумма	132	136	2024	1852

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \end{pmatrix}$$

$$A_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \sum_{i=1}^{n} X_i}{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}$$

$$A_1 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i \sum_{i=1}^{n} X_i}{n \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 132 \\ 132 & 2024 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 136 \\ 1852 \end{pmatrix}$$

$$A_0 = \frac{136 \times 2024 - 1852 \times 132}{12 \times 2024 - 132 \times 132} = 4{,}05$$

$$A_1 = \frac{12 \times 1852 - 132 \times 136}{12 \times 2024 - 132 \times 132} = 0{,}69$$

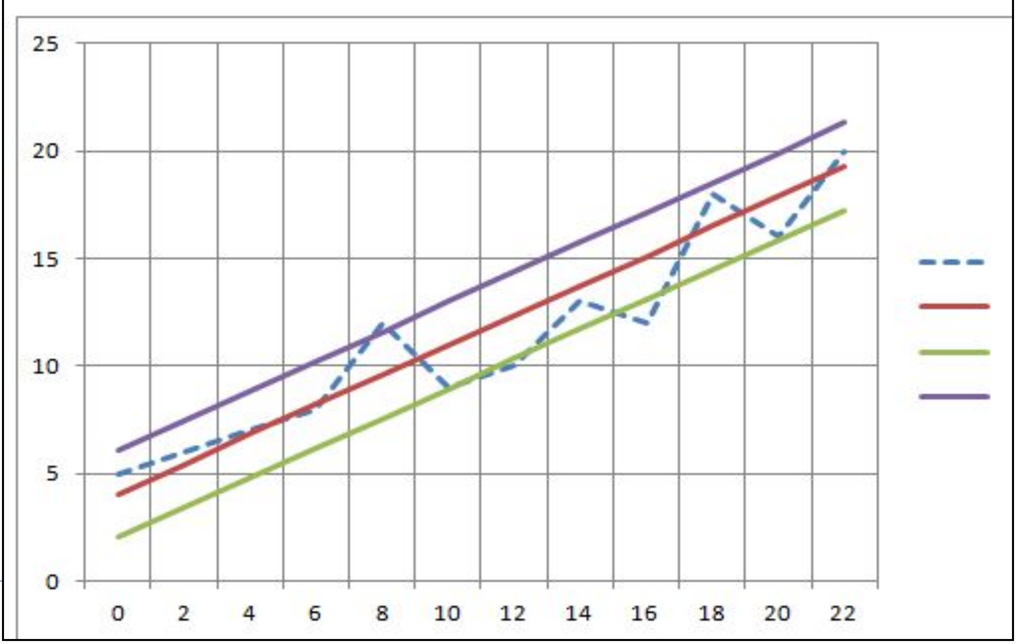
Проверка – попадание 75%

i	X_i	Y_i	$\hat{Y}_i$	E_i	E_i^2
1	0	5	4,05	0,95	0,90
2	2	6	5,43	0,57	0,32
3	4	7	6,81	0,19	0,04
4	6	8	8,19	-0,19	0,04
5	8	12	9,57	2,43	5,90
6	10	9	10,95	-1,95	3,80
7	12	10	12,33	-2,33	5,43
8	14	13	13,71	-0,71	0,50
9	16	12	15,09	-3,09	9,55
10	18	18	16,47	1,53	2,34
11	20	16	17,85	-1,85	3,42
12	22	20	19,23	0,77	0,59
				Сумма:	32,84

X_i	Y_i	$\hat{Y}_i$	$\hat{Y}_i - S$	$\hat{Y}_i + S$	Попадание
0	5	4,05	2,03	6,07	да
2	6	5,43	3,41	7,45	да
4	7	6,81	4,79	8,83	да
6	8	8,19	6,17	10,21	да
8	12	9,57	7,55	11,59	нет
10	9	10,95	8,93	12,97	да
12	10	12,33	10,31	14,35	нет
14	13	13,71	11,69	15,73	да
16	12	15,09	13,07	17,11	нет
18	18	16,47	14,45	18,49	да
20	16	17,85	15,83	19,87	да
22	20	19,23	17,21	21,25	да

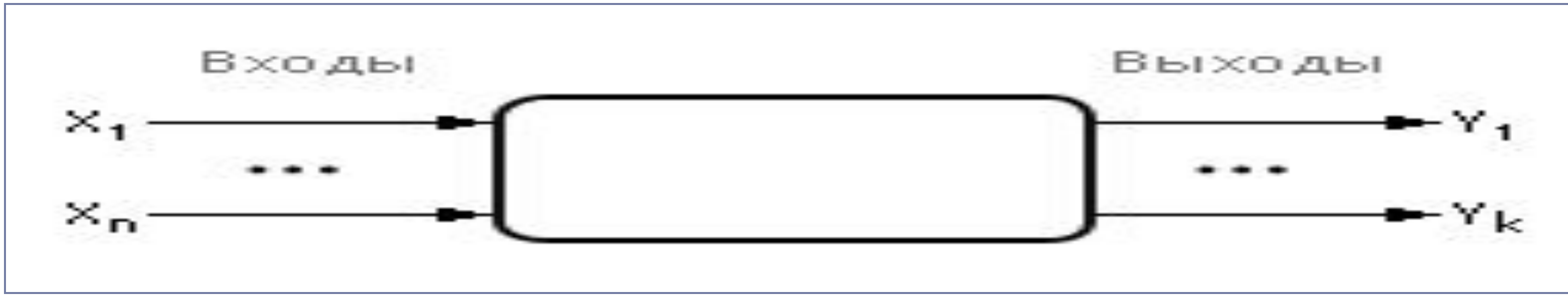
$$\sigma = \sqrt{\frac{F}{n}} = \sqrt{\frac{33}{12}} = 1{,}664101;$$

$$S = \frac{\sigma}{\cos(arctg A_1)} = \frac{1{,}664101}{\cos(arctg\ 0{,}69)} = 2{,}02$$



Уравнение множественной регрессии

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_p x_p + \varepsilon$$



Цель множественной регрессии:

- Построить модель с большим числом факторов, определив влияние каждого из них в отдельности, а также совокупное их воздействие на моделируемый фактор.
- Выполнить прогноз поведения результата в зависимости от поведения влияющих на результат факторов

Спецификация модели включает в себя два круга вопросов:

- отбор факторов;

- выбор вида уравнения регрессии.

Выбор формы уравнения регрессии

- Линейная регрессия

$$y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_p x_p + \varepsilon$$

- Линеаризуемые регрессии
  - Степенная регрессия

$$y = a x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_p^{b_p} \varepsilon$$

$$\ln y = \ln a + b_1 \ln x_1 + b_2 \ln x_2 + \ldots b_p \ln x_p + \varepsilon$$

  - Экспоненциальная регрессия

$$y = e^{a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_p x_p + \varepsilon}$$

$$\ln y = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_p x_p + \varepsilon$$

  - Гиперболическая регрессия

$$y = \frac{1}{a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots b_p x_p + \varepsilon}, \frac{1}{y} = a + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_p x_p + \varepsilon$$

Метод наименьших квадратов для уравнения в обычном масштабе

- Модель

$$y = a + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_px_p + \varepsilon$$

- Система нормальных уравнений

$$\begin{cases} \sum y = na + b_1\sum x_1 + b_2\sum x_2 + \ldots + b_p\sum x_p \\ \sum yx_1 = a\sum x_1 + b_1\sum x_1^2 + b_2\sum x_1x_2 + \ldots b_p\sum x_px_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum yx_p = a\sum x_p + b_1\sum x_1x_p + b_2\sum x_2x_p + \ldots b_p\sum x_p^2 \end{cases}$$

Матричная запись уравнений МНК

$$\left(X^T \cdot X\right) \cdot A = X^T \cdot Y \,.$$

$$A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \left(X^T \cdot X\right)^{-1} \cdot \left(X^T \cdot Y\right).$$

Постановка задачи

<u>Задача</u>

Статистические данные о приращении прибыли (Y) предприятия, полученные за последние 7 лет, представлены в таблице (см. рис. ниже). На этом рисунке показаны также инвестиционные вложения в оборотные средства (X_1) и основной капитал (X_2).

Требуется построить регрессионную модель, позволяющую прогнозировать приращение прибыли предприятия в зависимости от поведения этих показателей.

Вычислительная схема для определения значений коэффициентов A_0, A_1, A_2

n	Год	Y	X1	X2
1	2009	75	55	31
2	2010	145	91	35
3	2011	315	103	45
4	2012	215	135	40
5	2013	225	155	41
6	2014	325	215	43
7	2015	345	275	45

$$X = \begin{vmatrix} 1 & 55 & 31 \\ 1 & 91 & 35 \\ 1 & 103 & 45 \\ 1 & 135 & 40 \\ 1 & 155 & 41 \\ 1 & 215 & 43 \\ 1 & 275 & 45 \end{vmatrix}$$

=ТРАНСП(D11:F17)

$$X^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 55 & 91 & 103 & 135 & 155 & 215 & 275 \\ 31 & 35 & 45 & 40 & 41 & 43 & 45 \end{vmatrix}$$

$$X^T X = \begin{vmatrix} 7 & 1029 & 280 \\ 1029 & 186015 & 42900 \\ 280 & 42900 & 11366 \end{vmatrix}$$

==МУМНОЖ(D20:J22;D11:F17)

$$Z = (X^T X)^{-1} = \begin{vmatrix} 14{,}2708 & 0{,}01649 & -0{,}41379 \\ 0{,}01649 & 6{,}1E\text{-}05 & -0{,}00063 \\ -0{,}41379 & -0{,}00063 & 0{,}01268 \end{vmatrix}$$

=МОБР(D24:F26)

=МУМНОЖ(D28:F30;D32:D34)

$$X^T Y = \begin{vmatrix} 1645 \\ 278415 \\ 68900 \end{vmatrix} \qquad A = (X^T X)^{-1}(X^T Y) = \begin{vmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -444{,}287 \\ 0{,}24865 \\ 16{,}0684 \end{vmatrix}$$

=МУМНОЖ(D20:J22;D3:D9)

Проверка качества модели

n	Год	Y	X_1	X_2	$\hat{Y}_i$	$(Y_i-\overline{Y})^2$	$(\hat{Y}_i-\overline{Y})^2$	$(Y_i-\hat{Y}_i)^2$	$\delta=\frac{\lvert Y_i-\hat{Y}_i\rvert}{Y_i}\times 100\%$
1	2009	75	55	31	***67,51***	25600	28053	56	9,99
2	2010	145	91	35	***140,73***	8100	8886	18	2,94
3	2011	315	103	45	***304,40***	6400	4817	112	3,36
4	2012	215	135	40	***232,02***	400	9	290	7,91
5	2013	225	155	41	***253,06***	100	326	787	12,47
6	2014	325	215	43	***300,11***	8100	4240	619	7,66
7	2015	345	275	45	***347,17***	12100	12582	5	0,63
Сумма						*TSS*= 60800	*ESS*= 58913	*RSS*= 1887	
Среднее		$\overline{Y}=235$							6,42

A_0	=	-444,28698
A_1		0,2486473
A_2		16,068396

$$Z=(X^TX)^{-1}=\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 14,27 & 0,02 & -0,41 \\ 0,02 & 0,000061 & 0,00 \\ -0,41 & 0,00 & 0,01 \end{pmatrix}$$

Коэффициент детерминации

$$R^2=\frac{ESS}{TSS}= \quad 0,968955891$$

Коэффициент корреляции

$$R_{kor}^2 = 1-\frac{n-1}{n-k-1}\cdot(1-R^2) \quad 0,953433836$$

Вывод: Связь между Y и X сильная

Тест Стьюдента на значимость коэффициентов А1, А2

=СТЬЮДРАСПОБР(0,05;n-k-1=4)

$$S_e^2=\frac{RSS}{n-k-1} \approx 471,8705$$

$$t_{A_1}=\frac{A_1}{\sqrt{S_e^2 Z_{22}}} \approx 1,470927 < 2,776445$$ ***мало значим***

$$t_{A_2}=\frac{A_2}{\sqrt{S_e^2 Z_{33}}} \approx 6,569678 > 2,776445$$ ***значим***

t табл= 2,776445

=FРАСПОБР(0,05;k=2;n-k-1=4

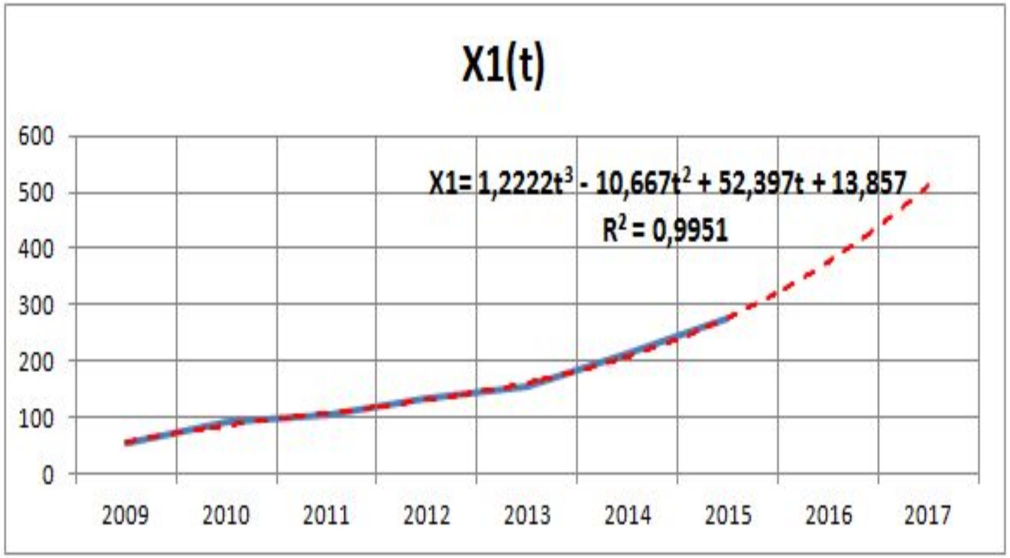
Тест Фишера

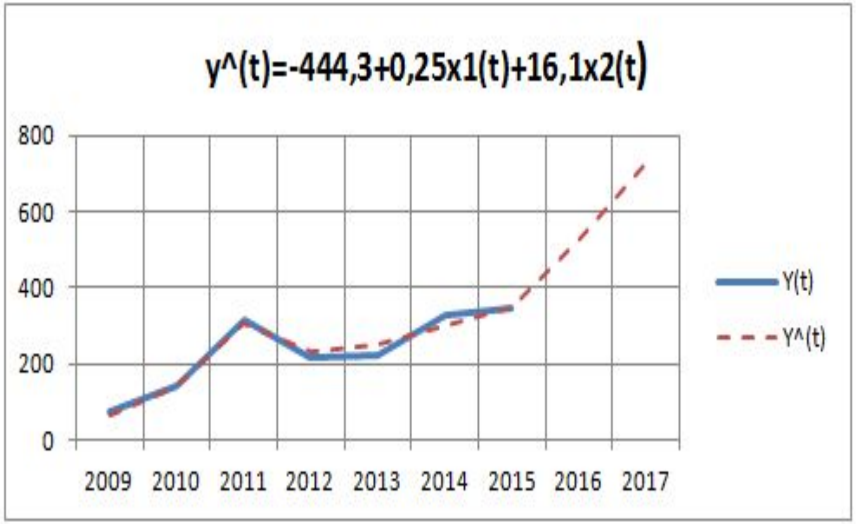
$$F=\frac{S_R^2}{S_e^2}=\frac{ESS}{RSS}\cdot\frac{n-k-1}{k}= \quad 62,42446 > F_{табл\,(0,05;2;4)} = 6,944272$$

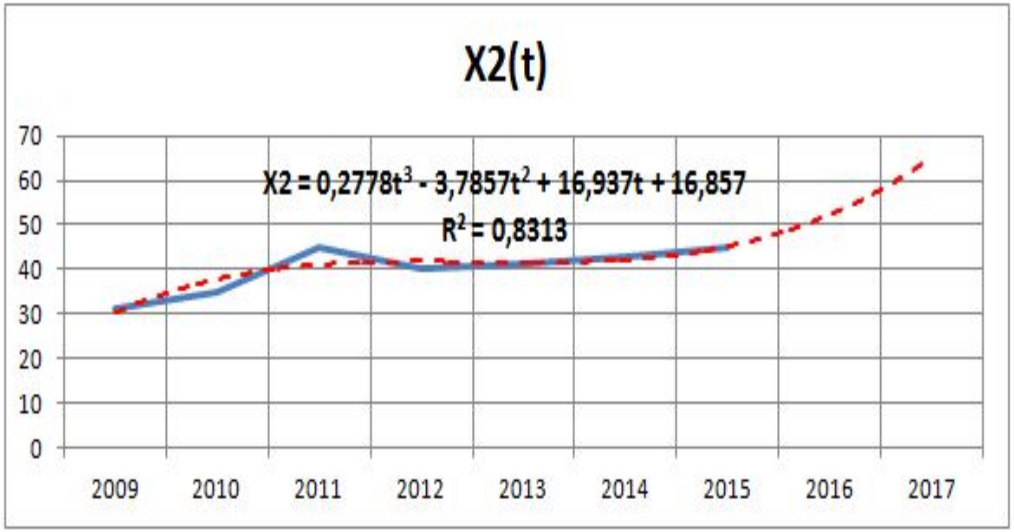
Вывод: Модель адекватна и надежна с вероятностью 0,95

Прогноз прибыли предприятия в 2016 и 2017 годах

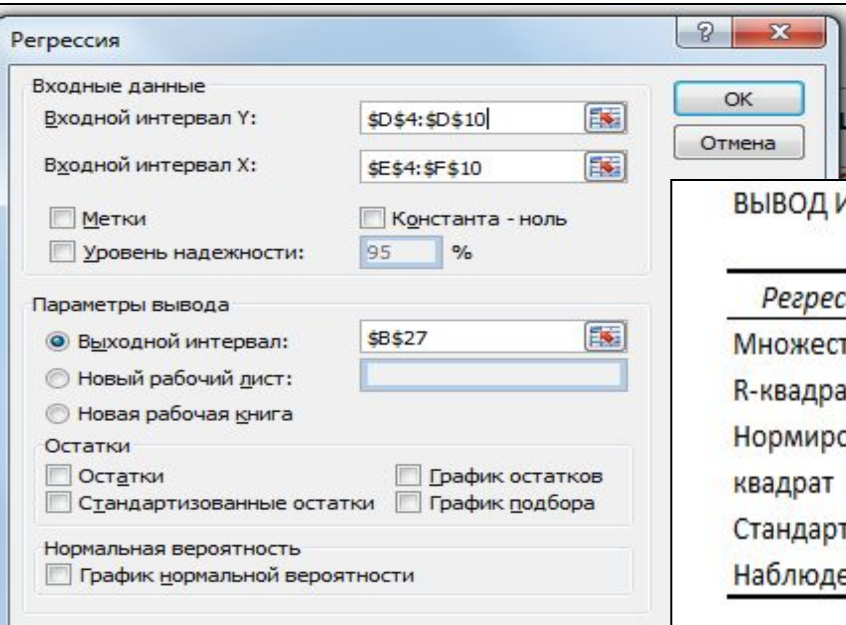
n	Год	Y	X1	X2	$\hat{Y}_i$
1	2009	75	55	31	67,51
2	2010	145	91	35	140,73
3	2011	315	103	45	304,40
4	2012	215	135	40	232,02
5	2013	225	155	41	253,06
6	2014	325	215	43	300,11
7	2015	345	275	45	347,17
8	2016		350	55	***526,50***
9	2017		510	65	***726,97***







Программа регрессия



ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,984356
R-квадрат	0,968956
Нормированный R-квадрат	0,953434
Стандартная ошибка	21,72258
Наблюдения	7

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	2	58912,52	29456,26	62,424461	0,000964
Остаток	4	1887,482	471,8705		
Итого	6	60800			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*
Y-пересечение	-444,287	82,06068	-5,41413	0,005639	-672,124	-216,45
Переменная X 1	0,248647	0,169041	1,470927	0,2152707	-0,22069	0,717981
Переменная X 2	16,0684	2,445842	6,569678	0,0027778	9,277649	22,85914

Анализ влияния факторных переменных на результат

I	J	K	L	M	N	O	P	Q
N	Y	X1	X2	X1^2	X2^2	Y^2	Y*X1	Y*X2
1	50	30	6	900	36	2500	1500	300
2	120	66	10	4356	100	14400	7920	1200
3	290	78	20	6084	400	84100	22620	5800
4	190	110	15	12100	225	36100	20900	2850
5	200	130	16	16900	256	40000	26000	3200
6	300	190	18	36100	324	90000	57000	5400
7	320	250	20	62500	400	102400	80000	6400
Среднее	210	122	15	19848,57143	248,7143	52785,71	30848,57	3592,857
Сред^2	44100	14884	225					

коэффициенты эластичности

$$E_1 = \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot \frac{\bar{x}_1}{\bar{y}} = a_1 \cdot \frac{\bar{x}_1}{\bar{y}} = 0,249 \cdot \frac{122}{210} = 0,14$$

$$E_2 = \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot \frac{\bar{x}_2}{\bar{y}} = a_2 \cdot \frac{\bar{x}_2}{\bar{y}} = 16,07 \cdot \frac{15}{210} = 1,15$$

A1=	0,249
A2=	16,07

Это означает, что при увеличении вложений в оборотный капитал на 1% (фактор X1) и неизменной величине вложений в основной капитал прибыль предприятий возрастет на 0,14%. При увеличении вложений в основной капитал (фактор X2) на 1% прибыль возрастет на 1,15%, те <u>инвестиционные вложения в основной капитал более значимы для предприятий.</u>

Анализ влияния факторных переменных на результат

I	J	K	L	M	N	O	P	Q
N	Y	X1	X2	X1^2	X2^2	Y^2	Y*X1	Y*X2
1	50	30	6	900	36	2500	1500	300
2	120	66	10	4356	100	14400	7920	1200
3	290	78	20	6084	400	84100	22620	5800
4	190	110	15	12100	225	36100	20900	2850
5	200	130	16	16900	256	40000	26000	3200
6	300	190	18	36100	324	90000	57000	5400
7	320	250	20	62500	400	102400	80000	6400
Среднее	210	122	15	19848,57143	248,7143	52785,71	30848,57	3592,857
Сред^2	44100	14884	225					

β ***– коэффициенты***

$$S^2_{X_1} = \overline{X_1^2} - (\overline{X_1})^2 = 19848,57 - 122^2 = 4964,57 \qquad S_{X_1} = 70,46;$$

$$S^2_{X_2} = \overline{X_2^2} - (\overline{X_2})^2 = 248,71 - 15^2 = 23,71 \qquad S_{X_2} = 4,87;$$

$$S^2_Y = \overline{Y^2} - (\overline{Y})^2 = 52785,71 - 210^2 = 8685,71 \qquad S_Y = 93,2$$

$$\beta_1 = \frac{a_1 \cdot S_{X_1}}{S_Y} = \frac{0,249 \cdot 70,46}{93,2} = 0,19 \qquad 0,188$$

$$\beta_2 = \frac{a_2 \cdot S_{X_2}}{S_Y} = \frac{16,07 \cdot 4,87}{93,2} = 0,84 \qquad 0,84$$

коэффициент показывает, на какую часть величины среднеквадратичного отклонения изменится в среднем значение зависимой переменной при изменении факторного признака на величину его среднеквадратичного отклонения.

Анализ влияния факторных переменных на результат

I	J	K	L	M	N	O	P	Q
N	Y	X1	X2	X1^2	X2^2	Y^2	Y*X1	Y*X2
1	50	30	6	900	36	2500	1500	300
2	120	66	10	4356	100	14400	7920	1200
3	290	78	20	6084	400	84100	22620	5800
4	190	110	15	12100	225	36100	20900	2850
5	200	130	16	16900	256	40000	26000	3200
6	300	190	18	36100	324	90000	57000	5400
7	320	250	20	62500	400	102400	80000	6400
Среднее	210	122	15	19848,57143	248,7143	52785,71	30848,57	3592,857
Сред^2	44100	14884	225					

Δ ***- коэффициенты :***

Δ **коэффициент Дельта– характеризует вклад каждого фактора в суммарное влияние на результирующий показатель (при условии независимости факторов)**

$$R_{Y,X_1} = \frac{\overline{YX_1} - \bar{Y}\,\bar{X}_1}{S_Y \cdot S_{X_1}} = \frac{30848,57 - 210 \cdot 122}{93,2 \cdot 70,46} = 0,796$$

$$R_{Y,X_2} = \frac{\overline{YX_2} - \bar{Y}\,\bar{X}_2}{S_Y \cdot S_{X_2}} = \frac{3592,86 - 210 \cdot 15}{93,2 \cdot 4,87} = 0,976$$

$$\Delta_j = r_{YX_j} \cdot \beta_j \Big/ R^2$$

R^2=	0,969

$$\Delta_1 = \frac{0,796 \cdot 0,19}{0,969} = 0,154$$

$$\Delta_2 = \frac{0,976 \cdot 0,84}{0,969} = 0,846$$

Два этапа отбора факторов:

- исходя из сущности проблемы;
- на основе корреляционной матрицы и t-статистики параметров регрессии

1) Проверка парной корреляции.

Принцип исключения факторов:

- Если две переменные явно коллинеарны ($r_{x_i x_j} \geq 0,7$), то одну из них исключаем.
- Включаем фактор, имеющий наименьшую тесноту связи с другими факторами

2) Оценка мультиколлинеарности факторов (когда более, чем два фактора связаны между собой линейной зависимостью):

- Проверка гипотезы H_0: $|R| = |(r_{x_i x_j})| = 1,$

R – матрица коэффициентов корреляции.

Чем ближе к 1 определитель матрицы межфакторной корреляции, тем меньше мультиколлинеарность факторов

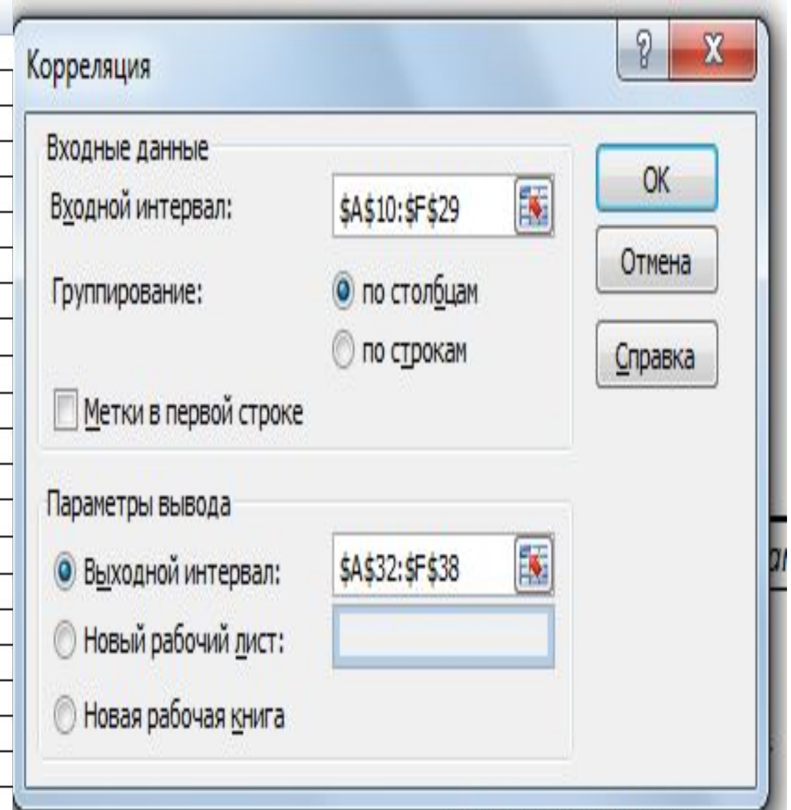
Вычисление коэффициента корреляции

n	Y	X	(Yi-my)^2	(Xi-my)^2	Yi x Xi
1	266,00	188,00	18,63	3,39	50008,00
2	265,00	204,00	10,99	318,34	54060,00
3	263,00	200,00	1,73	191,60	52600,00
4	279,00	175,00	299,84	124,50	48825,00
5	283,00	178,00	454,36	66,55	50374,00
6	273,00	173,00	128,05	173,13	47229,00
7	232,00	169,00	881,15	294,39	39208,00
8	264,00	201,00	5,36	220,29	53064,00
9	229,00	166,00	1068,26	406,34	38014,00
10	244,00	175,00	312,73	124,50	42700,00
11	251,00	186,00	114,15	0,02	46686,00
12	247,00	191,00	215,63	23,45	47177,00
13	219,00	158,00	1821,94	792,87	34602,00
14	264,00	201,00	5,36	220,29	53064,00
15	288,00	220,00	692,52	1145,29	63360,00
16	297,00	210,00	1247,20	568,45	62370,00
17	264,00	159,00	5,36	737,55	41976,00
18	303,00	189,00	1706,99	8,08	57267,00
19	241,00	194,00	427,84	61,50	46754,00
20	309,00	209,00	2238,78	521,76	64581,00
	$m_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$	$m_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - m_y)^2}{n}$	$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m_x)^2}{n}$	$m_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
Среднее	261,68	186,16	495,69	288,45	48912,53

$$KR = \frac{m_{xy} - m_x m_y}{\sigma_x \sigma_y}$$ 0,523485133

Вычисление коэффициента корреляции в Excel

	A	B	C	D	E	F
8						
9	**Y**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**
10	266	188	68	87	57	34
11	265	204	71	91	48	28
12	263	200	69	84	49	26
13	279	175	64	91	60	39
14	283	178	80	83	66	42
15	273	173	81	85	65	40
16	232	169	81	86	54	29
17	264	201	78	92	55	32
18	229	166	68	82	47	22
19	244	175	59	82	49	26
20	251	186	75	92	52	28
21	247	191	75	85	47	26
22	219	158	46	90	42	18
23	264	201	74	92	54	33
24	288	220	93	91	65	42
25	297	210	98	92	72	48
26	264	159	67	92	54	31
27	303	189	93	88	77	52
28	241	194	62	92	51	27
29	309	209	88	87	50	54



32		*Столбец 1*	*Столбец 2*	*Столбец 3*	*Столбец 4*	*Столбец 5*	*Столбец 6*
33	Столбец 1	1,00					
34	Столбец 2	0,58	1,00				
35	Столбец 3	0,75	0,59	1,00			
36	Столбец 4	0,17	0,32	0,08	1,00		
37	Столбец 5	0,72	0,24	0,73	0,12	1,00	
38	Столбец 6	0,94	0,45	0,80	0,11	0,79	1,00

Пример исключения факторов:

R(Y,Xi) Главный определитель=0,097						
	Y	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Y	1,00	0,58	0,62	0,17	0,72	0,94
X_1	0,58	1,00	0,14	0,32	0,24	0,45
X_2	0,62	0,14	1,00	-0,08	0,60	0,75
X_3	0,17	0,32	-0,08	1,00	0,12	0,11
X_4	0,72	0,24	0,60	0,12	1,00	0,79
X_5	0,94	0,45	0,75	0,11	0,79	1,00

R(Y,Xi) Главный определитель=0,52						
	Y	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Y	1,00	0,58	0,62	0,17	0,72	0,94
X_1	0,58	1,00	0,14	0,32	0,24	0,45
X_2	0,62	0,14	1,00	-0,08	0,60	0,75
X_3	0,17	0,32	-0,08	1,00	0,12	0,11
X_4	0,72	0,24	0,60	0,12	1,00	0,79
X_5	0,94	0,45	0,75	0,11	0,79	1,00

R(Y,Xi) Главный определитель=0,86					
	Y	X_1	X_2	X_3	X_4
Y	1,00	0,58	0,62	0,17	0,72
X_1	0,58	1,00	0,14	0,32	0,24
X_2	0,62	0,14	1,00	-0,08	0,60
X_3	0,17	0,32	-0,08	1,00	0,12
X_4	0,72	0,24	0,60	0,12	1,00

Авторегрессионные модели

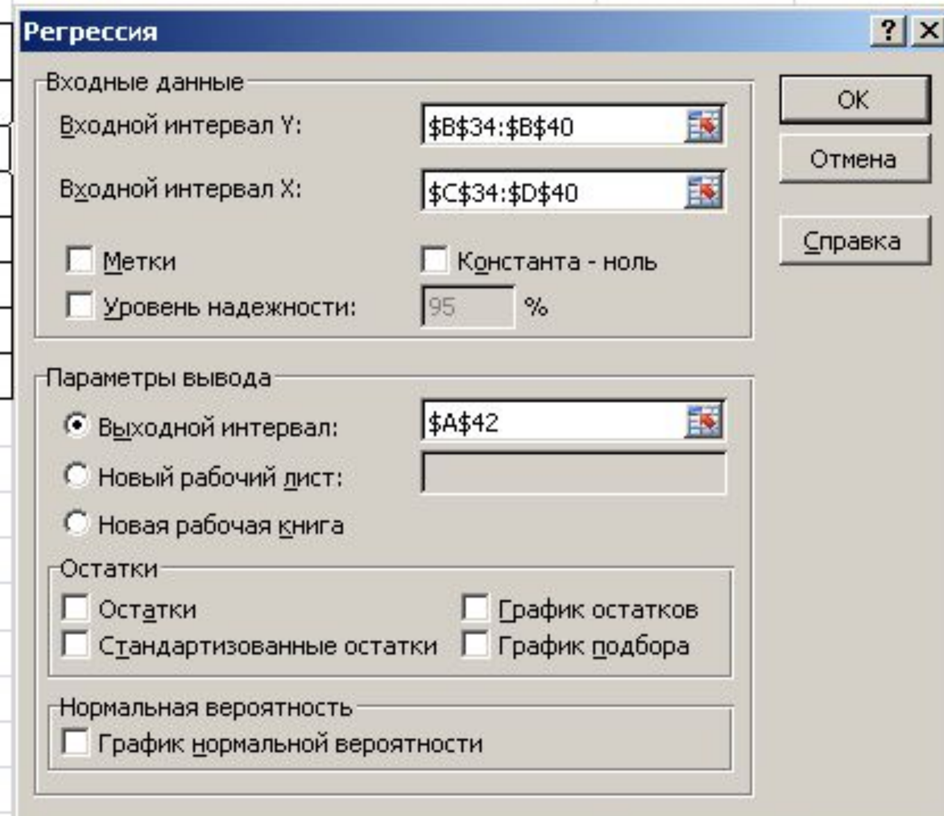
$$\bar{y}_t = b_0 + b_1 y_{t-1} + b_2 y_{t-2} + \dots$$

A42

Прогноз прибыли ООО "Звезда" с учетом авторегрессии 2-го порядка

Год	y_t	y_{t-1}	y_{t-2}
2009	40325	16828	13146
2010	73454	40325	16828
2011	80256	73454	40325
2012	115343	80256	73454
2013	109730	115343	80256
2014	141050	109730	115343
2015	126610	141050	109730

	Коэфф	*P-Значение*
b0	46015,04215	0,014499034
b1	0,031405676	0,92477955
b2	0,77166769	0,077501181



Прогноз прибыли ООО "Звезда" с учетом авторегрессии 1-го порядка

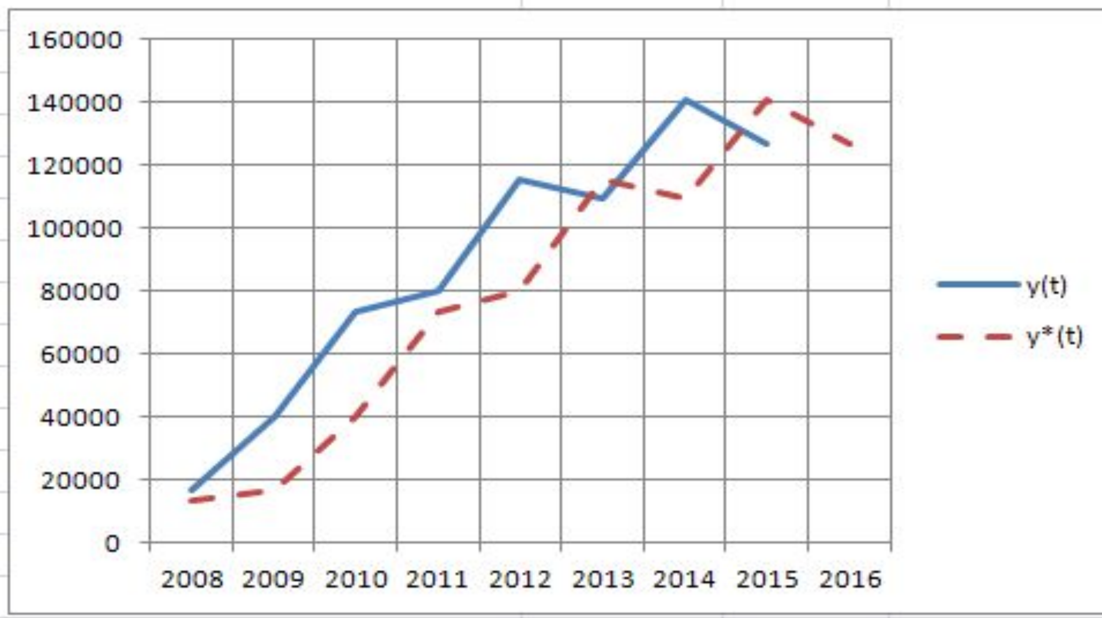
Год	y_t	y_{t-1}	$\bar{y}_t$	$\delta = \frac{\lvert\bar{y}_t - y_t\rvert}{y_t} \times 100\%$	$\bar{y}_t - y_t$	f_1
2008	16828	13146	37112,60734	120,540809	20284,60734	1
2009	40325	16828	40200,36542	0,309075213	-124,6345795	0
2010	73454	40325	59905,15946	18,44534068	-13548,84054	0
2011	80256	73454	87687,43471	9,259662467	7431,434709	1
2012	115343	80256	93391,65265	19,03136501	-21951,34735	0
2013	109730	115343	122815,9242	11,92556656	13085,92419	1
2014	141050	109730	118108,8123	16,26457833	-22941,18773	0
2015	126610	141050	144374,044	14,03052205	17764,04396	1
2016		**126610**	**132264,531**	$\Leftarrow \quad \bar{y}_t = b_0 + b_1 y_{t-1}$		

	Коэфф	*P-Знач*
b0	26088,25434	0,091708978
b1	0,83860893	0,001454096

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,914699
R-квадрат	0,836675
Нормированный R-к	0,809454
Стандартная ошибка	18908,73
Наблюдения	8

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*ачимость F*
Регрессия	1	1,1E+10	1,1E+10	30,73647	0,001454
Остаток	6	2,15E+09	3,58E+08		
Итого	7	1,31E+10			

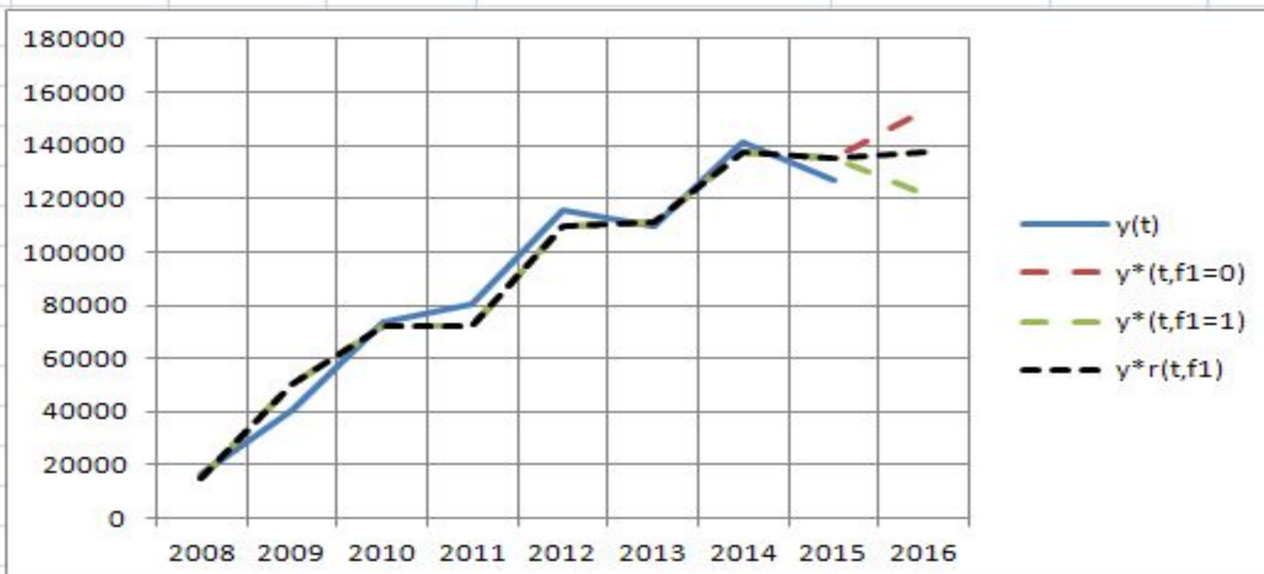


Прогноз прибыли ООО "Звезда" с учетом одного скрытого фактора

Год	y_t	y_{t-1}	f_1	$\overline{y}_t$	$\delta = \frac{\lvert\overline{y}_t - y_t\rvert}{y_t} \times 100\%$	$\overline{y}_t - y_t$	f_2
2008	16828	13146	1	15433,26	8,288185046	-1394,735779	0
2009	40325	16828	0	50483,9	25,19255502	10158,89781	1
2010	73454	40325	0	72466,42	1,344488622	-987,5806727	0
2011	80256	73454	1	71854,17	10,46879351	-8401,83492	0
2012	115343	80256	0	109823,7	4,785117594	-5519,298186	0
2013	109730	115343	1	111043,2	1,196797956	1313,246397	1
2014	141050	109730	0	137398	2,589166221	-3652,018954	0
2015	126610	141050	1	135093,3	6,700358821	8483,324303	1
2016		126610	0	153190			
2016		126610	1	121584			
2016		p=	0,5	137387	y*r(t,f1)=0,5x[y*(t,f1=0)+(y*(t,f1=1)]		

$$\overline{y}_t = b_0 + b_1 y_{t-1} + i_1 f_1$$

	Коэфф	P-Знач
b0	34740,532	0,001462
b1	0,9355459	2,65E-05
i1	-31605,95	0,002491

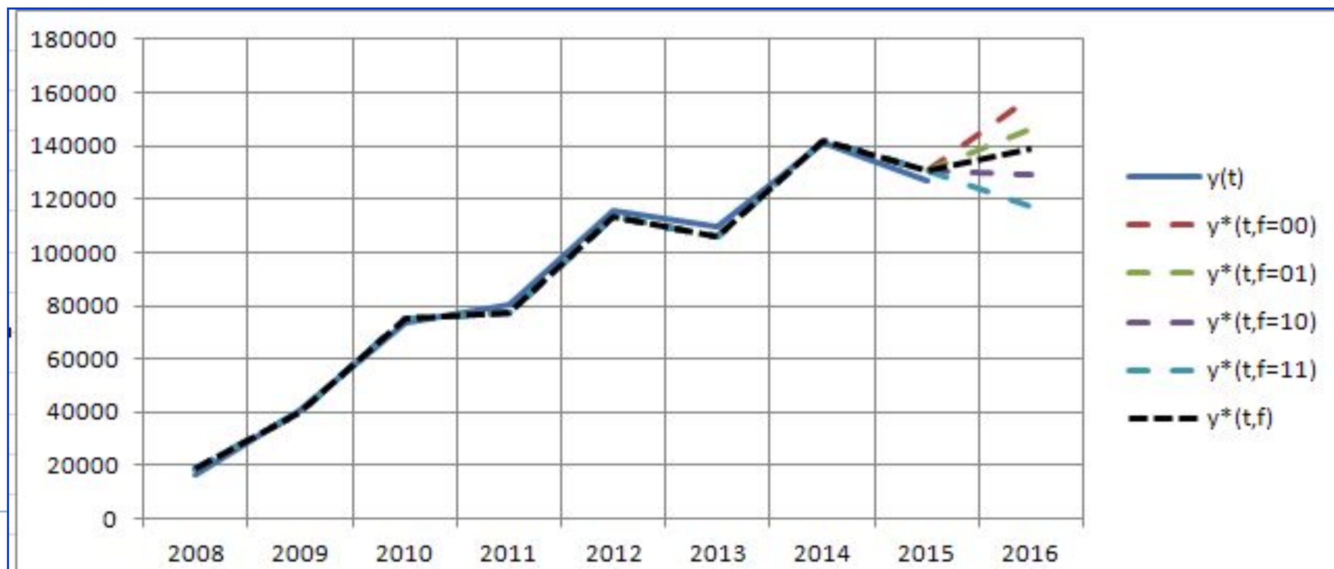


Прогноз прибыли ООО "Звезда" с учетом двух скрытых факторов

Год	y_t	y_{t-1}	f_1	f_2	Nv	$\bar{y}_t$	$\delta = \frac{\lvert \bar{y}_t - y_t \rvert}{y_t} \times 100\%$
2008	16828	13146	1	0	3	19080,58548	13,38593699
2009	40325	16828	0	1	2	39847,67337	1,183699025
2010	73454	40325	0	0	1	74788,32017	1,816538474
2011	80256	73454	1	0	3	77526,08789	3,401505319
2012	115343	80256	0	0	1	113486,1274	1,609870235
2013	109730	115343	1	1	4	105952,1192	3,442887857
2014	141050	109730	0	0	1	142049,8791	0,708882727
2015	126610	141050	1	1	4	130865,2075	3,360877875
2016		126610	0	**0**	0,375	158408,5725	
2016		126610	0	**1**	0,125	146239,2656	
2016		126610	1	**0**	0,25	129040,4662	
2016		126610	1	**1**	0,25	116871,1593	
2016						139161,0293	

$$\bar{y}_t = b_0 + b_1 y_{t-1} + i_1 f_1 + i_2 f_2$$

	Коэфф	P-Значение
b0	35708,68091	0,00015745
b1	0,969116907	6,0529E-06
i1	-29368,10628	0,00039523
i2	-12169,30684	0,01216809



Динамическое программирование **– раздел математического программирования, посвященный исследованию многошаговых задач принятия оптимальных решений. При этом многошаговость задачи отражает реальное протекание процесса принятия решений во времени, либо вводится в задачу искусственно за счет расчленения процесса принятия однократного решения на отдельные этапы, шаги. Цель такого представления состоит в сведении исходной задачи высокой размерности к задаче меньшей размерности**

В основе метода ДП лежит принцип оптимальности, впервые сформулированный в 1953 г. американским математиком Р.Э. Беллманом:

Каково бы ни было состояние системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая выигрыш на данном шаге.

Общая постановка задачи

1. Рассматривается система *S*, состояние которой на каждом шаге (этапе) t $(t = \overline{1, N})$ определяется вектором

$$S_t = (s_{t1}, s_{t2}, \ldots, s_{ti}, \ldots, s_{tn}),$$

где s_{ti} — одно из возможных состояний системы на шаге *t*. Дальнейшее изменение ее состояния зависит только от данного состояния S_t и не зависит от того, каким путем система пришла в него. Такие процессы называются ***марковскими*** процессами без последствия.

2. На каждом шаге выбирается одно решение из вектора

$$X_t = (x_{t1}, x_{t2}, \ldots, x_{ti}, \ldots, x_{tn}),$$

под действием которого система переходит из предыдущего состояния S_{t-1} в новое S_t, где x_{ti} — одно из возможных решений на этапе *t*. Очевидно, оно будет функцией $S_t = S_t(S_{t-1}, X_t)$.

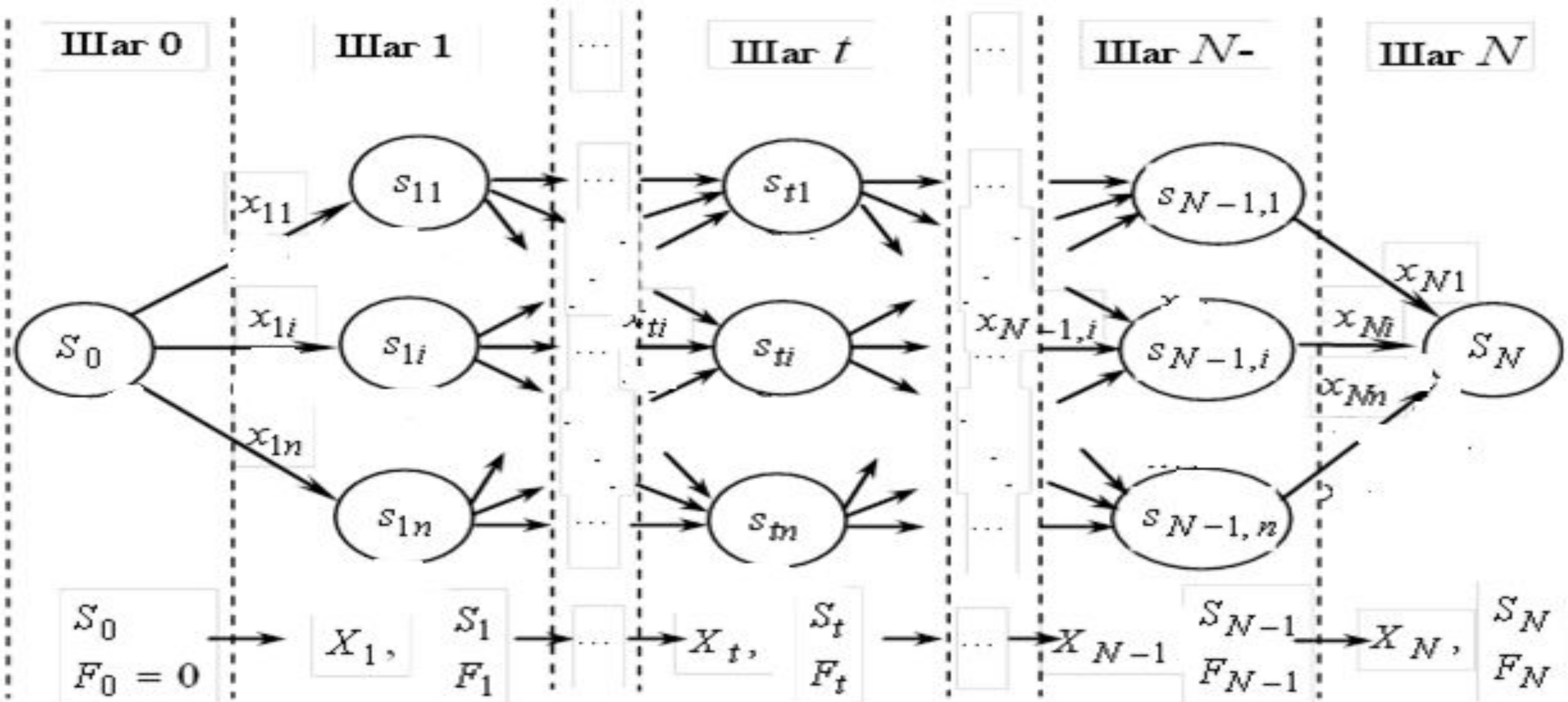
3. Выбор решения x_{ti} на каждом шаге *t* связан с целевой функцией управления на данном шаге z_t. Состояние системы S_t на каждом шаге может быть оценено через целевую функцию эффективности (или потерь) системы $F_t(S_t)$, равную сумме целевых функций управления этапов:

$$F_t(S_t) = \sum_{k=1}^{t} z_k.$$

4. На векторы состояния S_t и управления X_t накладываются ограничения, объединение которых составляет область допустимых решений Ω задачи ДП

$$(S_t \cap X_t) \in \Omega$$

5. Требуется найти такое допустимое управление X_t для каждого шага $t=\overline{1,N}$, чтобы получить экстремальное значение функции цели системы $F_N(S_N)$ за N шагов.



Процесс изменения состояний системы

Определения

Любую допустимую последовательность действий для каждого шага, переводящую систему из начального состояния в конечное , называют ***стратегией управления***. Допустимая стратегия управления, доставляющая функции цели экстремальное значение, называется ***оптимальной***

Общая вычислительная схема

Вычислительная схема метода динамического программирования предусматривает анализ этапов дважды. Первый раз — от конца к началу (по алгоритму обратной прогонки). Генерируются все возможные траектории из начального состояния в конечное. На каждом шаге движения ищется условно-оптимальное управление и экстремальное значение функции цели для процесса. Второй раз — от начала к концу. Из полученных траекторий на каждом шаге выбирается наилучшая, определяя оптимальное управление с точки зрения всего процесса

Условная оптимизация. На первом этапе решения задачи, называемом условной оптимизацией, определяются функция Беллмана и оптимальные управления для всех возможных состояний на каждом шаге, начиная с последнего в соответствии с алгоритмом обратной прогонки.

На последнем, *n*-м, шаге оптимальное управление определяется функцией Беллмана:

$$F_n(S) = \max\{\varphi(S_n, x_n)\}, x_n \in X$$

в соответствии с которой максимум (минимум) выбирается из всех возможных значений x_n, причем $x_n \in X$.

Дальнейшие вычисления проводятся согласно рекуррентному соотношению, связывающему функцию Беллмана на каждом шаге с этой же функцией, но вычисленной на предыдущем шаге.

В общем виде это соотношение имеет вид

$$F_k(S) = \max\{\varphi(S_k, x_k) + F_{k+1}(f(S_k, x_k))\}, x_k \in X$$

Этот максимум (или минимум) определяется по всем возможным для k и S значениям переменной управления $x_k \in X$

Безусловная оптимизация. После того как функция Беллмана и соответствующие оптимальные управления найдены для всех шагов, осуществляется второй этап решения задачи, называемый безусловной оптимизацией, проводимой в обратном порядке. Цель определить $x^*_n \in X$.

2. Построение оптимальной последовательности операций в коммерческой деятельности

Пусть на оптовую базу прибыло *n* машин с товаром для разгрузки и *m* машин для загрузки товаров, направляемых в магазины.

Материально ответственное лицо оптовой базы осуществляет оформление документов по операциям разгрузки или загрузки для одной машины, а затем переходит к обслуживанию другой машины. Издержки от операций обусловлены простоем транспорта, типом операции (прием или отправка товара) и не зависят от конкретной машины.

Необходимо спланировать последовательность операций обоих видов таким образом, чтобы, **суммарные издержки по приему и отправке товаров для всех машин бы ли минимальными**.

Пример.

Пусть *n* = 6, *m* = 4.

Известны затраты по выполнению каждой операции, которые показаны на ребрах графа.

Точка S_0 определяет начало процесса,

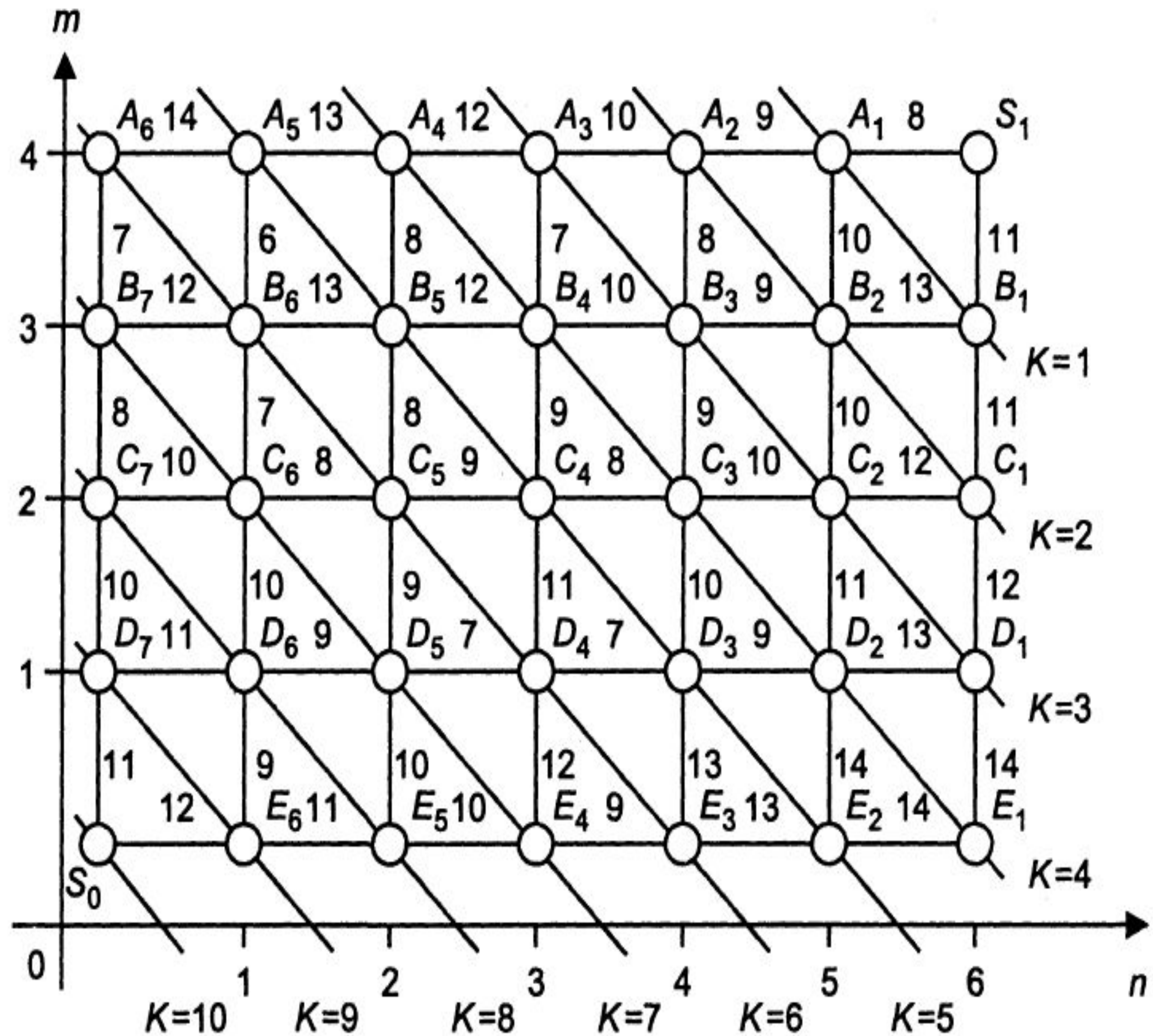
S_1— конечное состояние, соответствующее приему и отправке всех машин.

Оптимизацию процесса будем производить с конечного состояния — S1

Весь процесс разобьем на шаги, их количество

к = n + m = 6 + 4= 10.

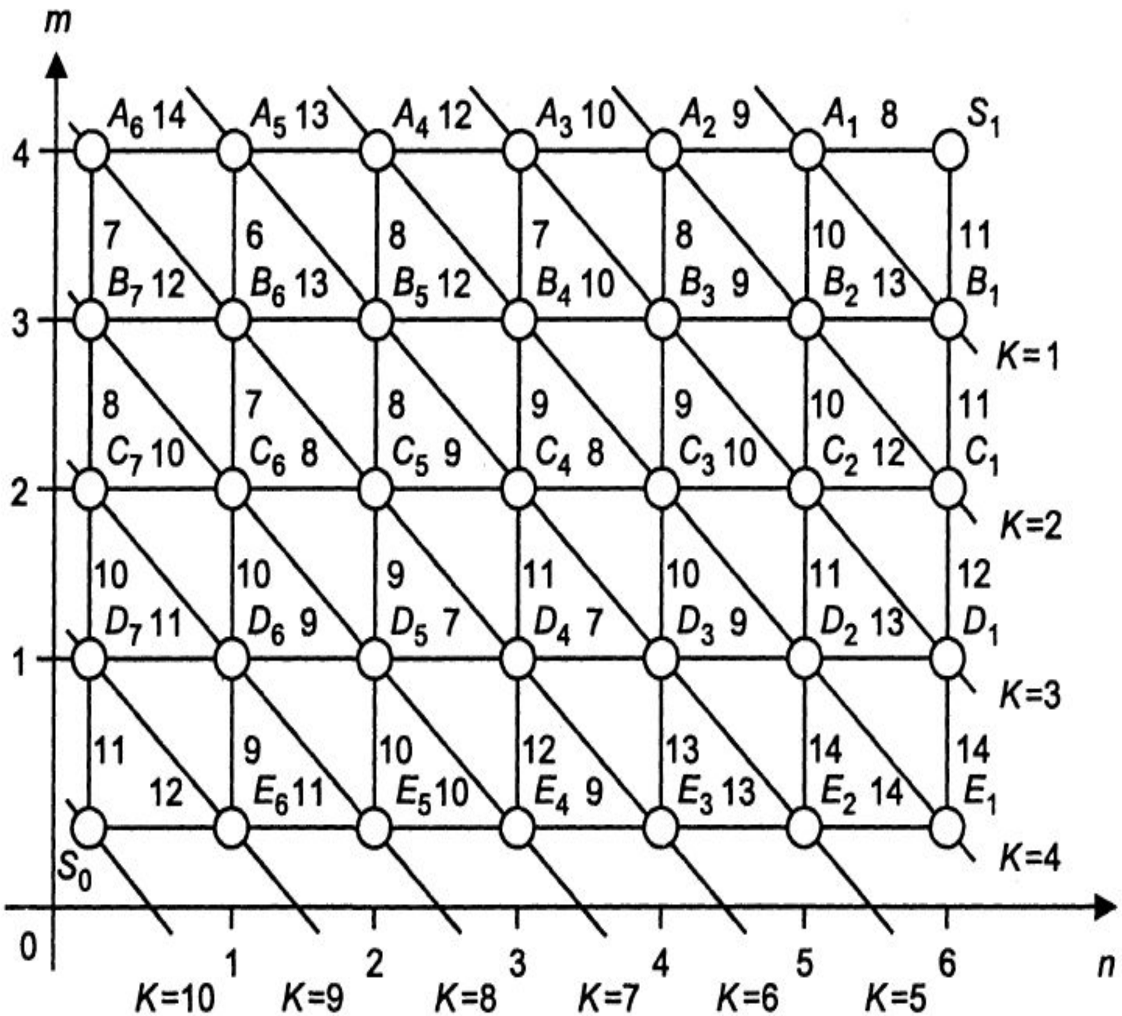
Каждый шаг представляет собой сечение графа состояний, проходящее через вершины сечения показаны косыми линиями.

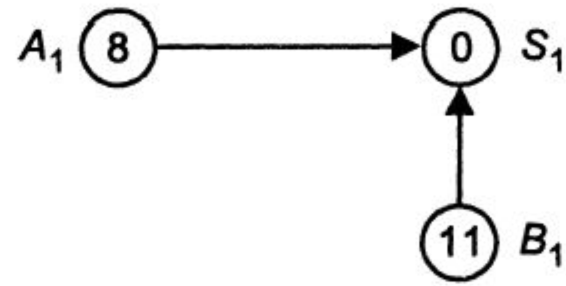


Nx = 16 777 216

1 этап. Условная оптимизация

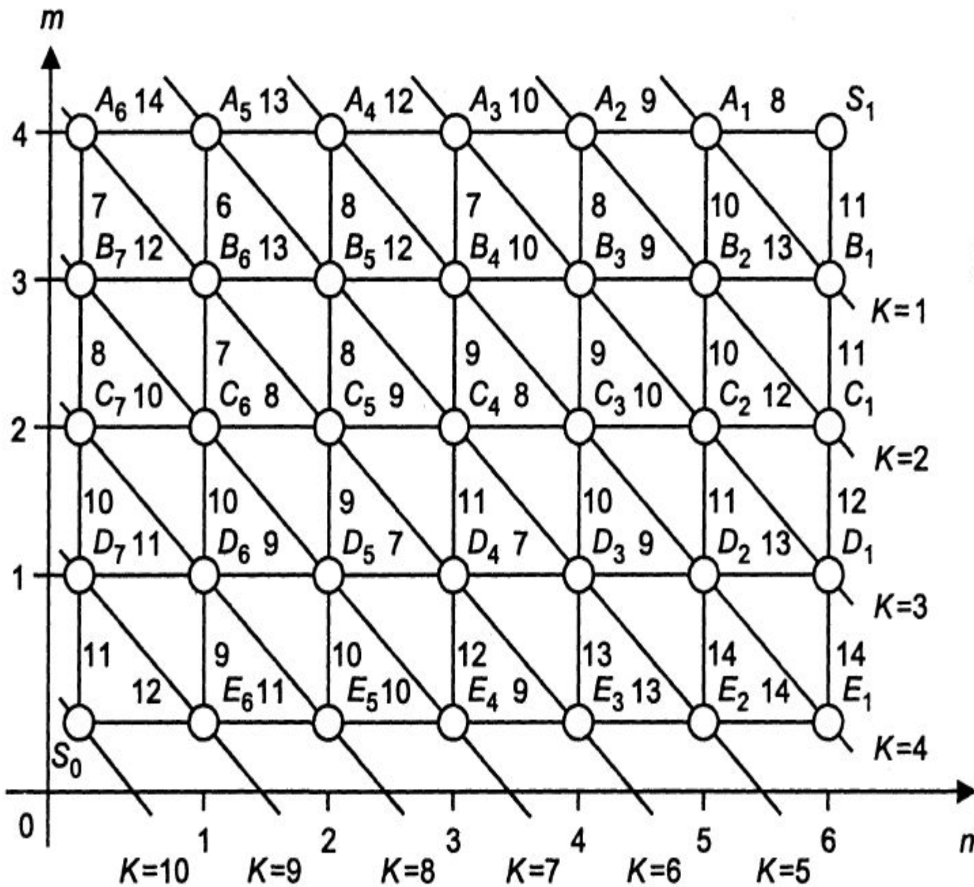
Шаг №1

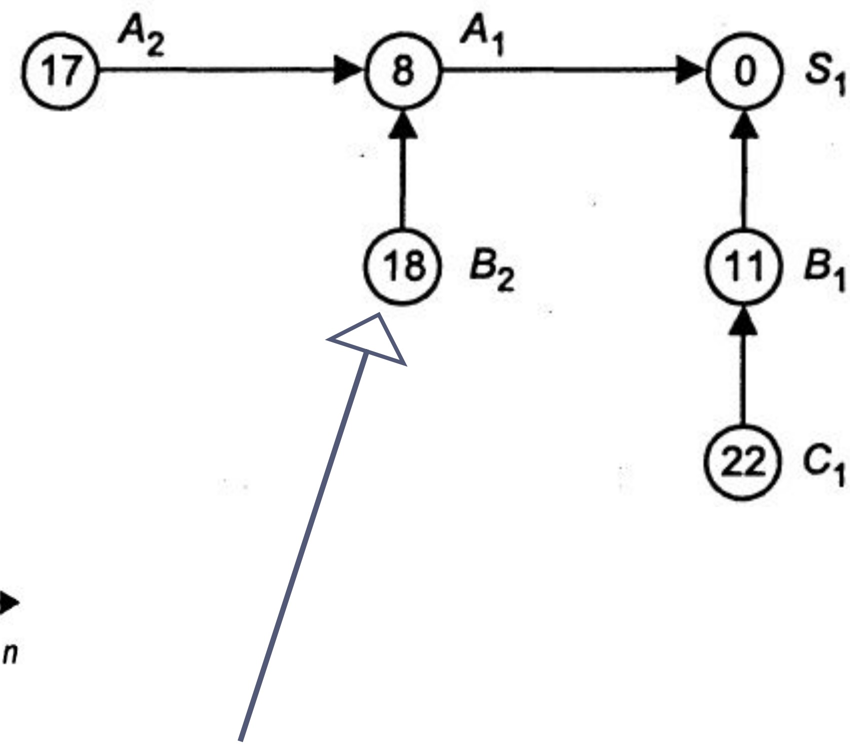




1 этап. Условная оптимизация

<u>Шаг №2</u>

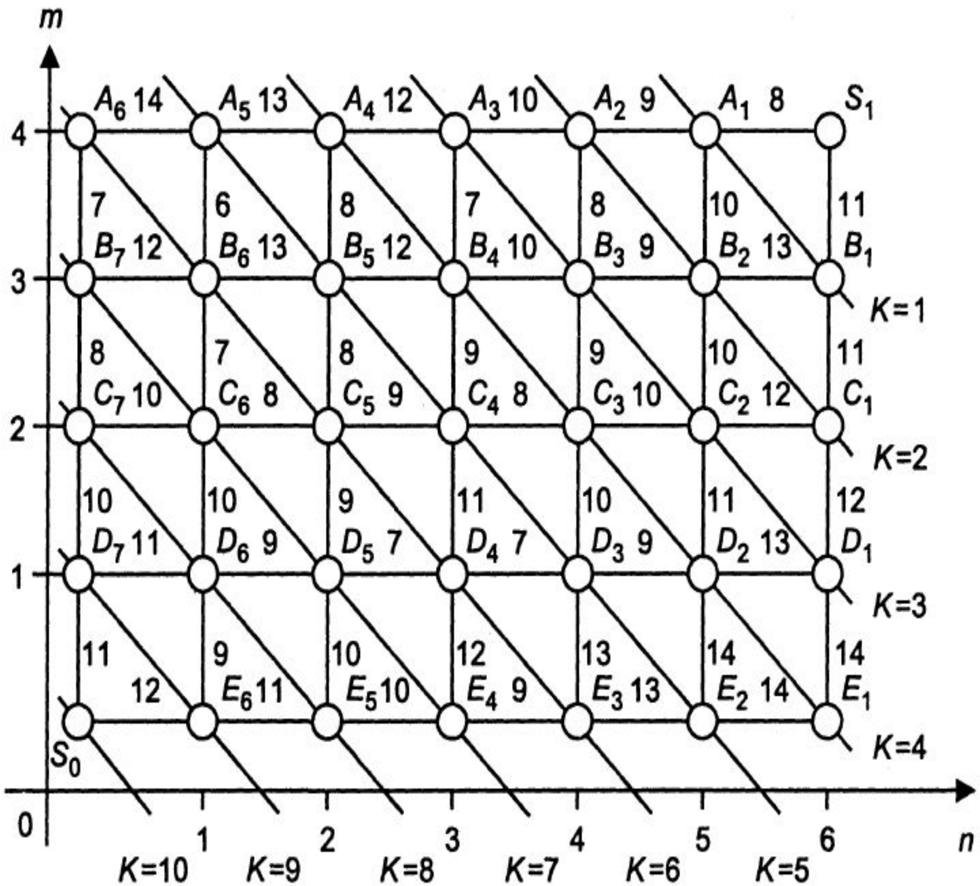


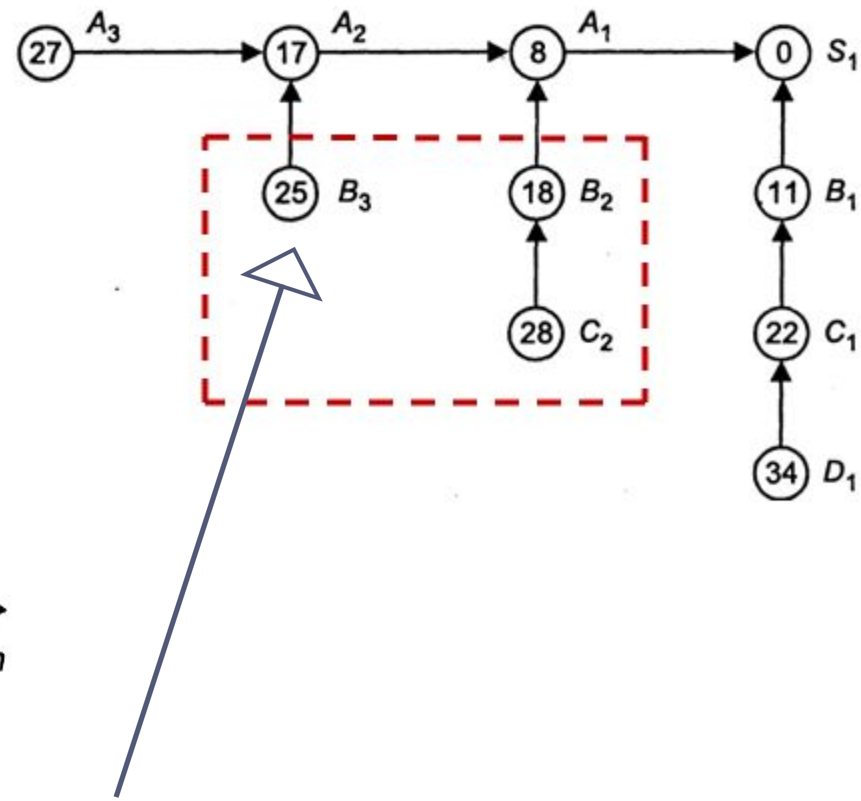


$$F_2(B_2) = \min\{F_1(A_1) + d(A_1, B_2), F_1(B_1) + d(B_1, B_2)\}$$

1 этап. Условная оптимизация

Шаг №3

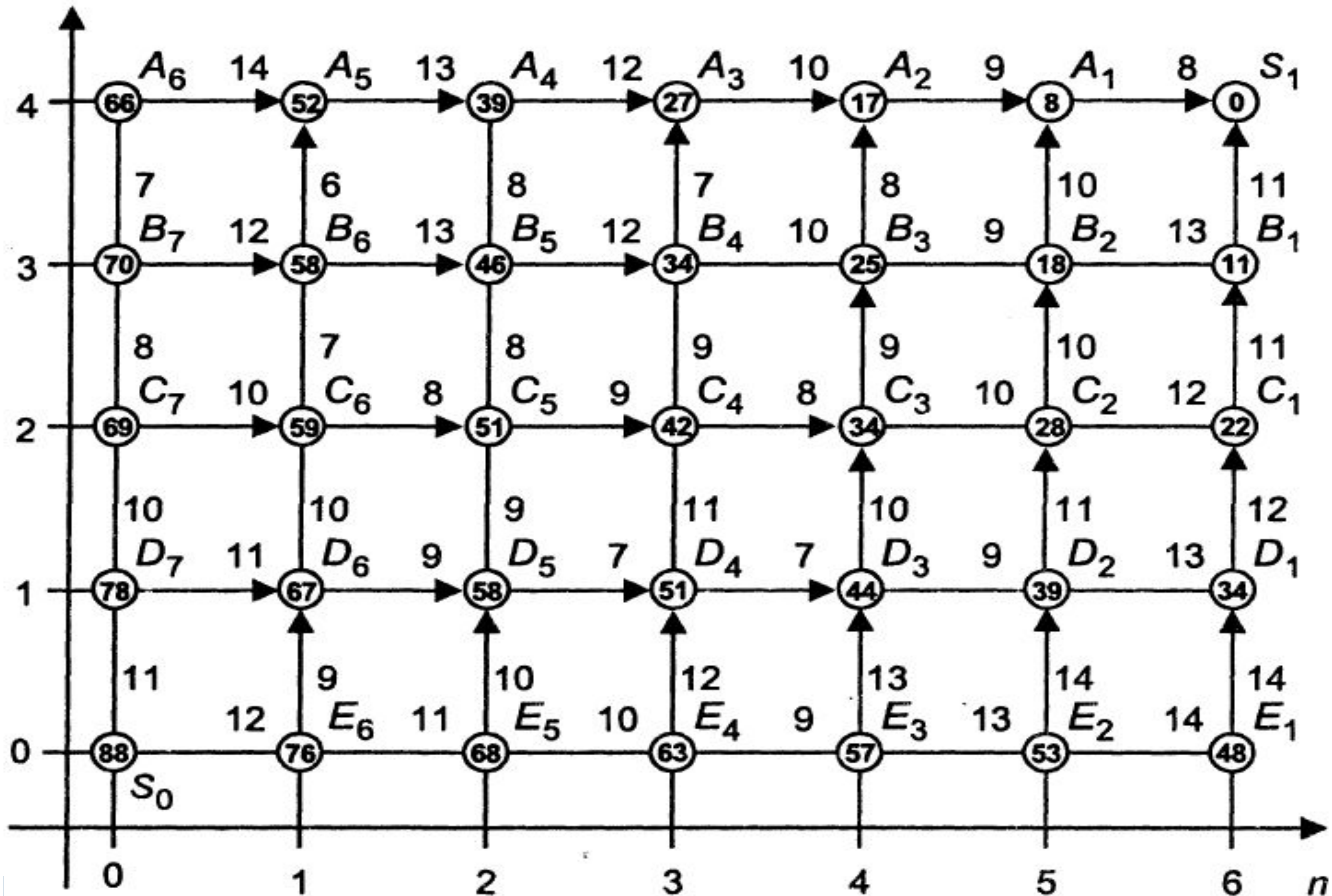




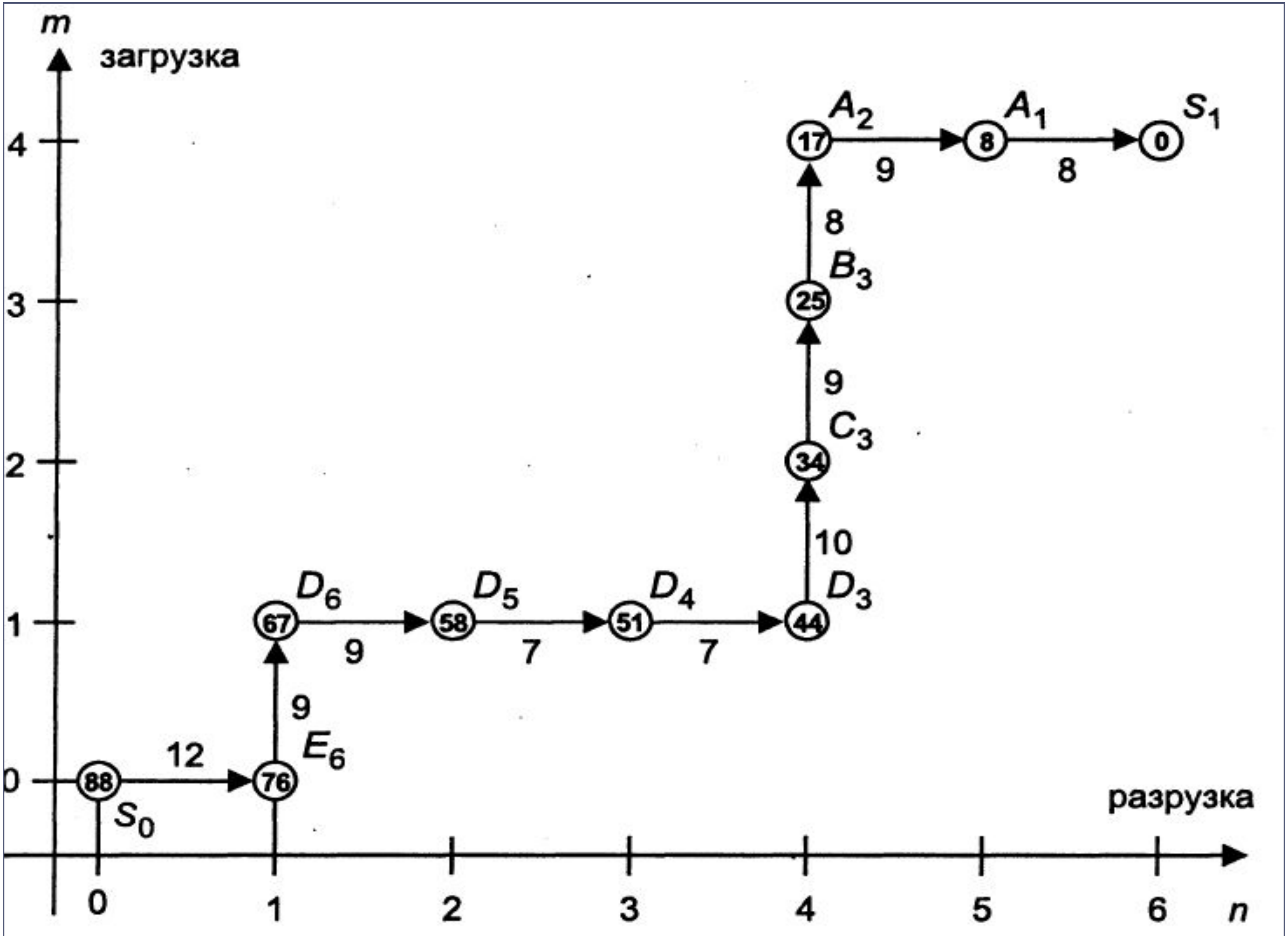
$$F_3(B_3) = \min\{F_2(A_2) + d(A_2, B_3), F_2(B_2) + d(B_2, B_3)\}$$

1 этап. Условная оптимизация

Шаг №10



2 этап. Безусловная оптимизация (поиск оптимальной траектории)



2. Задача о рюкзаке

Задача

Грузовой пароход должен загрузиться предметами четырех различных типов. Характеристики веса и стоимости каждого предмета показаны в таблице.

Тип j	Вес wj (тонн)	Стоимость cj (тыс. руб.)
1	5	150
2	3	97
3	2	65
4	1	30

Определить план погрузки, обеспечивающий максимальную стоимость груза, если его суммарный вес не должен превышать 13 тонн.

Формализация

$x_1 -$ количество предметов $1-$ го типа

$x_2 -$ количество предметов $2-$ го типа

$x_3 -$ количество предметов $3-$ го типа

$x_4 -$ количество предметов $4-$ го типа

$$Z(x) = 150x_1 + 97x_2 + 65x_3 + 30x_4 \to max$$

$$5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 13$$

$$x_j \geq 0; Z_k = 0 \to S_k \leq w_k.\ k = 1 \div 4$$

Условная оптимизация

x4: w=1; c=30; Z(x)=?

S4\N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Z(x)
0	0														0
1	0	30													30
2	0	30	60												60
3	0	30	60	90											90
4	0	30	60	90	120										120
5	0	30	60	90	120	150									150
6	0	30	60	90	120	150	180								180
7	0	30	60	90	120	150	180	210							210
8	0	30	60	90	120	150	180	210	240						240
9	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270					270
10	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300				300
11	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330			330
12	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360		360
13	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360	390	390

x3: w=2; c=65; Z(x)=?

S3\N		1	2	3	4	5	6	Z(x)
0	0							0
1	0							0
2	0	65						65
3	0	95						95
4	0	125	130					130
5	0	155	160					160
6	0	185	190	195				195
7	0	215	220	225				225
8	0	245	250	255	260			260
9	0	275	280	285	290			290
10	0	305	310	315	320	325		325
11	0	335	340	345	350	355		355
12	0	365	370	375	380	385	390	390
13	0	395	400	405	410	415	420	420

x2: w=3; c=97; Z(x)=?

S2\N	0	1	2	3	4	Z(x)
0	0					0
1	0					0
2	65					65
3	95	97				97
4	130	97				130
5	160	162				162
6	195	192	194			195
7	225	227	194			227
8	260	257	259			260
9	290	292	289	291		292
10	325	322	324	291		325
11	355	357	354	356		357
12	390	387	389	386	388	390
13	420	422	419	421	388	422

x1: w=5; c=150; Z(x)=?

S1\N	0	1	2	Z(x)
0	0			0
1	0			0
2	65			65
3	97			97
4	130			130
5	162	150		162
6	195	150		195
7	227	215		227
8	260	247		260
9	292	280		292
10	325	312	300	325
11	357	345	300	357
12	390	377	365	390
13	422	410	397	422

65+0=65
65+30=95
65+60=125
......

130+0=130
130+30=160
130+60=190
......

...

390+0=390
390+30=160

Безусловная оптимизация

x4: w=1; c=30; Z(x)=?

Sj\N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	Z(x)	x4*
0	0														0	0
1	0	30													30	
2	0	30	60												60	
3	0	30	60	90											90	
4	0	30	60	90	120										120	
5	0	30	60	90	120	150									150	
6	0	30	60	90	120	150	180								180	
7	0	30	60	90	120	150	180	210							210	
8	0	30	60	90	120	150	180	210	240						240	
9	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270					270	
10	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300				300	
11	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330			330	
12	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360		360	
13	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360	390	390	

x3: w=2; c=65; Z(x)=?

Sj\N		1	2	3	4	5	6	Z(x)	x3*
0	0							0	
1	0							0	
2	0	65						65	
3	0	95						95	
4	0	125	130					130	
5	0	155	160					160	
6	0	185	190	195				195	
7	0	215	220	225				225	
8	0	245	250	255	260			260	
9	0	275	280	285	290			290	
10	0	305	310	315	320	325		325	5
11	0	335	340	345	350	355		355	
12	0	365	370	375	380	385	390	390	
13	0	395	400	405	410	415	420	420	

x2: w=3; c=97; Z(x)=?

Sj\N	0	1	2	3	4	Z(x)	x2*
0	0					0	
1	0					0	
2	65					65	
3	95	97				97	
4	130	97				130	
5	160	162				162	
6	195	192	194			195	
7	225	227	194			227	
8	260	257	259			260	
9	290	292	289	291		292	
10	325	322	324	291		325	
11	355	357	354	356		357	
12	390	387	389	386	388	390	
13	420	422	419	421	388	422	1

x1: w=5; c=150; Z(x)=?

Sj\N	0	1	2	Z(x)	x1*
0	0			0	
1	0			0	
2	65			65	
3	97			97	
4	130			130	
5	162	150		162	
6	195	150		195	
7	227	215		227	
8	260	247		260	
9	292	280		292	
10	325	312	300	325	
11	357	345	300	357	
12	390	377	365	390	
13	422	410	397	422	0

	x1	x2	x3	x4
План	*0*	*1*	*5*	*0*

<u>Задача №1</u>

Задана зависимость прибыли предприятия от затрат на сервисное обслуживание (x 10 тыс. рублей). Построить однофакторную линейную модель и проверить ее качество.

n	X_i	Y_i
1	0	3
2	2	7
3	4	6
4	6	10
5	8	15
6	10	7
7	12	13
8	14	12
9	16	15
10	18	15
11	20	14
12	22	20

Задача №2

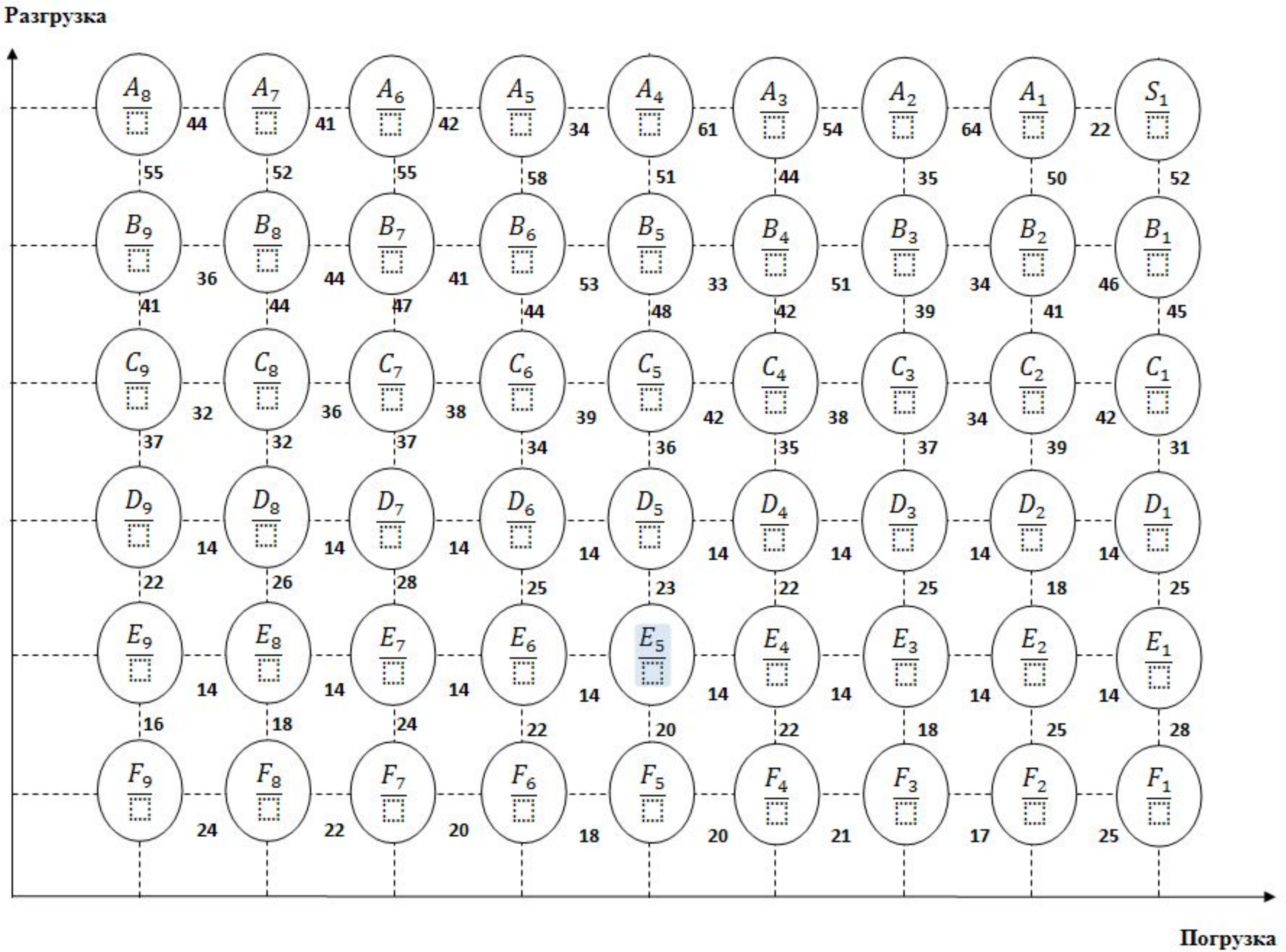
Построить модель для определения влияния факторных переменных на прибыль предприятия. Проверить качество модели и определить значения прибыли в 2017 и 2018 годах, если X1 – вложения в основные средства производства, X2 – затраты на выплату заработной платы X3 – затраты на выплату налогов.

Год	*Y*	*X1*	*X2*	*X3*
2005	289	146	112	109
2006	309	160	106	110
2007	321	175	111	112
2008	322	180	128	112
2009	299	152	102	105
2010	349	176	133	115
2011	378	190	155	121
2012	392	192	163	127
2013	364	182	135	108
2014	408	201	164	130
2015	351	170	136	103
2016	424	212	165	140

Задача№3

– Проанализировать влияние скрытых факторов на прибыль фирмы и выполнить прогноз прибыли в 2017 году, предполагая, что относительная ошибка модели авторегрессии не должна превышать 10 %

Год	Y
2001	286
2002	290
2003	293
2004	318
2005	289
2006	309
2007	321
2008	322
2009	299
2010	349
2011	378
2012	392
2013	364
2014	408
2015	351
2016	424


Разгрузка
Погрузка
A_8
A_7
A_6
A_5
A_4
A_3
A_2
A_1
S_1
B_9
B_8
B_7
B_6
B_5
B_4
B_3
B_2
B_1
C_9
C_8
C_7
C_6
C_5
C_4
C_3
C_2
C_1
D_9
D_8
D_7
D_6
D_5
D_4
D_3
D_2
D_1
E_9
E_8
E_7
E_6
E_5
E_4
E_3
E_2
E_1
F_9
F_8
F_7
F_6
F_5
F_4
F_3
F_2
F_1
44 41 42 34 61 54 64 22
55 52 55 58 51 44 35 50 52
36 44 41 53 33 51 34 46
41 44 47 44 48 42 39 41 45
32 36 38 39 42 38 34 42
37 32 37 34 36 35 37 39 31
14 14 14 14 14 14 14 14
22 26 28 25 23 22 25 18 25
14 14 14 14 14 14 14 14
16 18 24 22 20 22 18 25 28
24 22 20 18 20 21 17 25

Задание

На развитие 5-ти структурных подразделений предприятия можно выделить 10 млн. рублей. Известна эффективность капитальных вложений в каждое подразделение (данные представлены в таблице). Необходимо распределить выделенные средства подразделением таким образом, чтобы получить максимальный суммарный доход

xi	g1	g2	g3	g4	g5
0	0	0	0	0	0
1	1,4	1,1	1,6	1,2	1,5
2	2,2	2,4	2,2	2,5	2,1
3	3,5	3,2	3,3	3,1	3,4
4	4,2	4,4	4,2	4,5	4,1
5	5,4	5,4	5,3	5,2	5,5
6	7,1	6,4	6,8	7,2	7,0
7	7,4	7,4	7,2	7,8	7,8
8	8,1	9,0	8,4	8,6	8,8
9	9,2	9,7	9,9	9,4	9,8
10	10,9	10,0	10,4	10,6	10,1