Тема 2. Решение нелинейных уравнений

Тема 2. Решение нелинейных уравнений

Классификация нелинейных уравнений:

- **алгебраические;**
- **трансцендентные.**

Алгебраические

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

Алгебраическое уравнение порядка *n* имеет *n* корней, которые могут быть действительными или комплексными.

Нелинейные уравнения, содержащие тригонометрические или другие специальные функции, например $\lg x$ или e^x, называются трансцендентными.

Трансцендентные уравнения могут иметь неопределенное число решений.

Методы решения

Методы решения:

- **прямые;**
- **итерационные.**

Особенности итерационных методов:

- **полученное решение всегда является приближенным;**
- **в итерационных методах существует проблема сходимости.**

Область, в которой заданные исходные значения сходятся к решению, называют областью сходимости.

Итерационные методы решения нелинейных уравнений отличаются между собой областью сходимости и скоростью сходимости решения.

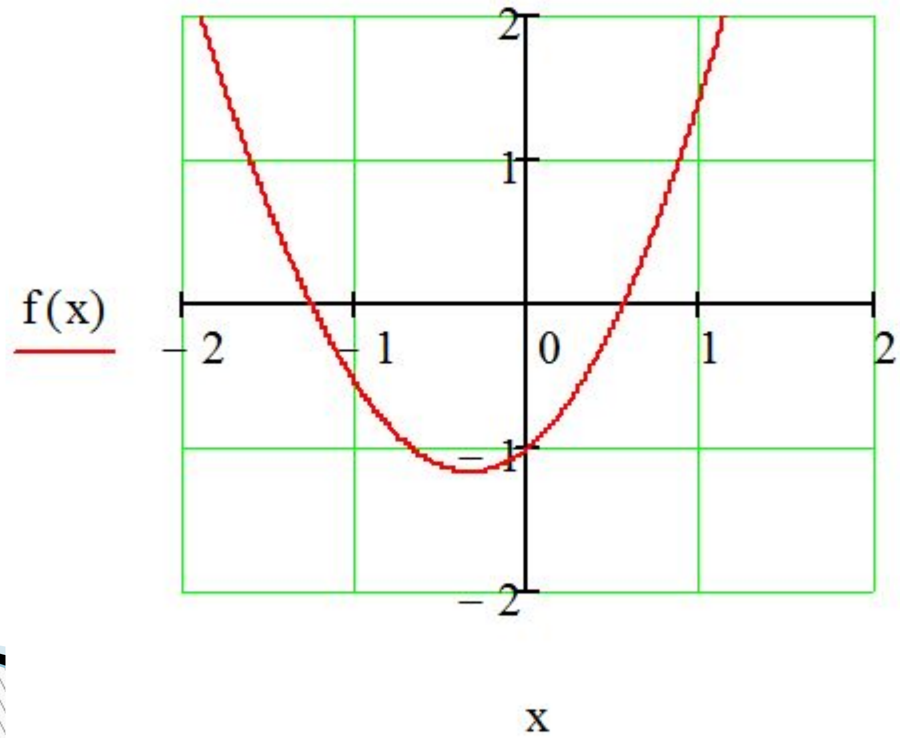
Решение нелинейных уравнений в Mathcad

root(<выражение>,<имя переменной>)

$$x^2 = \cos(x) - x$$

Решение нелинейного уравнения

$f(x) := x^2 - \cos(x) + x$



$x := -1.2$

$\mathrm{root}(f(x), x) = -1.251152$

$x := 0.5$

$\mathrm{root}(f(x), x) = 0.550009$

Вычисление корней полиномов

polyroots

$$4x^2 - 7x + 3 = 0$$

$$a := \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{polyroots}(a) = \begin{pmatrix} 0.75 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Корни комплексные

$$2x^4 - 1{,}4x^2 + 2{,}3x - 1{,}5 = 0$$

$$b := \begin{pmatrix} -1.5 \\ 2.3 \\ -1.4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{polyroots}(b) = \begin{pmatrix} -1.386 \\ 0.328 + 0.796i \\ 0.328 - 0.796i \\ 0.73 \end{pmatrix}$$

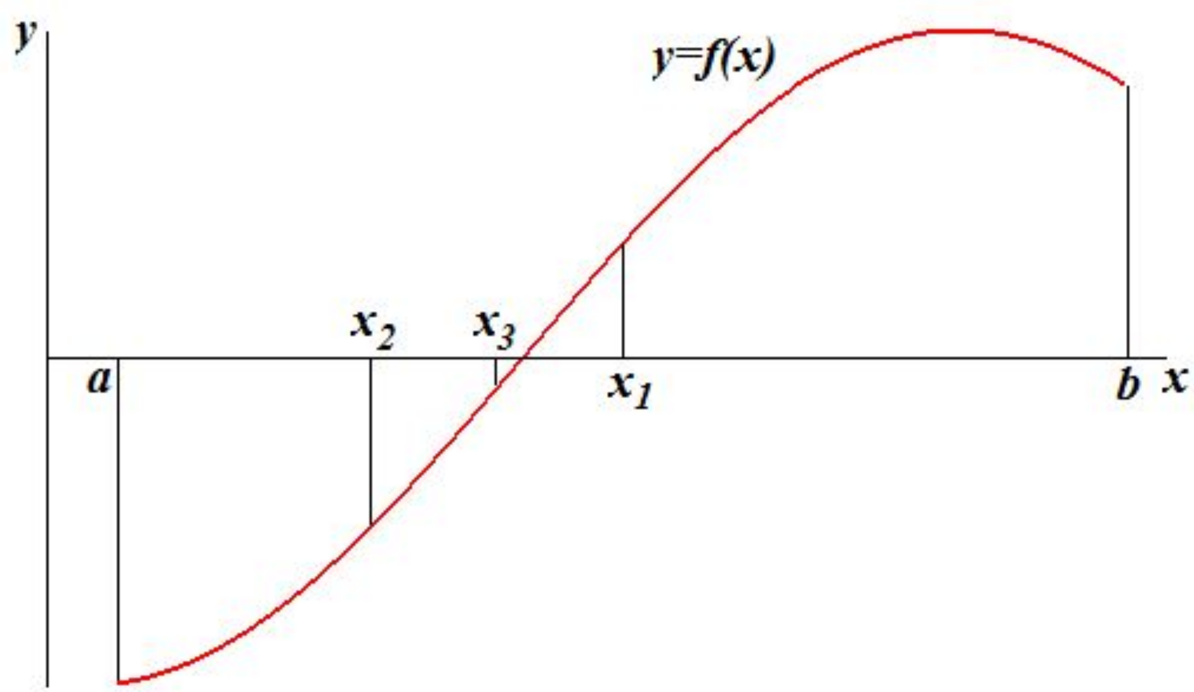
Итерационные методы решения

Итерационные методы решения:

- **метод половинного деления (бисекций);**
- **метод хорд;**
- **метод простой итерации;**
- **метод Ньютона.**

Метод половинного деления

В основе этого метода лежит свойство непрерывных функций, заключающееся в том, что если функция *f(x)* на концах отрезка [*a*,*b*] принимает значения разных знаков, т.е. *f(a)·f(b)<0*, то внутри этого отрезка содержится по меньшей мере один корень уравнения *f(x) = 0*.



Метод половинного деления

Преимущества:

- **сходится для любых непрерывных функций.**

Недостатки:

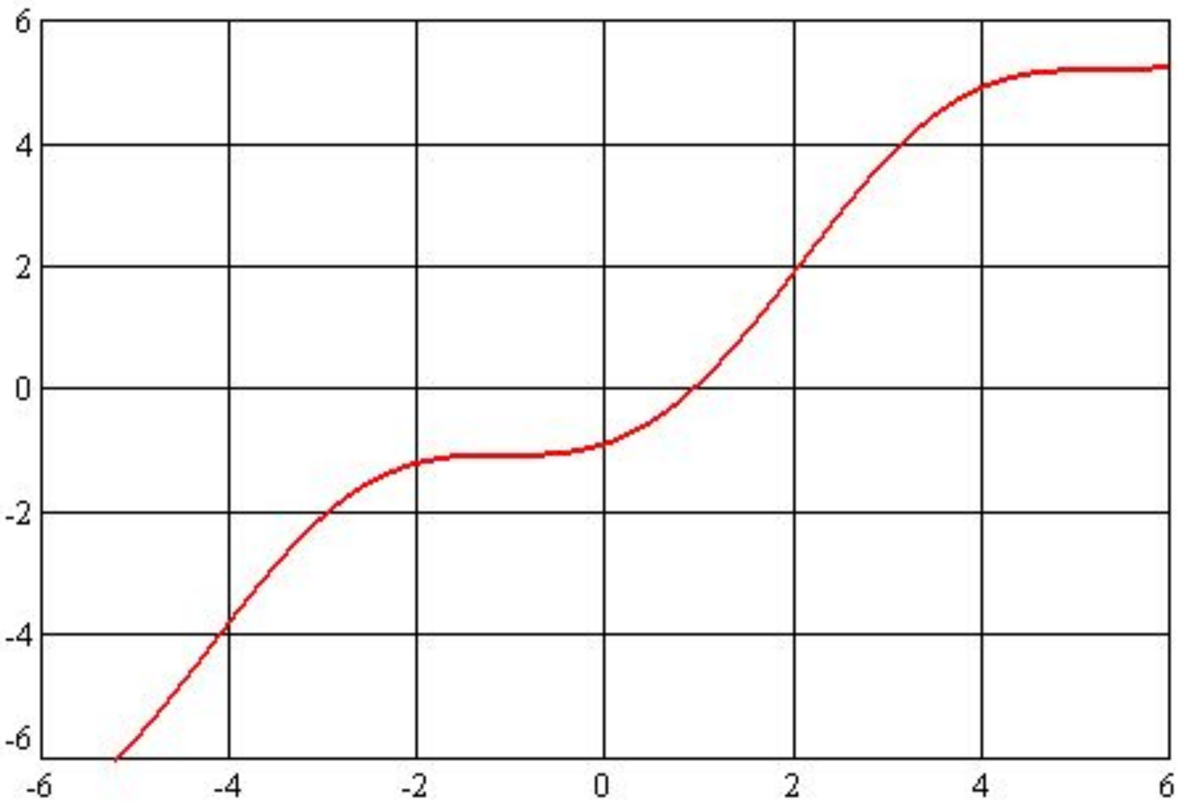
- **невелика скорость сходимости;**
- **неприменим для отыскания кратных корней четного порядка.**

Метод половинного деления

Пример:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = x$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - x = 0$$



Метод половинного деления

$$f(x) := \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - x$$

$a := 0$ $\quad b := 2$ $\quad f(a) = 0.866$ $\quad f(b) = -1.906$

$x := \frac{a+b}{2} = 1$ $\quad f(x) = -0.111$ $\quad b := x$

$x := \frac{a+b}{2} = 0.5$ $\quad f(x) = 0.5$ $\quad a := x$

$x := \frac{a+b}{2} = 0.75$ $\quad f(x) = 0.224$ $\quad a := x$

$x := \frac{a+b}{2} = 0.875$ $\quad f(x) = 0.064$ $\quad a := x$

$x := \frac{a+b}{2} = 0.938$ $\quad f(x) = -0.022$ $\quad b := x$

Метод половинного деления

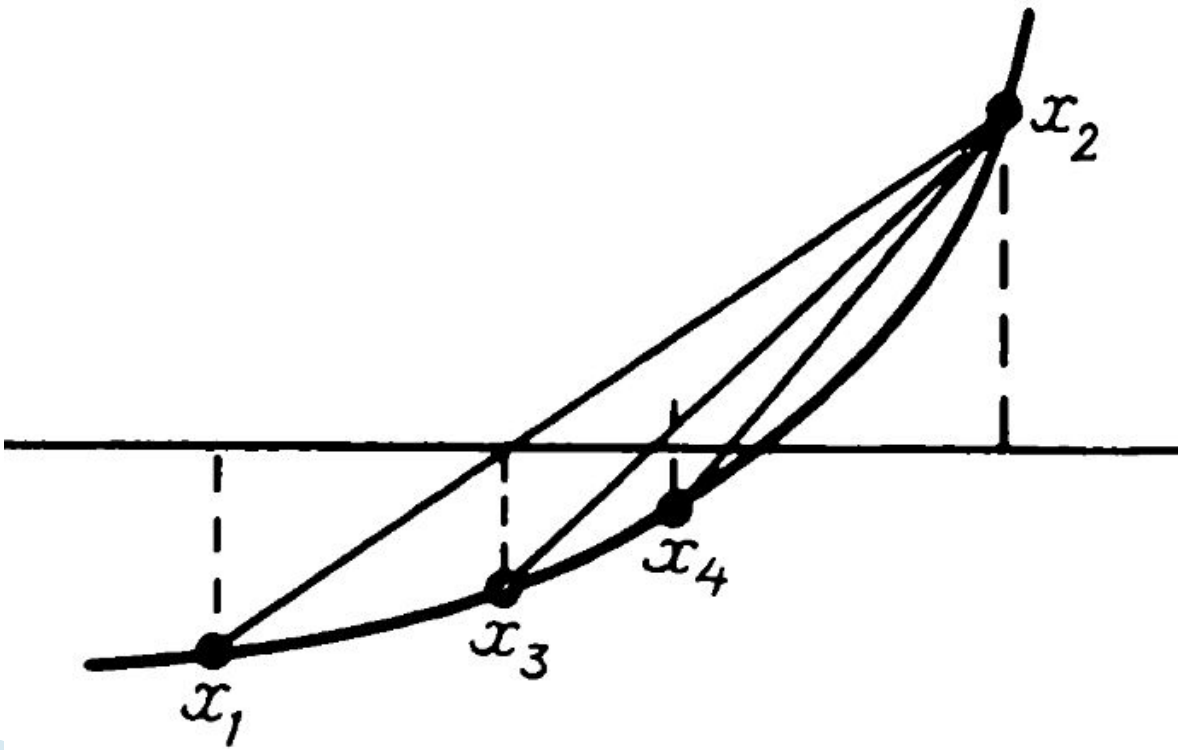
$$x := \frac{a+b}{2} = 0.906 \qquad f(x) = 0.021 \qquad a := x$$

$$x := \frac{a+b}{2} = 0.922 \qquad f(x) = -0.00014$$

$$x = 0.922$$

Метод хорд

В основе этого метода лежит свойство непрерывных функций, заключающееся в том, что если функция *f(x)* на концах отрезка [*a*,*b*] принимает значения разных знаков, т.е. *f(a)* ·*f(b)<0,* то внутри этого отрезка содержится по меньшей мере один корень уравнения *f(x) = 0*.



Метод простой итерации

Метод простой итерации уравнения f(x) = 0 состоит

1. **в замене исходного уравнения эквивалентным ему уравнением $x = \phi(x)$;**
2. **построении последовательности $x_{n+1} = \varphi(x_n)$.**

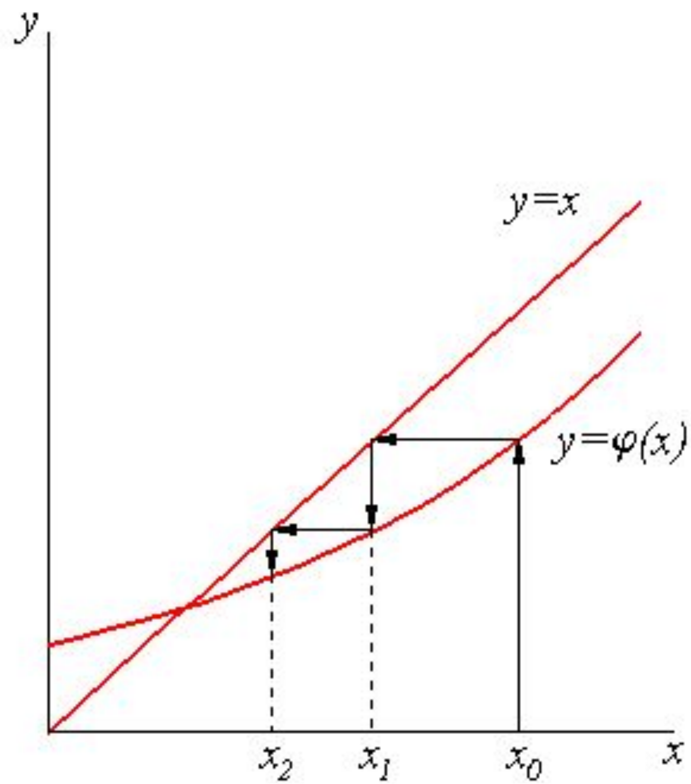
Установлено, что предел последовательности $x_0, x_1, \ldots x_n$ при $n \to \infty$, если он существует, является корнем уравнения f(x) = 0.

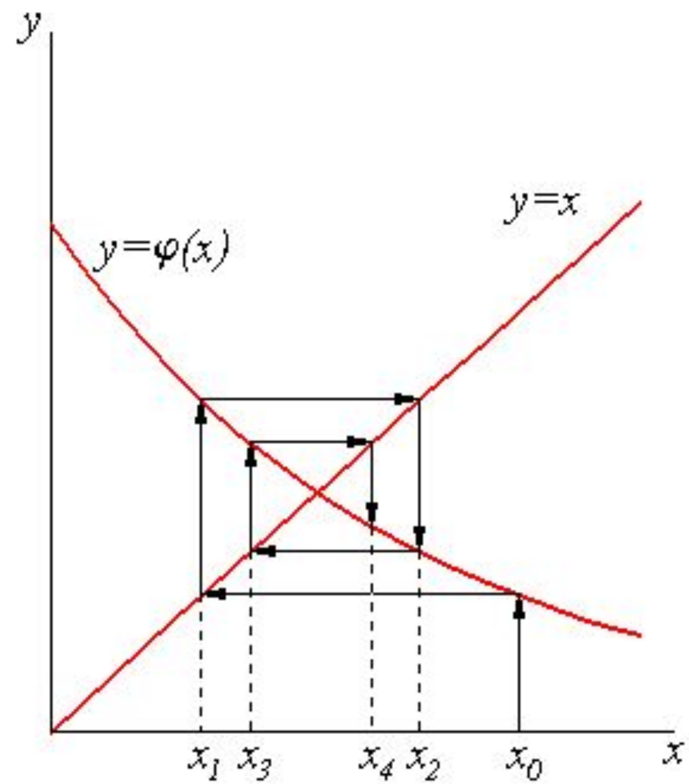
Условие сходимости $|\varphi'(x)| < 1$

Сходимость будет тем более быстрой, чем меньше величина $|\varphi'(x)|$.

Метод простой итерации

Геометрическая интерпретация метода простой итерации





Метод простой итерации

При использовании метода простой итерации основным моментом является выбор функции $\varphi(x)$ в уравнении $x = \varphi(x)$, эквивалентном исходному.

Для метода простой итерации следует подбирать функцию $\varphi(x)$ так, чтобы $|\varphi'(x_n)|<1$. При этом следует помнить, что скорость сходимости метода тем выше, чем меньше значение $|\varphi'(x_n)|$.

Пример: $e^x - 10x = 0$

Уравнения имеет 2 корня 0,112 и 3,577.

1-й корень – $x = 0{,}1e^x$,
2-й корень – $x = ln\ 10x$.

Метод простой итерации

Пример. Найти с точностью 10^{-3} корень уравнения $x - \cos x = 0$

$x = \cos x$

Реализация в Mathcad

Метод простой итерации

$\varphi(x) := \cos(x)$

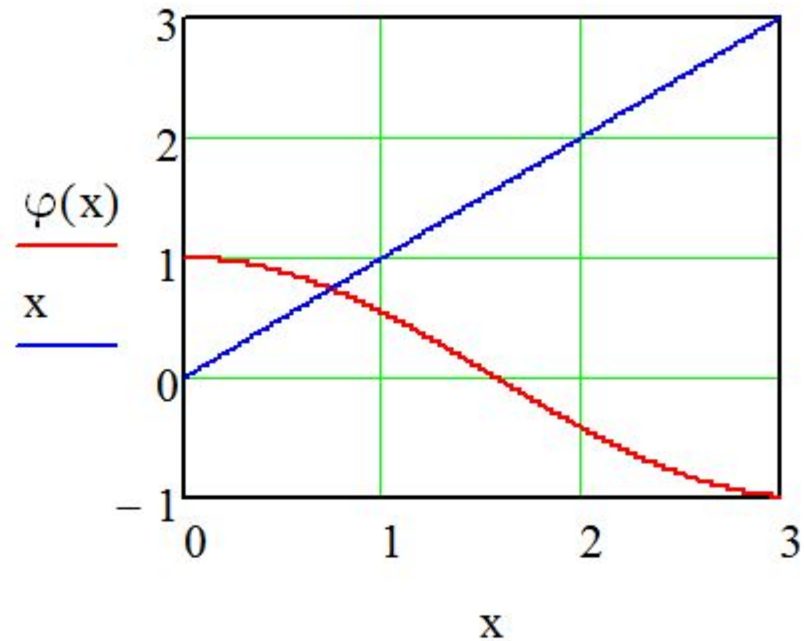
$x_0 := 0.75 \qquad -\sin(x_0) = -0.682$

$\varphi1(x) := \frac{d}{dx}\varphi(x) \qquad \varphi1(x_0) = -0.682$

$x_1 := \varphi(x_0) = 0.7317 \qquad |x_1 - x_0| = 0.0183$

$x_2 := \varphi(x_1) = 0.744 \qquad |x_2 - x_1| = 0.0124$

$x_3 := \varphi(x_2) = 0.7357 \qquad |x_3 - x_2| = 0.0083$



Метод простой итерации

$x_4 := \varphi(x_3) = 0.7413 \qquad |x_4 - x_3| = 0.0056$

$x_5 := \varphi(x_4) = 0.7376 \qquad |x_5 - x_4| = 0.0038$

$x_6 := \varphi(x_5) = 0.7401 \qquad |x_6 - x_5| = 0.0025$

$x_7 := \varphi(x_6) = 0.7384 \qquad |x_7 - x_6| = 0.0017$

$x_8 := \varphi(x_7) = 0.7395 \qquad |x_8 - x_7| = 0.0012$

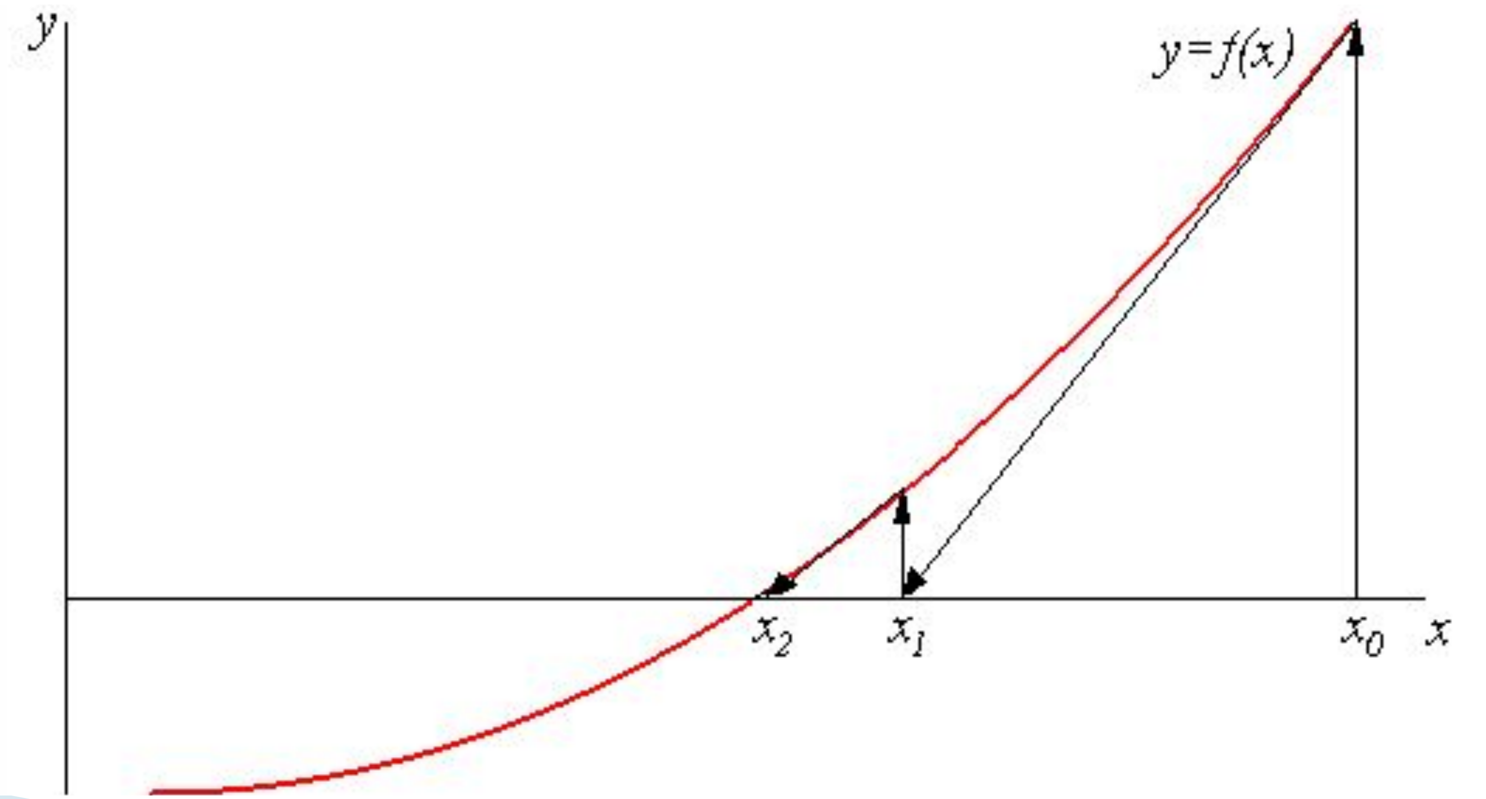
$x_9 := \varphi(x_8) = 0.7388 \qquad |x_9 - x_8| = 0.0008$ **$<10^{-3}$**

Решение уравнения x = 0,739

Метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Геометрическая интерпретация метода



Метод Ньютона

Пример. Найти с точностью 10^{-3} корень уравнения $x - \cos x = 0$

Реализация в Mathcad

Метод Ньютона

$f(x) := x - \cos(x)$

$$f\_Newton(x) := x - \frac{f(x)}{\frac{d}{dx}f(x)}$$

$x_0 := 0.8$

$x_1 := f\_Newton(x_0) = 0.739853$

$x_2 := f\_Newton(x_1) = 0.739085$ $\qquad |x_2 - x_1| = 7.68 \times 10^{-4}$

$x_3 := f\_Newton(x_2) = 0.739085$ $\qquad |x_3 - x_2| = 1.302 \times 10^{-7}$

Контрольные вопросы

1. Классификация уравнений.
2. Прямые и итерационные методы решения нелинейных уравнений.
3. Область сходимости и скорость сходимости решения нелинейного уравнения.
4. Алгоритм и геометрическая интерпретация метода половинного деления.
5. Алгоритм и геометрическая интерпретация метода хорд.
6. Алгоритм, основное соотношение, условие сходимости и геометрическая интерпретация метода простой итерации.
7. Алгоритм, основное соотношение и геометрическая интерпретация метода Ньютона.
8. Программа решения нелинейного уравнения с использованием метода половинного деления.
9. Программа решения нелинейного уравнения с использованием метода простой итерации.
10. Программа решения нелинейного уравнения с использованием метода Ньютона.
11. Решение нелинейного уравнения в MathCAD.

Задание №2

1. Найти все корни нелинейных уравнений с использованием программы Mathcad.
2. Найти с точностью 10^{-3} один из корней нелинейного уравнения с использованием метода половинного деления.
3. Найти с точностью 10^{-3} один из корней нелинейного уравнения с использованием метода хорд.
4. Найти с точностью 10^{-3} один из корней нелинейного уравнения с использованием метода простой итерации.
5. Найти с точностью 10^{-6} все корни нелинейного уравнения с использованием метода Ньютона.
6. Написать программу решения нелинейного уравнения методом половинного деления.
7. Написать программу решения нелинейного уравнения методом хорд.
8. Написать программу решения нелинейного уравнения методом простой итерации.
9. Написать программу решения нелинейного уравнения методом Ньютона.

Спасибо
за внимание!