Методы решения геометрических задач (планиметрия)

*Основные методы решения геометрических задач

- ✔ Метод дополнительных построений
- ✔ Метод геометрических преобразований
- ✔ Метод подобия
- ✔ Метод площадей
- ✔ Метод вспомогательной окружности
- ✔ Метод геометрического видения
- ✔ Метод координат
- ✔ Векторный метод

*Метод дополнительных построений

Разновидности:

- Продолжение отрезка (отрезков) на определенное расстояние или до пересечения с заданной прямой (прямыми).
- Проведение прямой через две заданные точки.
- Проведение через заданную точку прямой, параллельной данной прямой, или перпендикулярной данной прямой.

*Метод геометрических преобразований

Разновидности:

- центральная симметрия,
- осевая симметрия,
- параллельный перенос,
- поворот.

*Метод площадей

Один из алгоритмов решения многих геометрических задач основан на использовании свойств площадей фигур.

*Метод вспомогательной окружности

«Окружность – душа геометрии. Познайте окружность, и вы не только познаете душу геометрии, но и возвысите душу свою».

И.Ф. Шарыгин

*Метод геометрического видения

Основывается на умениях видеть и сопоставлять геометрические факты.

Обычно при решении не нужно выполнять дополнительные построения и вычислений.

*Метод координат

***Метод координат и векторный метод* - самые универсальные методы геометрии.**

Главное - удачно выбрать систему координат.

- *I тип* – задачи на нахождение зависимости между элементами данной фигуры;
- *II тип* – задачи на составление уравнения данной фигуры, если известны характеристические свойства точек данной фигуры.

*Векторный метод

Типы задач, решаемых с помощью ***векторного метода:***

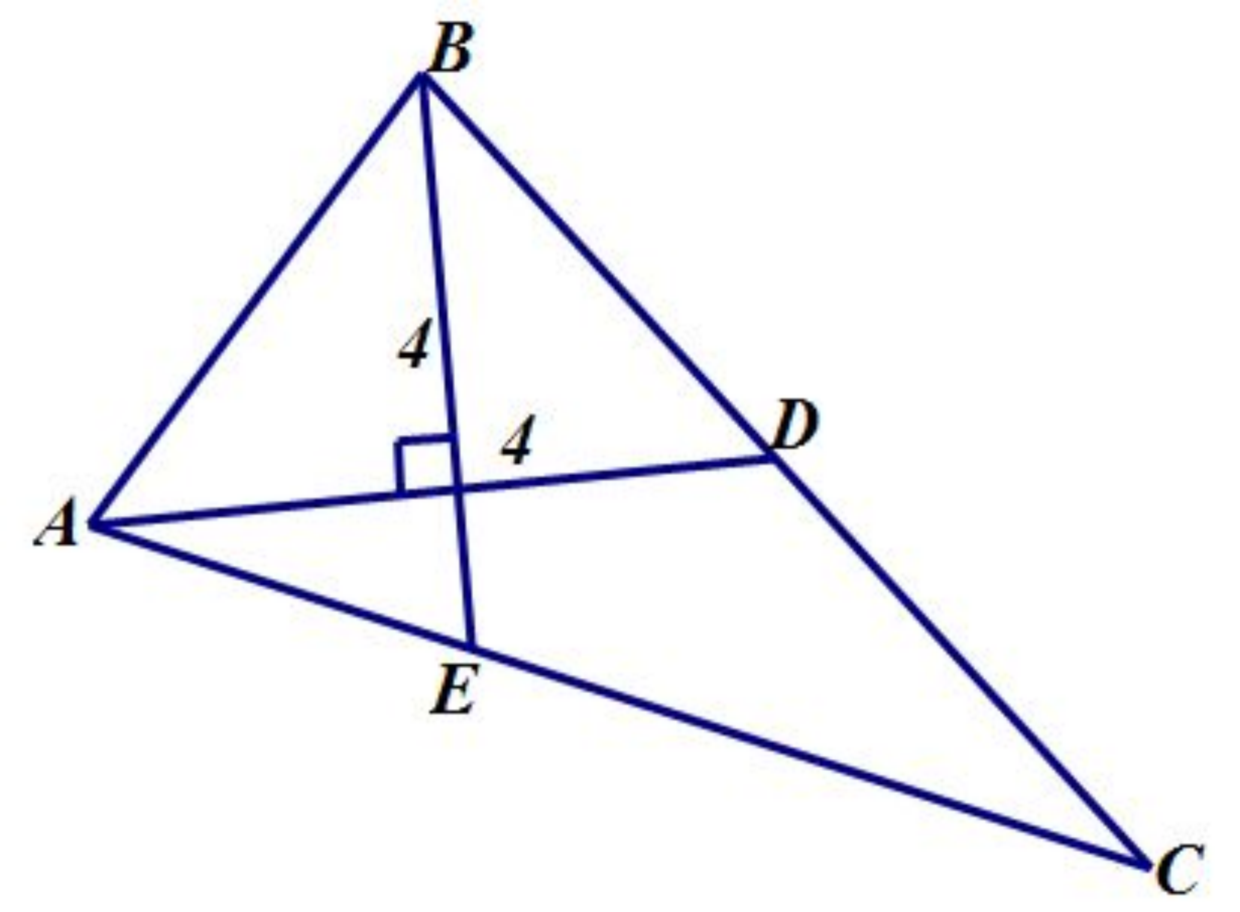
I тип – задачи, связанные с использованием операций сложения векторов и умножения вектора на число;

II тип – задачи с использованием операций скалярного умножения векторов и разложения вектора по базису.

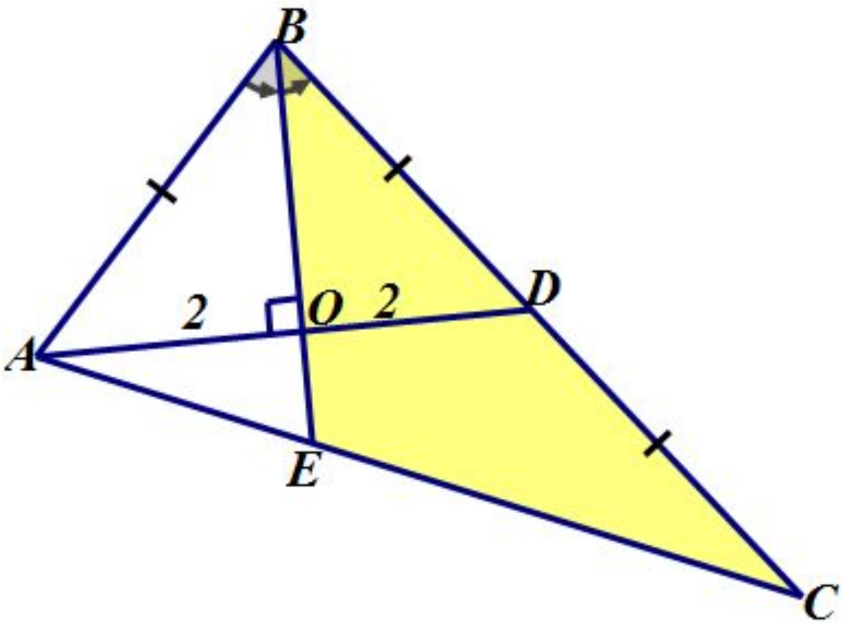
«Лучше решить задачу десятью способами, чем десять задач одним».

Дьёрдь Пойя

В треугольнике АВС биссектриса ВЕ и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 4. Найти стороны треугольника АВС.



*Метод дополнительных построений



В равнобедренном ΔABD

BO – биссектриса и высота, значит,

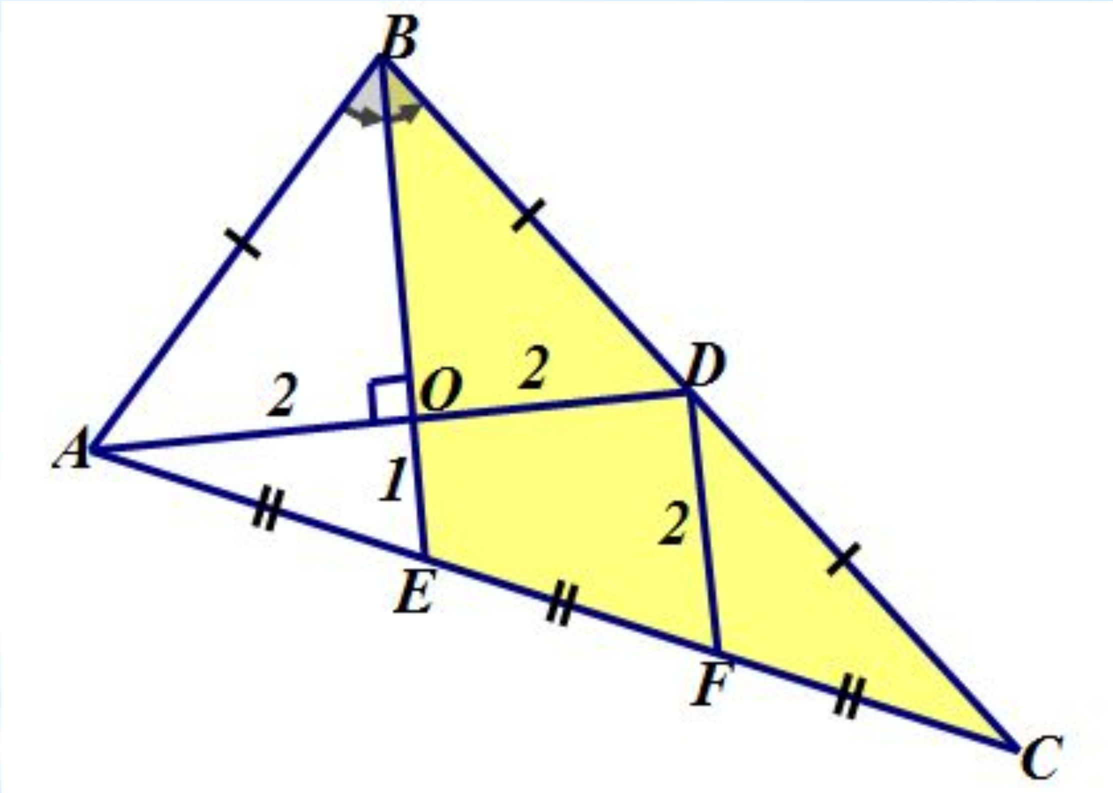
AO=OD=2,

AD – медиана ΔABC, тогда BC=2AB.

BE – биссектриса ΔABC, следовательно, EC=2AE.

Проведем среднюю линию DF ΔBCE. DF=2.
Тогда OE=1 как средняя линия ΔADF. BO=3.

ΔAOB прямоугольный.
По теореме Пифагора



AB= $\sqrt{AO^2+OB^2}$

AB= $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

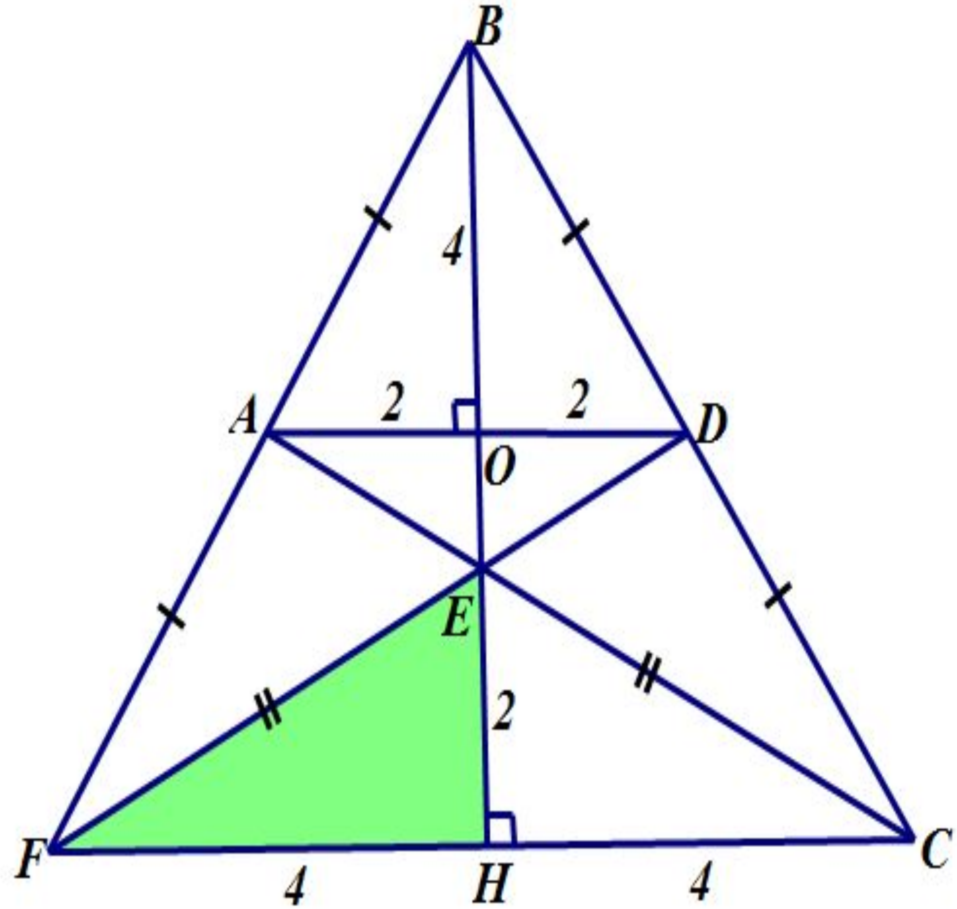
BC= $2\sqrt{13}$

AC=3AE.
AC=3 $\sqrt{AO^2+OE^2}=3\sqrt{2^2+1^2}=3\sqrt{5}$

* Метод геометрических преобразований

Построим точку F, симметричную точке C относительно BE:

$$F = AB \cap DE$$



Δ FBC равнобедренный,

E – точка пересечения медиан Δ FBC.

FE=EC= $\frac{2}{3}AC = \sqrt{FH^2 + EH^2} = 2\sqrt{5}$**, AC=** $3\sqrt{5}$.

BH=6, AD – средняя линия, значит BO=3.

$\sqrt{13}$

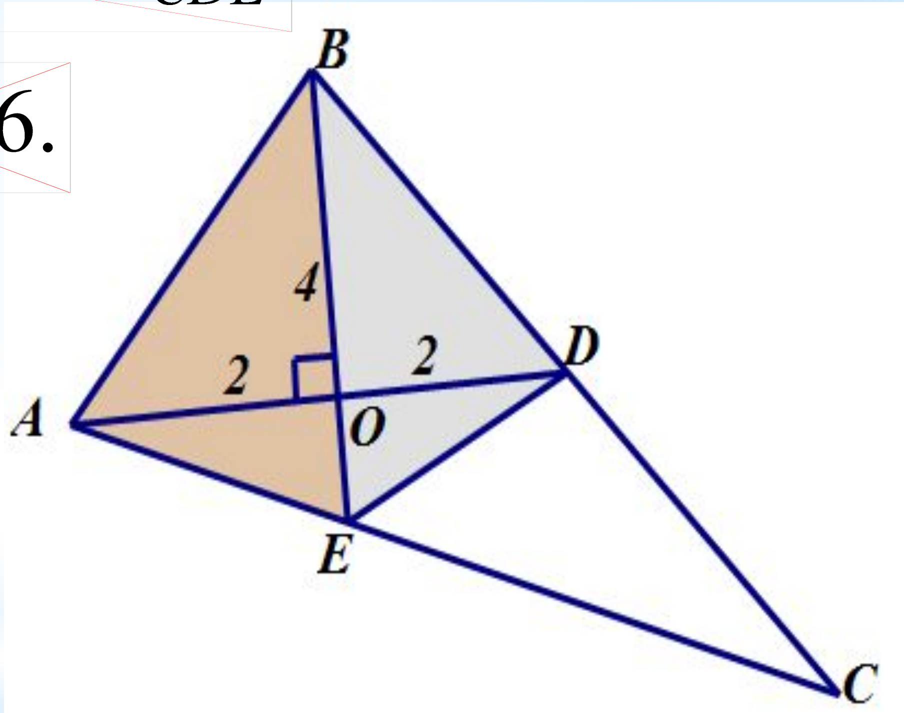
AB= $\sqrt{13}$

BC=2

Метод площадей

$\frac{1}{2}$ AO·BE = $S_{ABE} = S_{BDE} = 4 = S_{CDE}$

Тогда $S_{ABC} = 12$, а $S_{ABD} = 6.$



6=$\frac{1}{2}$AD·BO, AD=4,
откуда BO=3.

Далее воспользуемся теоремой Пифагора для отыскания сторон треугольника ABC.

*Координатный метод

Уравнение прямой

AC: $\frac{x-4}{-2-4}=\frac{y+b}{0+b}$

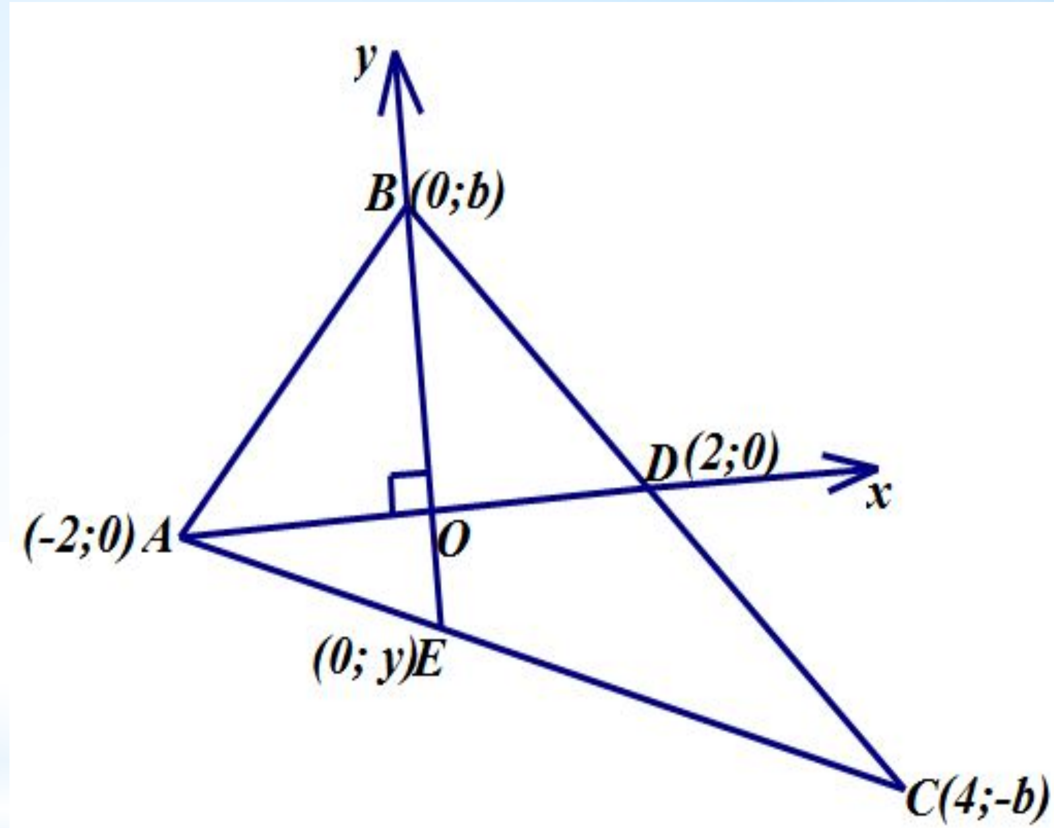
или $y=-\frac{b}{6}x-\frac{b}{3}$

E $\in$ AC, поэтому

E$(0;-\frac{b}{3})$. BE=4.

$$4=\sqrt{0^2+\frac{16b^2}{9}}=\frac{4b}{3}$$

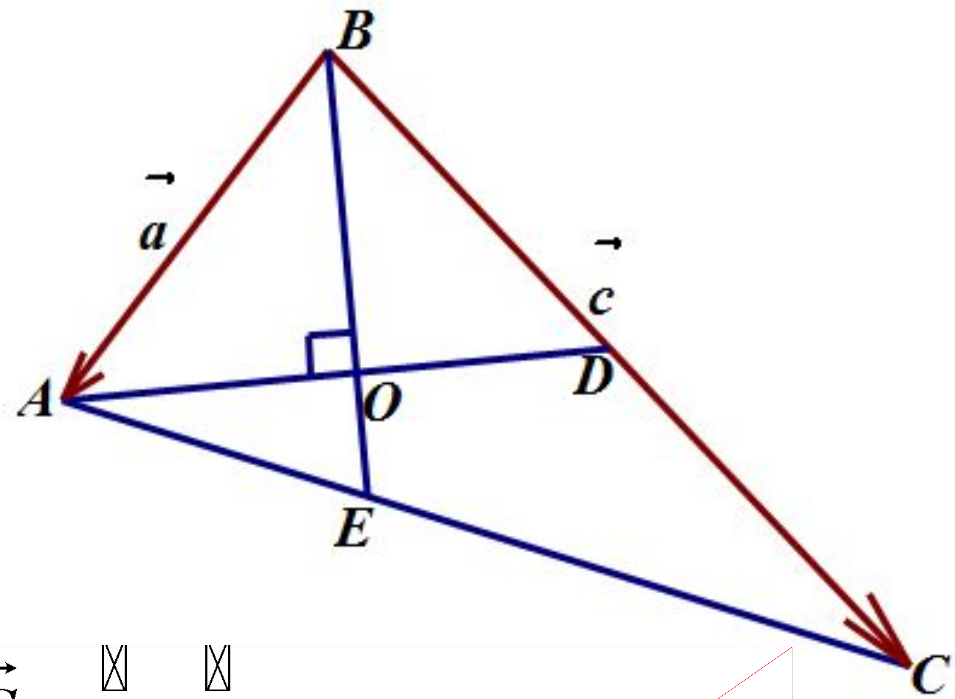
b=3. Остается найти стороны по теореме Пифагора



*Векторный метод

BE=4, $\overrightarrow{BE} = \dfrac{2\vec{a} + \vec{c}}{3}$

AD=4, $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}$



$$36 = 2a^2 + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$16 = 2a^2 - \vec{a}\cdot\vec{c}$$

$$a = \sqrt{13}, c = 2\sqrt{13}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$$

$$(\overrightarrow{AC})^2 = (\vec{c} - \vec{a})^2$$

$$\overrightarrow{AC}^2 = c^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{c} + a^2 =$$

$$= 5a^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{c} = 5\cdot 13 - 20 = 45$$

$$AC = 3\sqrt{5}.$$