Інтерполяційні методи наближення функцій однієї змінної.

Лекція 2

Частина 1

Українська інженерно-педагогічна академія

План лекції

1. **Постановка задачі інтерполяції функцій однієї змінної**
2. **Інтерполяційна формула Лагранжа**
3. **Інтерполяція сплайнами**

3

1. Постановка задачі інтерполяції функцій однієї змінної

В обчислювальній практиці часто доводиться мати справу з функціями $y = f(x)$, заданими таблицями їх значень для деякої множини значень аргумента x. Тобто, **експериментальними даними є значення**

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \ldots,\ y_n = f(x_n).$$

В процесі ж розв'язування задачі необхідні проміжні значення функції, яких немає в таблиці. В цьому випадку **будують функцію** $F(x)$, **досить просту для обчислень, яка в заданих точках** $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ **приймає ті ж значення, що і функція** $f(x)$, а в інших точках розглядуваного інтервалу із області визначення функції дає наближення функції $f(x)$ з певною точністю, і при розв'язуванні задачі замість функції $f(x)$ оперують з функцією $F(x)$.

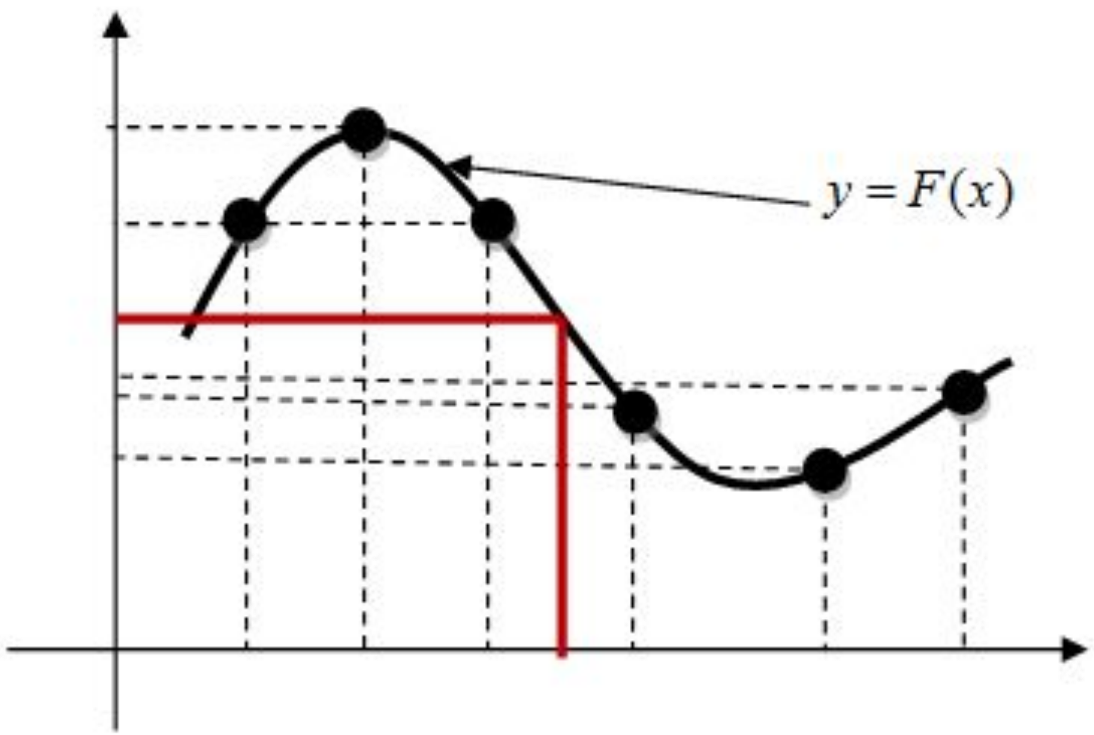
Задача побудови такої функції $F(x)$, **яка задовольняє умови** $F(x_k) = y_k$ **називається задачею інтерполяції (від inter – між і pol — полюс, точка). Функція** $f(x)$ **називається інтерпольованою функцією, а** $F(x)$ **інтерполюючою функцією або інтерполянтом.**

Точки $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ **називаються вузлами інтерполяції.**

1. Постановка задачі інтерполяції функцій однієї змінної

Геометрично задача інтерполяції полягає в побудові кривої $y = F(x)$ певного типу, яка проходить через задану систему точок $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{0,n}$.

Частіше всього інтерполюючу функцію $F(x)$ шукають у вигляді алгебраїчного многочлена.



5

Інтерполяційна формула Лагранжа

Нехай функція $y = f(x)$ задана таблицею значень $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$. Треба побудувати многочлен $L_n(x)$ степеня не вище n, який приймає в вузлах інтерполяції ті ж значення, що і $f(x)$, тобто многочлен, для якого виконуються рівності $L_n(x_i) = y_i$, $i = \overline{0,n}$.

Розв'язком цієї задачі є інтерполяційний поліном Лагранжа:

$$L_n(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}y_1 +$$

$$+\ldots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n. \qquad (1)$$

6 Інтерполяційна формула Лагранжа

Для трьох точок **інтерполяційна формула Лагранжа** має вигляд

$$f(x) \approx L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 +$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

В точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ значення многочлена $L_n(x)$ і функції $f(x)$ збігаються. При інших значеннях x різниця $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ в загальному випадку відмінна від нуля і є істинною похибкою методу.

$R_n(x)$ називається залишковим членом інтерполяції.

Інтерполяційна формула Лагранжа

В точках $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ значення многочлена $L_n(x)$ і функції $f(x)$ збігаються. При інших значеннях x різниця $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ в загальному випадку відмінна від нуля і є істинною похибкою методу.

$R_n(x)$ називається залишковим членом інтерполяції.

Оцінка для абсолютної похибки інтерполяційної формули Лагранжа:

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\Pi(x)|.$$

Інтерполяційна формула Лагранжа

Приклад 1. Знайти наближене значення функції $f(x)$ в точці $x = 0{,}1$ за даними таблиці 1 за допомогою інтерполяційної формули Лагранжа.

Табл. 1

i	0	1	2
x_i	-0,6	-0,1	0,4
y_i	2,18	2,38	2,55

Інтерполяційна формула Лагранжа

Табл. 1			
i	0	1	2
x_i	-0,6	-0,1	0,4
y_i	2,18	2,38	2,55

Розв'язування. За формулою (1) інтерполяційна формула Лагранжа має вигляд

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2=\frac{(x+0,1)(x-0,4)}{(-0,6+0,1)(-0,6-0,4)}\cdot 2,18+$$

$$+\frac{(x+0,6)(x-0,4)}{(-0,1+0,6)(-0,1-0,4)}\cdot 2,38+\frac{(x+0,6)(x+0,1)}{(0,4+0,6)(0,4+0,1)}\cdot 2,55=$$

$$=4,36(x^2-0,3x-0,04)-9,52(x^2+0,2x-0,24)+5,1(x^2+0,7x+0,06)=$$

$$=-0,06x^2+0,358x+2,4164.$$

$$f(0,1)\approx L_2(0,1)=-0,0006+0,0358+2,4164=2,4516\approx 2,45.$$

Інтерполяційна формула Лагранжа

$$f(0,1) \approx L_2(0,1) = -0,0006 + 0,0358 + 2,4164 = 2,4516 \approx 2,45.$$

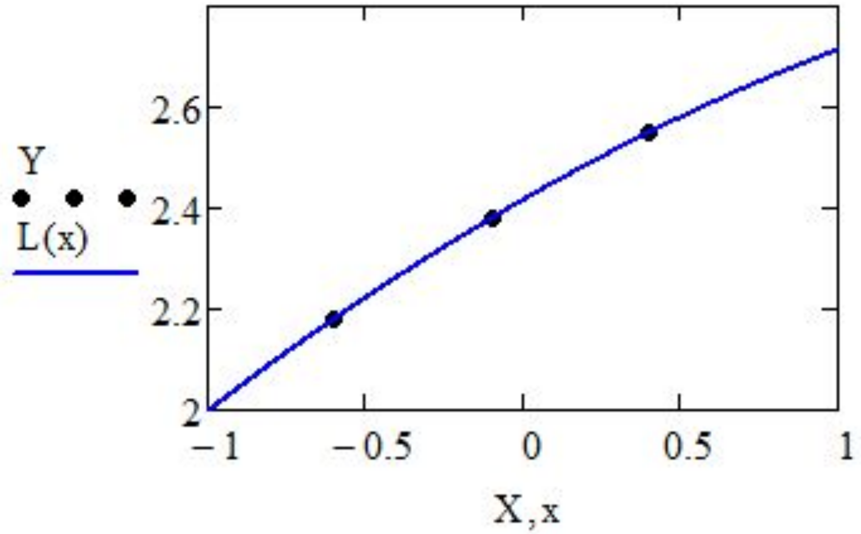
Порівняємо знайдене наближене значення $f(0,1)$ з точним, знаючи, що таблицею задана функція $f(x) = \sqrt{x+2} + 1$. Точне значення $f(0,1)$ дорівнює

$$\sqrt{0,1+2} + 1 = 2,4491.$$

Отже, абсолютна похибка наближення дорівнює

$$|R_2(0,1)| = |f(0,1) - L_2(0,1)| = |2,4491 - 2,4516| = 0,0025.$$

Таким чином, знайдено наближене значення функції $f(0,1) \approx L_2(0,1) = 2,45$ з похибкою $|R_2(0,1)| = 0,0025$.

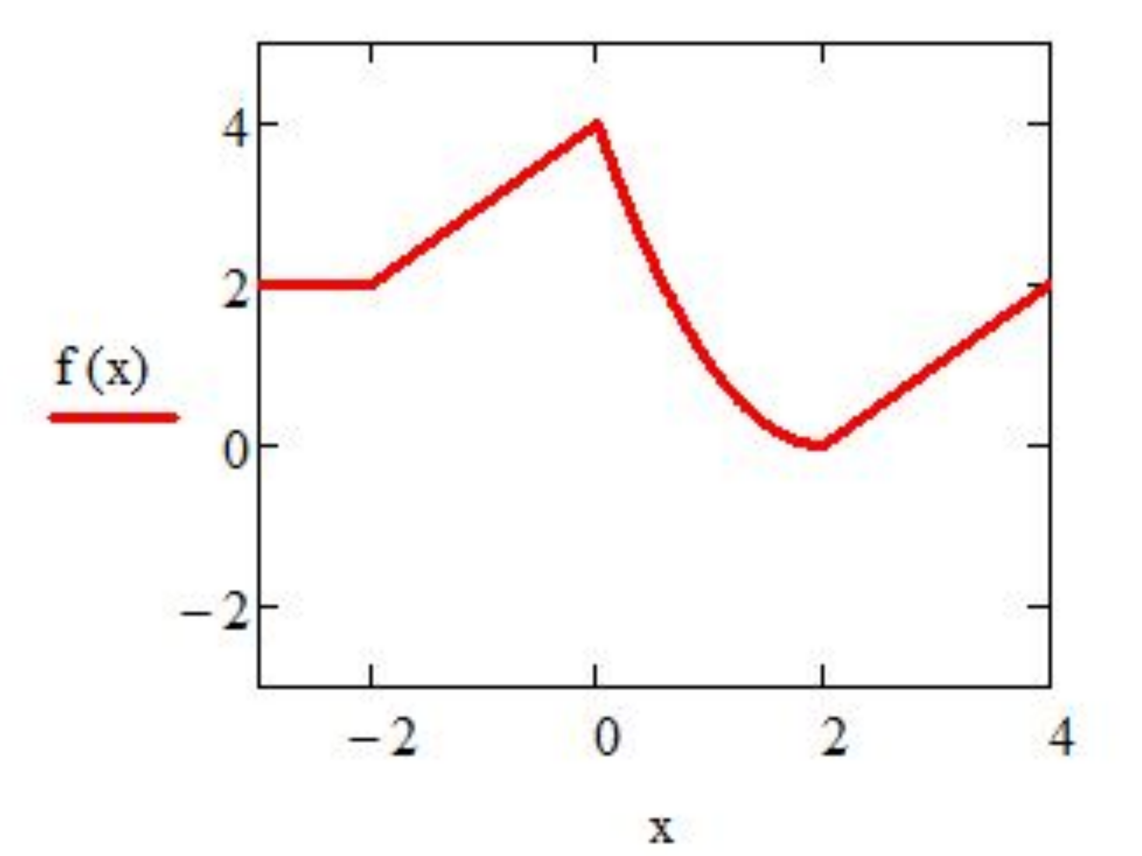


Інтерполяція сплайнами

Інді на практиці зростання степеня інтерполяційного полінома може привести до **погіршення наближення функції**. Із ростом степеня при обчисленнях полінома відбувається також швидке накопичування похибок округлення. Наприклад, при обчисленнях полінома 100-го степеня в точці $x = 0.1$ старші члени будуть машинними нулями. Тому на практиці поліноми вище 5-го степеня, як правило, не використовуються. Тому на практиці, щоб досить добре наблизити функцію, замість інтерполяційних поліномів високих степенів використовують інтерполяційні сплайни невисоких степенів.

Інтерполяція сплайнами

Слово "сплайн" походить від англійського **spline** (рейка, стержень) --- назва пристосування, яке креслярі використовували для проведення гладких кривих через задані точки. На практиці широко вживаються сплайни третього степеня, які мають неперервну першу або першу і другу похідну.



Інтерполяція лінійними сплайнами

Припустимо, що функція $y = f(x)$ задана на відрізку $[a,b]$ таблично на сітці $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$; її значення у вузлах $x_i \ (i = \overline{0,n})$ відповідно дорівнюють $y_0, y_1, \ldots, y_n$, тобто $y_i = f(x_i) \ (i = \overline{0,n})$.

Інтерполяційним сплайном першого порядку на сітці Δ називається неперервна на $[a,b]$ функція $S_1(f,x)$, яка є лінійною на кожному відрізку $[x_i, x_{i+1}] \ (i = \overline{0,n-1})$ і задовольняє умови $S_1(f,x_i) = y_i \ (i = \overline{0,n})$:

$$S_1(f,x) = y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \ x_i \le x \le x_{i+1}, (i = \overline{0,n-1}) \qquad (7)$$

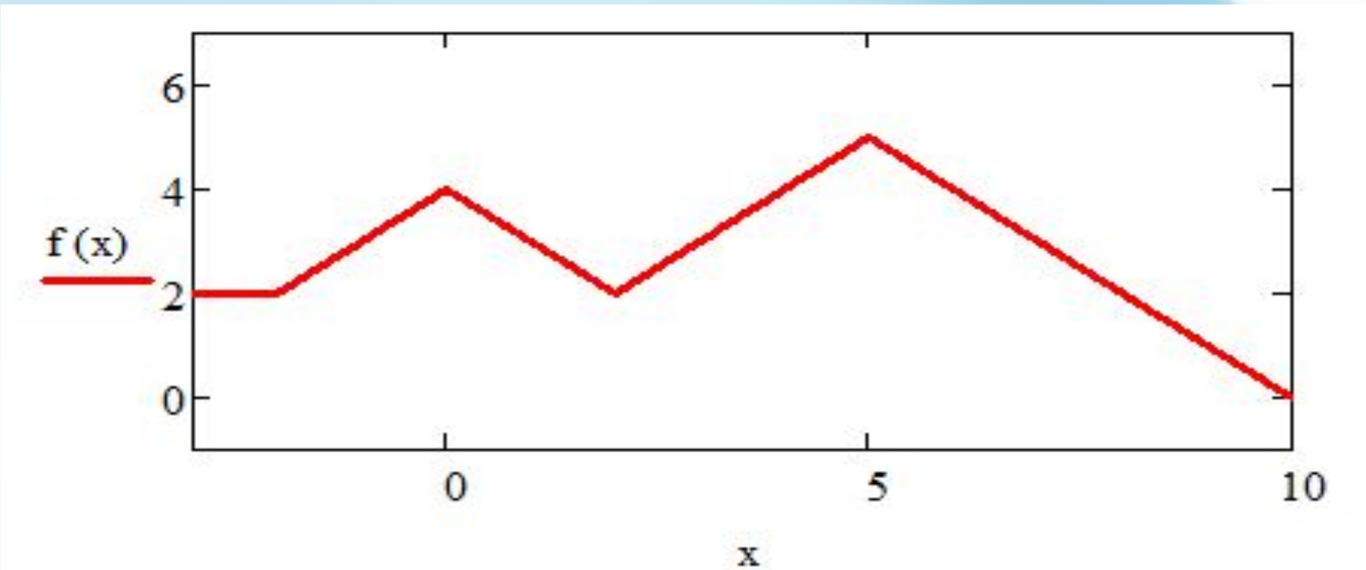
Інтерполяція лінійними сплайнами

Формулу (7) можна подати у вигляді

$$S_1(f,x)=\begin{cases} y_0\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}, & x_0\leqslant x\leqslant x_1 \\ y_1\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}+y_2\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x_1\leqslant x\leqslant x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ y_{n-1}\dfrac{x-x_n}{x_{n-1}-x_n}+y_n\dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}, & x_{n-1}\leqslant x\leqslant x_n \end{cases}$$

Геометричним образом інтерполяційного сплайна першого порядку $S_1(f,x)$ є ламана з вершинами в точках $M_i(x_i,y_i)$ $(i=\overline{0,n})$.

Інтерполяція лінійними сплайнами



Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ разом із першою похідною, то **похибка методу**, що виникає при наближенні цієї функції лінійним сплайном $S_1(f,x)$

$$|R_n(x)| = |f(x) - S_1(f,x)| \leqslant \frac{h}{2} \cdot \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|, \; h = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} (x_{i+1} - x_i)$$

Інтерполяція лінійними сплайнами

Приклад 2.Побудувати інтерполяційний сплайн першого степеня, який наближає функцію $f(x)$,задану таблицею (табл. 2) і за його допомогою знайти наближене значення функції та її першої похідної в точці $\tilde{x}=0,1$.

Таблиця. 2.2

i	0	1	2	3
x_i	–0,6	–0,3	–0,1	0,2
y_i	2,183	2,304	2,378	2,483

17 Інтерполяція лінійними сплайнами

Розв'язування. Згідно з умовою задачі сплайн першого порядку, або лінійний інтерполяційний сплайн можна подати у вигляді

$$S_1(f,x)=\begin{cases} y_0\dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}, & x_0\leqslant x\leqslant x_1\\ y_1\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}+y_2\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x_1\leqslant x\leqslant x_2\\ y_2\dfrac{x-x_3}{x_2-x_3}+y_3\dfrac{x-x_2}{x_3-x_2}, & x_2\leqslant x\leqslant x_3 \end{cases}.$$

Користуючись даними табл.1 , маємо:

$$S_1(f,x)=\begin{cases} 2{,}183\dfrac{x-(-0{,}3)}{-0{,}6-(-0{,}3)}+2{,}304\dfrac{x-(-0{,}6)}{-0{,}3-(-0{,}6)}, -0{,}6\leqslant x\leqslant -0{,}3\\ 2{,}304\dfrac{x-(-0{,}1)}{-0{,}3-(-0{,}1)}+2{,}378\dfrac{x-(-0{,}3)}{-0{,}1-(-0{,}3)}, -0{,}3\leqslant x\leqslant -0{,}1\\ 2{,}378\dfrac{x-0{,}2}{-0{,}1-0{,}2}+2{,}483\dfrac{x-(-0{,}1)}{0{,}2-(-0{,}1)}, -0{,}1\leqslant x\leqslant 0{,}2 \end{cases}.$$

Інтерполяція лінійними сплайнами

або,якщо зробити перетворення, отримаємо

$$S_1(f,x)=\begin{cases}0,4033x+2,4250, & -0,6\leqslant x\leqslant -0,3\\ 0,3700x+2,4150, & -0,3\leqslant x\leqslant -0,1\\ 0,3500x+2,4130, & -0,1\leqslant x\leqslant 0,2\end{cases}$$

Користуючись цією фомулою для лінійного сплайна знайдемо наближене значення функції в точці $\tilde{x}=0,1$:

$$f(0,1)\approx S_1(f;0,1)=0,3500\cdot 0,1+2,4130=2,4480$$

Похідна від побудованого інтерполяційного сплайна

$$S_1'(f,x)=\begin{cases}0,4033, & -0,6<x<-0,3\\ 0,3700, & -0,3<x<-0,1\\ 0,3500, & -0,1<x<0,2\end{cases}$$

Отже

$$f'(0,1)\approx S_1'(f;0,1)=0,3500.$$

19

Інтерполяція лінійними сплайнами

Знайдемо похибку наближення функції $f(x)=\sqrt{x+2}+1$, яка була задана табл. 2.2., в точці $x=0{,}1$ лінійним сплайном $S_1(f,x)$. Точне значення цієї функції при $x=0{,}1$ дорівнює $f(0{,}1)=\sqrt{0{,}1+2}+1=2{,}4491$. Отже похибка наближення лінійним інтерполяційним сплайном

$$E_1=|f(0{,}1)-S_1(f;0{,}1)|=|2{,}4491-2.4480|=0{,}0011.$$

Інтерполяція лінійними сплайнами