Уравнения и неравенства с параметрами

Часть 1

План

1. ***Что такое задача с параметром?***
2. ***Аналитический метод решения задач с параметрами.***
3. Графический метод решения задач с параметрами.

Что такое задача с параметром

$$F(x, a) = 0$$

Задачи:

1. Решить уравнение (найти все пары чисел ***(x, a)***, которые удовлетворяют данному уравнению).

   Например: решить уравнение в целых числах

   $$(ax - 4)(ax^2 + 1) = 0$$

2. **Для каждого значения *a* решить уравнение относительно переменной *x*.**

Задача с параметром первого типа

Пример:

Решить уравнение относительно *x*:

$$\left(b^2 - b\right)x = 1 - b$$

где $\boldsymbol{b}$ - параметр и может принимать значения из множества $M = \{0,1,3\}$.

Семейство уравнений: $\left\{\begin{matrix} 0 \cdot x = 1 \\ 0 \cdot x = 0 \\ 6 \cdot x = -2 \end{matrix}\right\}$

Задача с параметром первого типа

Определение

Решить уравнение с переменной $\boldsymbol{x}$ *и параметром* $\boldsymbol{a}$ – это значит на множестве $\boldsymbol{R}$ решить семейство уравнений, получающихся из данного уравнения при подстановке вместо параметра любых значений из его области изменения.

Замечание. Аналогично определяются понятия неравенства, системы уравнений, системы неравенств с параметром. Кроме того, часто встречаются задачи, в условии которых содержится не один, а несколько параметров.

Задача с параметром второго типа

Примеры

1. Для каких значений ***a*** и ***b*** уравнение имеет только 2 различных корня?

$$x^4 + ax^3 + b^2x^2 - a = 0$$

2. При каких значениях ***a*** минимум функции больше 1?

$$f(x) = ax + \left|x^2 + 5x - 6\right|$$

Методы решения задач с параметрами

- Аналитические
- Графические

Аналитические приемы

1. «В лоб»

Этапы:

- обнаружение критических значений параметра и разбиение множества параметров на подмножества
- решение задачи на каждом из выделенных подмножеств
- запись ответа

Решение «в лоб»

Пример

Решить уравнение: $(a-1)x^2+2(2a+1)x+4a+3=0$

Решение:

1 этап.

<u>1 вывод.</u> Уравнение степени не выше 2

<u>2 вывод.</u> Рассмотреть значения параметра, влияющие на степень уравнения.

1 промежуточный результат:

Первое «критическое» значение параметра $a=1$

Решение «в лоб»

Квадратное уравнение

$$\frac{D}{4}=(2a+1)^2-(a-1)(4a+3)=5a+4$$

2 промежуточный результат:

Второе «критическое» значение параметра: $a=-\frac{4}{5}$

Результат первого этапа: разбиение множества параметров на 4 подмножества:

$$(-\infty;-0{,}8) \quad \{-0{,}8\} \quad (-0{,}8;1)\cup(1;+\infty) \quad \{1\}$$

Схема решения

2 этап:

1. $a \in (-\infty; -0{,}8)$ уравнение не имеет корней, поскольку дискриминант квадратного уравнения отрицательный.
2. ***a=-0,8*** – дискриминант квадратного уравнения обращается в ноль, и уравнение имеет корень $x = -\frac{1}{3}$
3. $a \in (-0{,}8; 1) \cup (1; +\infty)$ уравнение является квадратным с положительным дискриминантом, и его корнями являются два различных числа: $$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-2a - 1 + \sqrt{5a+4}}{a-1} \\ x = \dfrac{-2a - 1 - \sqrt{5a+4}}{a-1} \end{array}\right.$$
4. ***a=1*** – уравнение имеет вид***: 6x+7=0*** и единственный корень: $$x = -\frac{7}{6}$$

Схема решения

3 этап.

Ответ:

при $a \in (-\infty; -0{,}8)$ корней нет;

при $a=-0{,}8$ $x=-\frac{1}{3}$;

при $a \in (-0{,}8;1) \cup (1;+\infty)$ $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-2a-1+\sqrt{5a+4}}{a-1} \\ x = \dfrac{-21-1-\sqrt{5a+4}}{a-1} \end{array}\right.$

при $a=1$ $x = -\frac{7}{6}$

Решение «в лоб»

Замечание.

При определении пограничных значений параметра следует обращать внимание на:

- обращение в 0 старшего коэффициента;
- обращение в 0 дискриминанта;
- границы области определения параметра;
- ОДЗ уравнения (неравенства…) и др.

Аналитические приемы

2. Метод равносильных переходов

Используются теоремы о равносильных и неравносильных преобразованиях уравнений (неравенств, систем).

Пример: решить неравенство

$$\sqrt{x+a} \geq x+1$$

2. Метод равносильных переходов

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1<0 \\ x+a\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1\geq 0 \\ x+a\geq x^2+2x+1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<-1 \\ x\geq -a \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq -1 \\ x^2+x+1-a\leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$(I)\begin{cases} x<-1 \\ x\geq -a \end{cases} \qquad (II)\begin{cases} x\geq -1 \\ x^2+x+1-a\leq 0 \end{cases}$$

Решение

$$(I)\begin{cases} x < -1 \\ x \ge -a \end{cases}$$

при $a \le 1$ решений нет

при $a>1$ $\quad x \in [-a; -1)$

Решение

$$(II)\begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x + 1 - a \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2 + x + 1 - a \leq 0$$

D=4a-3

при $a < \frac{3}{4}$ решений нет;

при $a = \frac{3}{4}$ $x = -\frac{1}{2}$;

при $a > \frac{3}{4}$ $\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$

Решение

Ответ:

при $a < \dfrac{3}{4}$ решений нет;

при $a = \dfrac{3}{4}$ $x = -\dfrac{1}{2}$

при $\dfrac{3}{4} < a \le 1$ $\dfrac{-1-\sqrt{4a-3}}{2} \le x \le \dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$

при $a>1$ $-a \le x \le \dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$

Аналитические приемы

3. Замена переменной

1. исходя из свойств какой-то функции
2. упрощающая вычисления

3. Замена переменной

Пример 1. $\sqrt{1-x^2} > a - x$

При каких значения параметра a неравенство имеет решения

ОДЗ: $-1 \le x \le 1$

$x = \sin(t)$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\sqrt{1-\sin^2 t} > a - \sin t \Leftrightarrow \cos t > a - \sin t \Leftrightarrow \cos t + \sin t > a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) > a$$

так как $-\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \le \sqrt{2}$, то $a < \sqrt{2}$

3. Замена переменной

Пример 2.

При каких значениях параметра c система имеет решение? $\begin{cases} 2^{3x} - 2^{8y-3x+3} = 2^{4y+1} \\ x^2 + y^2 = c \end{cases}$

(1) $2^{3x} - 2^{8y-3x+3} = 2^{4y+1} \Leftrightarrow 2^{3x-4y} - 2^{4y-3x} \cdot 8 = 2$

Пусть $z = 2^{3x-4y}$

$z - \frac{8}{z} - 2 = 0$, $z=4$ $\quad 2^{3x-4y} = 2^2 \Leftrightarrow 3x - 4y = 2$

$$\begin{cases} 2^{3x} - 2^{8y-3x+3} = 2^{4y+1} \\ x^2 + y^2 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ x^2 + y^2 = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2-4y}{3} \\ (2+4y)^2 + 9y^2 = 9c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2-4y}{3} \\ 25y^2 + 16y + 4 - 9c = 0 \end{cases} \qquad c \geq \frac{36}{225}$$

Аналитические приемы

4. Использование свойств функций

1. монотонность
2. ограниченность
3. свойства линейной и квадратичной функций

4. Использование свойств функций

Пример 1. (ограниченность)

При каких целых значениях параметра k система имеет решения? $\begin{cases} (arctgx)^2 + (\arccos y)^2 = \pi^2 k \\ arctgx + \arccos y = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

$$0 \le (arctgx)^2 \le \frac{\pi^2}{4} \qquad 0 \le (\arccos x)^2 \le \pi^2$$

$$0 \le (arctgx)^2 + (\arccos x)^2 \le \frac{5\pi^2}{4} \qquad 0 \le \pi^2 k \le \frac{5\pi^2}{4} \qquad \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 1 \end{array}\right.$$

4. Использование свойств функций

Пример 2. (монотонность)

При каких значениях параметра a уравнение имеет ровно 3 корня?

(1)
$$4^{-|x-a|}\log_{\sqrt{3}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{-\left(x^2-2x\right)}\log_{1/3}\left(2\,|\,x-a\,|+2\right)=0$$

$$f\left(t_1\right)=f\left(t_2\right)$$

$$2^{-2|x-a|}\cdot 2\log_3\left(x^2-2x+3\right)=2^{-\left(x^2-2x\right)}\log_3\left(2\,|\,x-a\,|+2\right)$$

$$2^{x^2-2x+1}\log_3\left(x^2-2x+3\right)=2^{2|x-a|}\cdot\log_3\left(2\,|\,x-a\,|+2\right)$$

$$f(t)=2^t\log_3(t+2) \qquad (1)\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2=2\left|x-a\right|$$

4. Использование свойств функций

Пример 3.

Найдите все значения параметра ***a***, при которых корни уравнения лежат по разные стороны от 1 $\left(a^2-1\right)x^2+\left(2a+1\right)x-3=0$

<u>1 вывод:</u> $a^2-1\neq 0$ и $\left(2a+1\right)^2+12\left(a^2-1\right)>0$

<u>2 вывод:</u> $\left(a^2-1\right)\left(a^2-1+2a+1-3\right)<0$

$$\begin{cases}\left(a^2-1\right)\left(a^2+2a-3\right)<0\\ 16a^2+4a-13>0\end{cases}$$

Аналитические приемы

5. Поиск необходимых условий

1. использование симметрии аналитических выражений
   - присутствует требование единственности решения
   - есть аналитическое выражение, обладающее симметрией относительно одной из переменных
2. поиск «выгодной» точки

5. Поиск необходимых условий

Пример 1.

При каких значениях параметра $\boldsymbol{a}$ система имеет единственное решение?

$$\begin{cases} a\left(x^4+1\right)=y+1-|x| \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Необходимое условие: $\boldsymbol{x=0}$.

$$\begin{cases} y=a-1 \\ y^2=1 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=2 \end{array}\right.$$

5. Поиск необходимых условий

Пример 2.

При каких значениях параметра $\boldsymbol{a}$ уравнения равносильны?

(1) $\sin(2x) + a = \sin x + 2a\cos x$

(2) $2\cos(2x) + a^2 = 5a\cos x - 2$

(1) $(\sin x - a)(2\cos x - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = a \\ \cos x = 0{,}5 \end{array}\right.$

$$a^2 - 2{,}5a + 1 = 0 \qquad \left[\begin{array}{l} a = 2 \\ a = 0{,}5 \end{array}\right.$$

6. Рассмотрение параметра как равноправной переменной

Пример:

Найти все значения параметра, при которых уравнения имеют общий действительный корень.

(1) $x^2 + x + 4a = 0$

(2) $a^2x^2 + ax + 4a = 0$

$$\begin{cases} a^2x^2 + ax + 4a = 0 \\ x^2 + x + 4a = 0 \end{cases}$$

7. Решение относительно параметра

Пример: $$\sqrt{a+\sqrt{a+\sin x}}=\sin x$$

При каких значениях параметра a уравнение имеет решение?

sinx=t $$\sqrt{a+\sqrt{a+t}}=t$$

$$\begin{cases} 0\le t\le 1 \\ a+t=\left(t^2-a\right)^2 \\ t^2\ge a \end{cases}$$

$$a^2-a\left(2t^2+1\right)+t^4-t=0$$

$$a=t^2+t+1$$

$$a=t^2-t$$

$$\begin{cases} 0\le t\le 1 \\ a=t^2-t \\ t^2\ge a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0\le t\le 1 \\ a=t^2-t \end{cases}$$

$$f(t)=t^2-t \qquad [0;1]$$

$$\left[-\frac{1}{4};0\right]$$

Задание

;

1. Решите неравенство: ***2a(a-2)x>a-2***
2. Решите уравнение: $\sqrt{a^2 - x\sqrt{x^2 + a^2}} = a - x$
3. Найдите те значения параметра а, при которых разные корни уравнения расположены по одну сторону от 2.

$$x^2 - 4ax + 1 - 2a + 4a^2 = 0$$

4. При каких значениях параметра уравнения имеют общие корни?

$$x^2 - \frac{x}{2} + a = 0 \qquad 4a^2x^2 - ax + a = 0$$

Задание

5. Решить уравнение: $x(2x-1)\sqrt{1-x^2} = a$

6. Решить систему уравнений: $\begin{cases} (a^2-a)\sin\dfrac{x}{2} + 2\cos y = a+5 \\ 3\sin\dfrac{x}{2} + \cos y = 4 \end{cases}$

7. Найти все значения параметра, при каждом из которых уравнение имеет три корня: $9^{a^2}\log_2(|x^2-4x+3|+1) = 3^{3a-|x^2-4x+3|}\log_2(1+3a-2a^2)$

8. При каких значениях а система имеет единственное решение? $\begin{cases} (|x|+1)a = y+\cos x \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$