АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

МОДЕЛИ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ

ИСХОДНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ

- Если процесс регистрации данных происходит для *n* объектов по *p* признакам и по времени *t* $x_i^{(j)}(t_k)$ *j=1, 2, ..., p; i=1, 2, ..., n; k=1,2, ..., N,* то говорят о *панельных данных.*

Если рассматривать значения одного признака у одного объекта в равноотстоящие моменты времени, то последовательность $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)$ называют *одномерным временным рядом.*

Если регистрировать значения *p* признаков у одного объекта, то говорят о статистическом анализе *многомерного временного ряда* $X(t) = (x^1(t_k), x^2(t_k), \dots, x^p(t_k))$, **k=1,2, ..., N**

ИСХОДНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ

Говоря о проблеме прогнозирования на основе одномерных временных рядов, обычно имеется ввиду *кратко*- и *среднесрочный* прогноз, поскольку построение долгосрочного прогноза подразумевает обязательное использование методов организации и статистического анализа *специальных экспертных оценок.*

Использование доступных к моменту t=N наблюдений временного ряда $x(t)$ для прогнозирования может явиться основой для:

- планирования в экономике, производстве, торговле
- управления и оптимизации социально-экономических процессов
- принятия оптимальных решений в бизнесе
- частичного управления параметрами демографических процессов

ОСНОВНЫЕ ФАКТОРЫ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

1. *Долговременные,* формирующие общую тенденцию в изменении анализируемого признака $x(t)$. Обычно описывается при помощи монотонной функции $f(t)$, называемой *трендом*.

2. *Сезонные*, формирующие периодически повторяющиеся в определенное время года колебания анализируемого признака. Описывается периодической функцией $\phi(t)$ с периодом, кратным сезонам.

3. *Циклические,* формирующие изменения анализируемого признака, обусловленные действием долговременных циклов экономической, демографической или астрономической природы. Описывается функцией $\psi(t)$.

4. *Случайные,* не поддающиеся учету и регистрации. Их воздействие обуславливает *стохастическую природу* анализируемого признака. Обозначается □(t)

ОБЩИЕ МОДЕЛИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

- *Аддитивная форма*

$$\boldsymbol{x(t) = \lambda_1 f(t) + \lambda_2 \varphi(t) + \lambda_3 \psi(t) + \varepsilon(t),} \quad \textbf{(1)}$$

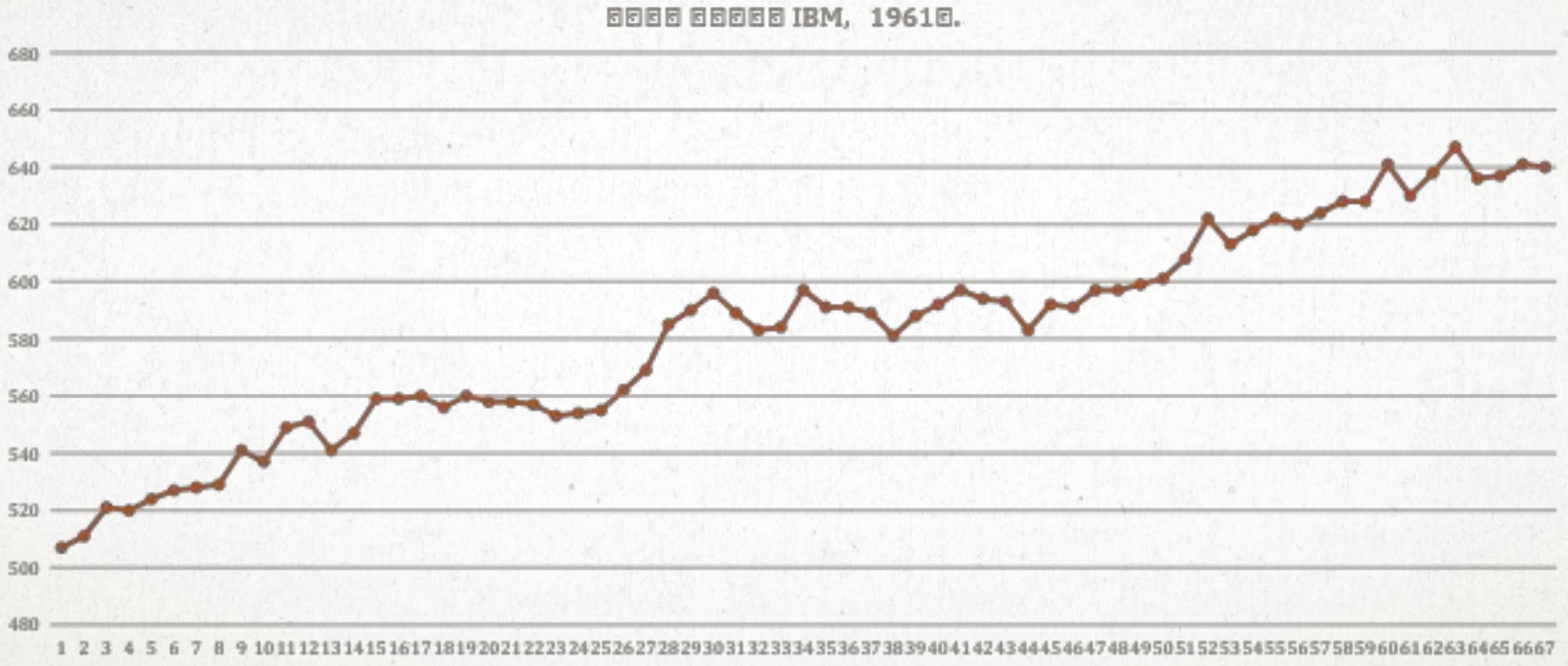
$$\lambda_i = \begin{cases} 1, & \text{фактор участвует в формировании уровней ряда } x(t) \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Мультипликативная форма

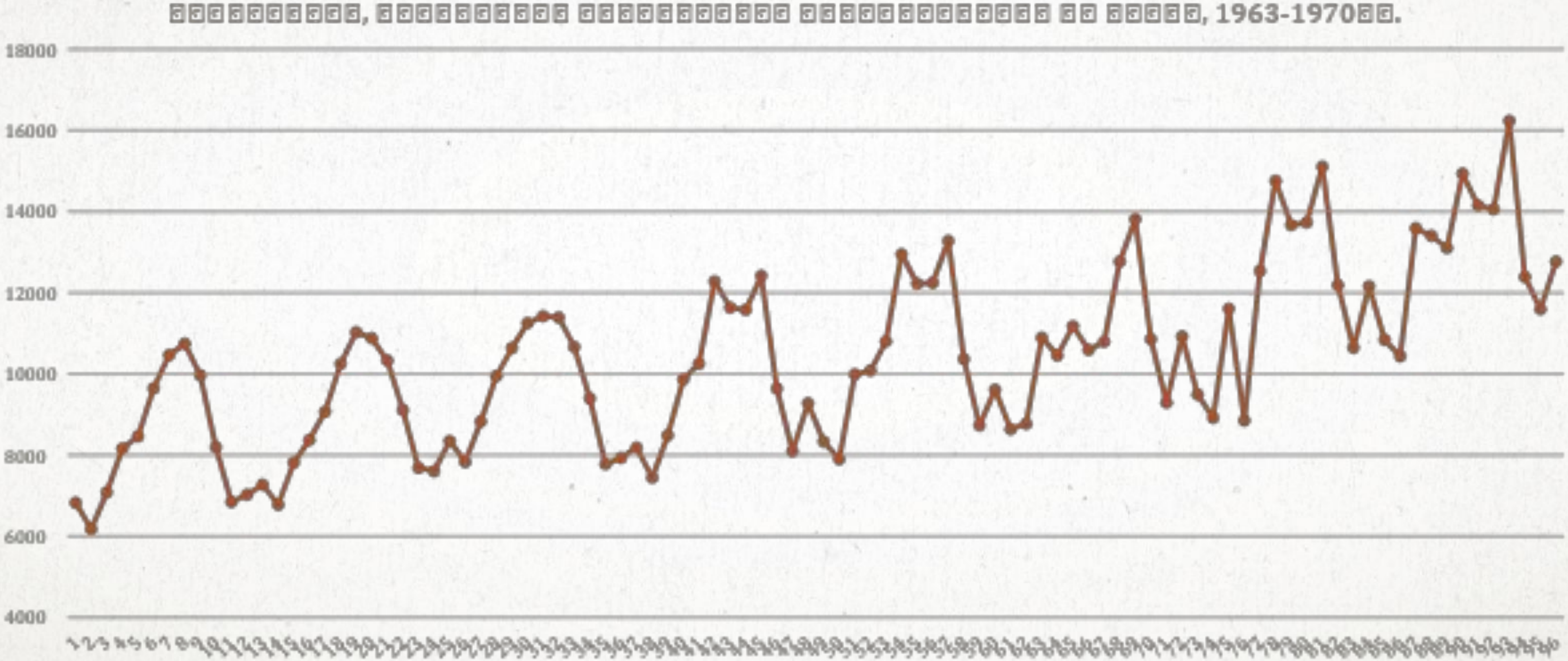
$$\boldsymbol{x(t) = f(t)^{\lambda_1} * \varphi(t)^{\lambda_2} * \psi(t)^{\lambda_3} * \varepsilon(t)}$$

$$\boldsymbol{\ln x(t) = \lambda_1 \ln f(t) + \lambda_2 \ln \varphi(t) + \lambda_3 \ln \psi(t) + \ln \varepsilon(t)}$$

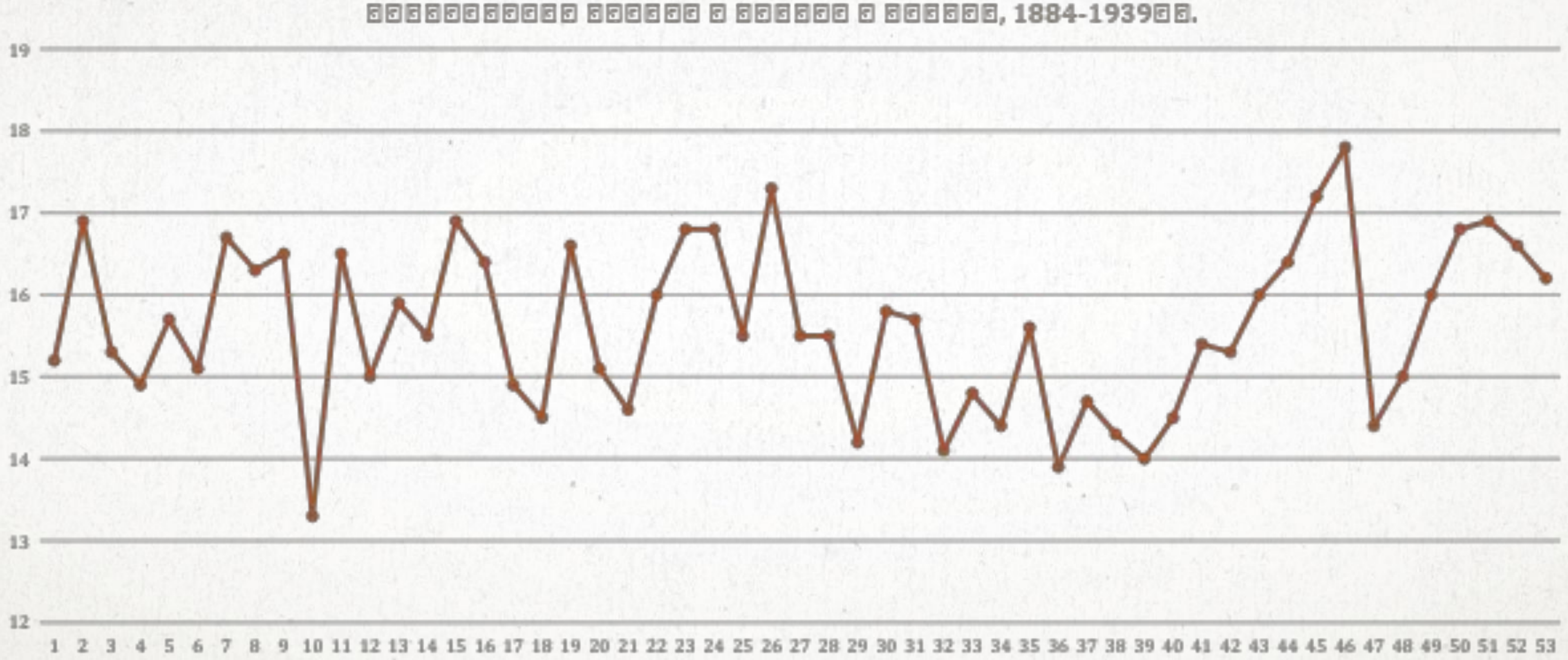
ПРИМЕРЫ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ



ПРИМЕРЫ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ



ПРИМЕРЫ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ



ЗАДАЧИ АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

По имеющейся траектории анализируемого временного ряда $x(t)$ требуется:

- какие из неслучайных составляющих $f(t)$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ присутствуют в разложении (1)
- Построить «хорошие» оценки для тех неслучайных функций, которые присутствуют в разложении (1)
- Подобрать модель, адекватно описывающую поведение «случайной составляющей $\varepsilon(t)$, и статистически оценить параметры этой модели

ТЕСТИРОВАНИЕ НАЛИЧИЯ/ОТСУТСТВИЯ НЕСЛУЧАЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

- Если неслучайные составляющие отсутствуют, то ряд состоит из статистически независимых наблюдений, случайно варьирующихся около некоторого постоянного уровня a, т.е.

$$\boldsymbol{H_0}:\ \mathbf{M}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\big) = \boldsymbol{a} = \boldsymbol{const}$$

Иначе, существует зависимость от времени неслучайной составляющей анализируемого временного ряда

$$\boldsymbol{H_1}:\ \mathbf{M}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\big) \neq \boldsymbol{const}$$

КРИТЕРИЙ СЕРИЙ, ОСНОВАННЫЙ НА МЕДИАНЕ

- Из элементов временного ряда образуем «серии» плюсов и минусов по правилу

$$\boldsymbol{x(t)} := \begin{cases} +, & \boldsymbol{x(t) > x_{med}} \\ -, & \boldsymbol{x(t) < x_{med}} \end{cases}$$

Члены временного ряда, равные медиане $\boldsymbol{x_{med}}$ не учитываются

Под «серией» подразумевается последовательность подряд идущих плюсов или минусов (в частности, серия может состоять из одного элемента)

Вычисляют: $\boldsymbol{\nu}$ – общее число серий; $\boldsymbol{\tau}$ – протяженность самой длинной серии. Если хотя бы одно из неравенств

$$\nu > \frac{1}{2}\left(n + 2 - 1.96\sqrt{n-1}\right)$$
$$\tau < 1.43 \ln(n+1)$$

не выполняется, то гипотеза H_0 отвергается с вероятностью ошибки $\alpha \in (0.05; 0.0975)$

КРИТЕРИЙ «ВОСХОДЯЩИХ» И «НИСХОДЯЩИХ» СЕРИЙ

- Этот критерий «улавливает» постепенное смещение среднего значения в исследуемом распределении не только монотонного, но и более общего, например периодического, характера.

$$\boldsymbol{x(t)} \coloneqq \begin{cases} +, & \boldsymbol{x(t) > x(t-1)} \\ -, & \boldsymbol{x(t) < x(t-1)} \end{cases}$$

Если два и несколько идущих друг за другом наблюдений равны между собой, то принимается во внимание только одно из них. Критерий основан на том же соображении, что и предыдущий: если выборка случайна, то в образованной последовательности знаков общее число серий не должно быть слишком малым, а их протяженность – слишком большой. Если хотя бы одно из неравенств

$$\nu > \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}(\mathbf{2}\boldsymbol{n}-\mathbf{1}) - \mathbf{1.96}\sqrt{\frac{\mathbf{16}\boldsymbol{n}-\mathbf{29}}{\mathbf{90}}}$$

$$\tau < \tau_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{n}),$$

где $\tau_0(n < 27) = 5$, $\tau_0(26 < n < 154) = 6$, , $\tau_0(153 < n < 1171) = 7$

не выполняется, то гипотеза H_0 отвергается с вероятностью ошибки $\alpha \in (0.05; 0.0975)$

КРИТЕРИЙ АББЕ

- Критерий применяется, если выборка подчиняется нормальному закону распределения.

$$\boldsymbol{\gamma}_{\text{набл}} = \frac{\boldsymbol{q^2}}{\boldsymbol{s^2}}$$

$$q^2 = \frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}(x(i+1) - x(i))^2\,; \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x(i) - \bar{x})^2\,; \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x(i)$$

Если окажется, что $\boldsymbol{\gamma}_{\text{набл}} < \boldsymbol{\gamma}_{\min}$, то гипотеза H_0 отвергается, где

$$\boldsymbol{\gamma}_{\min} = 1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{n + 0.5(1 + u_\alpha^2)}}$$

u_α – α-квантиль нормированного нормального распределения

МЕТОДЫ СГЛАЖИВАНИЯ ВРЕМЕННОГО РЯДА

- *Аналитические* методы основаны на допущении, что известен общий вид неслучайной составляющей разложения (1). Тогда задача выделения неслучайной составляющей (задача *элиминирования* случайных остатков, задача *сглаживания* временного ряда) сводится к задаче построения «хороших» оценок параметров модели. Т.е. $\hat{f}(t)$ будет представлена в виде формулы $f(t, \hat{\theta})$ функции известного вида, в которой неизвестные параметры $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots)$ заменены их статическими оценками.

- *Алгоритмические* методы не имеют допущения о том, что аналитический вид известен. «На выходе» задачи приводится алгоритм расчета оценки $\hat{f}(t)$ в любой наперед заданной точке t.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ НЕСЛУЧАЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

- Реализуются в рамках моделей регрессии, в которых в роли зависимой переменной выступает $x(t)$, генерирующая анализируемый временной ряд, а единственной объясняющей переменной является время t.

Рассматривается модель $\boldsymbol{x(t) = f(t, \theta) + \varepsilon(t)}$, t=1,2,…,N

в которой общий вид функции $f(t, \theta)$ известен, но неизвестны параметры θ. Если ошибки $\varepsilon(t)$ взаимно некоррелированны, то оценки параметров могут быть получены с помощью МНК:

$$\boldsymbol{\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y}$$

В случае коррелированности ошибок необходимо применять ОМНК. В некоторых случаях необходима техника статистического анализа нелинейных моделей регрессии.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ НЕСЛУЧАЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

На практике различают четыре основных типа экономического роста:

- I – постоянный рост (с постоянным или близким к нему абсолютным цепным приростом);
- II – увеличивающийся рост (с увеличивающимся абсолютным цепным приростом);
- III – уменьшающийся рост (с уменьшающимся абсолютным цепным приростом);
- IV – рост с качественными изменениями динамических характеристик на протяжении исследуемого периода.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ НЕСЛУЧАЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

Для каждого типа роста наиболее часто в практике экономических исследований встречаются следующие виды функций трендов.

I тип роста

- Линейная функция: $\boldsymbol{f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t.}$
- Линейно-гиперболическая функция: $\boldsymbol{f(t) = \alpha + \beta t + \gamma / t,}$ где $\beta > 0$; $\gamma > 0$.
- Линейно-логарифмическая функция 2-го порядка:

$$\boldsymbol{f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(t) + \alpha_2 \ln^2(t),} \qquad \text{где } \alpha_1 > 0;\ \alpha_2 > 0.$$

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ НЕСЛУЧАЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

II тип роста

- Показательная функция: $\boldsymbol{f(t)= \alpha(1+\beta)^t}$, где $\alpha > 0$; $\beta > 0$.
- *Парабола 2-го порядка:* $\boldsymbol{f(t)= \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2}$, где $\alpha_1>0; \alpha_2>0.$
- *Парабола 3-го порядка:* $\boldsymbol{f(t)= \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3}$,

где $\alpha_1>0; \alpha_2>0; \alpha_3>0.$

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ НЕСЛУЧАЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

- *III тип роста*
- Степенная функция: $f(t) = \alpha\, t^{\beta}$, где $\alpha > 0$; $0 < \beta < 1$.
- Линейно-логарифмическая функция: $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(t)$, где $\alpha_1 > 0$.
- Парабола 2-го порядка: $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$, где $\alpha_1 > 0$; $\alpha_2 > 0$.
- Гипербола 1-го порядка: $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 / t$, где $\alpha_1 < 0$.
- Гипербола 2-го порядка: $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 / t + \alpha_2 / t^2$, где $\alpha_1 < 0$; $\alpha_2 < 0$.
- Модифицированная экспонента: $f(t) = \alpha + \beta e^{-t}$, где $\beta < 0$.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ НЕСЛУЧАЙНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

- *IV тип роста*

- Линейно-логарифмическая ф-ция 2-го порядка: $\boldsymbol{f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \ln(t) + \alpha_2 \ln^2(t)}$, где $\alpha_1>0$; $\alpha_2>0$.

- Парабола 3-го (и более высоких) порядков: $\boldsymbol{f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3}$, где $\alpha_1>0$; $\alpha_2>0$; $\alpha_3>0$

- Логистическая функция: $\boldsymbol{f(t) = \frac{\alpha}{1+\beta * e^{-\gamma t}}}$, где $\alpha>0$; $\beta>0$; $\gamma>0$

- Первая функция Торнквиста: $\boldsymbol{f(t) = \frac{\alpha\, t}{\beta + t}}$, где $\alpha>0$; $\beta>0$.

- Кривая Гомперца: $\boldsymbol{f(t) = \alpha \beta^{\gamma t}}$, где $\alpha>0$; $\beta>0$; $\gamma>0$.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ