

## СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

§ 11. Основные понятия

§ 12. Метод подстановки

§ 13. Метод алгебраического сложения

§ 14. Системы двух линейных уравнений  
с двумя переменными как математические  
модели реальных ситуаций

## § 13. МЕТОД АЛГЕБРАИЧЕСКОГО СЛОЖЕНИЯ

Метод алгебраического сложения заключается в следующем:  
Путем сложения или вычитания уравнений избавиться от одной из переменных.

Алгоритм решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными **методом сложения:**

1. Уравнять модули коэффициентов при одном из неизвестных (если необходимо).
2. *Сложить или вычесть* уравнения. Решить полученное уравнение с одной переменной, найти неизвестное.
3. Подставить найденное на втором шаге значение переменной в одно из уравнений исходной системы, найти второе неизвестное.
4. Записать ответ.

# Пример № 1.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ 2x + y - 7 = 0. \end{cases}$$

1. Уравнять модули коэффициентов при одном из неизвестных (если необходимо).

В данном случае, при  $y$  в первом уравнении стоит  $-1$ , во втором  $1$ . Следовательно модули коэффициентов уже уравнены.

# Пример № 1.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ 2x + y - 7 = 0. \end{cases}$$

2. Сложить или вычесть уравнения. Решить полученное уравнение с одной переменной, найти неизвестное.

$$+ \begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ 2x + y - 7 = 0; \end{cases}$$

$$\hline (3x - y - 5) + (2x + y - 7) = 0 + 0;$$

$$5x - 12 = 0;$$

$$x = \frac{12}{5}.$$

Найдем чему равен  $x$ .

$$x = 1\frac{2}{5}.$$

Сложим два данных уравнений. Сложим левые части уравнений отдельно, правые части отдельно.

Приведем подобные слагаемые.

# Пример № 1.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ 2x + y - 7 = 0. \end{cases}$$

3. Подставить найденное на втором шаге значение переменной в одно из уравнений исходной системы, найти второе неизвестное.

Затем можно было найденное значение  $x$  подставить в любое уравнение системы, например в первое, и найти  $y$ :

$$3 \cdot \frac{12}{5} - y - 5 = 0;$$

$$\frac{36}{5} - 5 = y;$$

$$y = \frac{11}{5}.$$

$$y = 1\frac{1}{5}.$$

# Пример № 1.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x - y - 5 = 0, \\ 2x + y - 7 = 0. \end{cases}$$

4. Записать ответ.

**Ответ:**  $(1\frac{2}{5}; 1\frac{1}{5})$

# Рассмотрим ещё один пример.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 5x + 3y = 7. \end{cases}$$

1) Т.к. коэффициенты при  $y$  одинаковые, вычтем из первого уравнения системы второе.

$$\begin{array}{r} \begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 5x + 3y = 7; \end{cases} \\ \hline (2x + 3y) - (5x + 3y) = 1 - 7; \\ 2x + 3y - 5x - 3y = -6; \\ -3x = -6; \\ x = 2. \end{array}$$

2) Подставим полученное значение переменной, к примеру, в первое уравнение системы..

$$2x + 3y = 1:$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 + 3y &= 1; \\ 3y &= 1 - 4; \\ 3y &= -3; \\ y &= -1. \end{aligned}$$

3) Пара  $x = 2, y = -1$  — решение заданной системы.  
Ответ:  $(2; -1)$ .

Задания:

№13.2, 13.4 (а,б), 13.5 (в,г).

№13.10; 13.11, 13.17 (а)

$$\text{№13.2} \quad \text{a) } \begin{cases} 2x + 11y = 15, \\ 10x - 11y = 9; \end{cases}$$

Заметим, что в первом уравнении коэффициент при  $y$  11, а во втором -11, удобнее два уравнения сложить.

$$+ \begin{cases} 2x + 11y = 15, \\ 10x - 11y = 9; \end{cases}$$

$$(2x + 11y) + (10x - 11y) = 15 + 9$$

$$(2x + 10x) + (11y - 11y) = 15 + 9$$

$$12x = 24$$

$$x = 2$$

Подставим найденное значение  $x$ , к примеру, в первое уравнение системы и найдем соответствующее значение  $y$ .

$$2x + 11y = 15$$

$$2 \cdot 2 + 11y = 15$$

$$4 + 11y = 15$$

$$11y = 15 - 4$$

$$11y = 11$$

$$y = 1$$

Ответ: (2 ; 1)

# №13.2

$$\text{в) } \begin{cases} x - 6y = 17, \\ 5x + 6y = 13; \end{cases}$$

Аналогично примеру а

$$\text{б) } \begin{cases} 9y + 13x = 35, \\ 29y - 13x = 3; \end{cases}$$

Аналогично примеру а,  
только сначала найдём  
переменную у, затем  
переменную х.

Аналогично примеру а,  
только сначала найдём  
переменную у, затем  
переменную х.

$$\text{г) } \begin{cases} 9x - 7y = 19, \\ -9x - 4y = 25. \end{cases}$$

№ 13.4

$$\text{а) } \begin{cases} 4x - 7y = 30, \\ 4x - 5y = 90; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -5x + 7y = 6, \\ 2x + 7y = 76; \end{cases}$$

Заметим, что в первом и во втором уравнениях коэффициенты при  $x$  совпадают. Удобнее будет вычитать.

$$\begin{cases} 4x - 7y = 30, \\ 4x - 5y = 90; \end{cases}$$

Подставим найденное значение  $y$ , к примеру, в первое уравнение системы и найдем соответствующее значение  $x$ .

$$(4x - 7y) - (4x - 5y) = 30 - 90$$

$$4x - 7y - 4x + 5y = 30 - 90$$

$$(4x - 4x) + (-7y + 5y) = -60$$

$$-7y + 5y = -60$$

$$-2y = -60$$

$$y = 30$$

$$4x - 7y = 30$$

$$4x - 7 \cdot 30 = 30$$

$$4x - 210 = 30$$

$$4x = 30 + 210$$

$$4x = 240$$

$$x = 60$$

Аналогично примеру а, только сначала найдём переменную  $x$ , затем переменную  $y$ .

Ответ: (60 ; 30)

$$\textcircled{13.5.} \text{ а) } \begin{cases} x - 3y = 5, \\ 3x + 2y = 4; \end{cases}$$

В номере 13.5 трудность возникает в том, что в первом и во втором уравнении коэффициенты при переменных разные!

Значит, первое, что необходимо сделать: уравнивать модули коэффициентов при одном из неизвестных.

Умножим и левую и правую части первого уравнения на 3.

ЗАЧЕМ?

Чтобы, в первом и во втором уравнении при  $x$  был коэффициент 3.

Так удобнее, логичнее и легче.

Затем вычтем из первого уравнения второе.

$$\begin{cases} 3 \cdot (x - 3y) = 3 \cdot 5 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 9y = 15 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$(3x - 9y) - (3x + 2y) = 15 - 4$$

$$3x - 9y - 3x - 2y = 15 - 4$$

$$(3x - 3x) + (-9y - 2y) = 11$$

$$-9y - 2y = 11$$

$$-11y = 11$$

$$y = -1$$

Подставим найденное значение  $y$ , к примеру, во второе уравнение системы и найдем соответствующее значение  $x$ .

$$3x + 2y = 4 \quad x = 2$$

$$3x + 2 \cdot (-1) = 4$$

$$3x - 2 = 4$$

$$3x = 4 + 2$$

$$3x = 6$$

Ответ:  $(2; -1)$

$$\circ 13.5. \quad 6) \quad \begin{cases} 3x + y = 1, \\ 2x - 5y = -22; \end{cases}$$

В номере 13.5 трудность возникает в том, что в первом и во втором уравнении коэффициенты при переменных разные!

Значит, первое, что необходимо сделать: уравнивать модули коэффициентов при одном из неизвестных.

Умножим и левую и правую части первого уравнения на 5.

ЗАЧЕМ?

Чтобы, в первом и во втором уравнении при  $x$  был коэффициент 5.

Так удобнее, логичнее и легче.

Затем сложим первого уравнения и второе.

$$\begin{cases} 5 \cdot (3x + y) = 5 \cdot 1 \\ 2x - 5y = -22 \end{cases}$$
$$+ \begin{cases} 15x + 5y = 5 \\ 2x - 5y = -22 \end{cases}$$

$$(15x + 5y) + (2x - 5y) = 5 + (-22)$$

$$(15x + 2x) + (5y - 5y) = 5 - 22$$

$$17x = -17$$

$$x = -1$$

Подставим найденное значение  $x$ , к примеру, во второе уравнение системы и найдем соответствующее значение  $x$ .

$$2x - 5y = -22$$

$$2 \cdot (-1) - 5y = -22$$

$$5y = 20$$

$$-2 - 5y = -22$$

$$y = 4$$

$$-2 + 22 = 5y$$

Ответ:  $(-1 ; 4)$

o13.5.

**В)** 
$$\begin{cases} 2x - 3y = 9, \\ x + 2y = 1; \end{cases}$$

Умножим и левую и правую части второго уравнения на 2.

**ЗАЧЕМ?**

Чтобы, в первом и во втором уравнении при  $x$  был коэффициент 2.

Так удобнее, логичнее и легче.

Затем вычтем из первого уравнения второе.

**Г)** 
$$\begin{cases} 5x + y = 24, \\ 7x + 4y = 18. \end{cases}$$

Умножим и левую и правую части первого уравнения на 4.

**ЗАЧЕМ?**

Чтобы, в первом и во втором уравнении при  $y$  был коэффициент 4.

Так удобнее, логичнее и легче.

Затем вычтем из первого уравнения второе.

# № 13. 10.

Трудность заключается в том, что при переменных коэффициенты отличны от 1.

Придётся искать НОК коэффициентов, чтобы привести к одному коэффициенту при  $x$ .

**Решите систему уравнений:**

$$а) \begin{cases} 4x + 15y = -42, \\ -6x + 25y = -32; \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 3, а второе уравнение на 2, чтобы при  $x$  был одинаковый коэффициент 12. Т.е. мы нашли НОК 4 и 6 – 12.

Затем сложим два уравнения.

$$\begin{cases} 3 \cdot (4x + 15y) = 3 \cdot (-42) \\ 2 \cdot (-6x + 25y) = 2 \cdot (-32) \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 12x + 45y = -126 \\ -12x + 50y = -64 \end{cases}$$
$$(12x - 12x) + (45y + 50y) = -126 + (-64)$$

$$95y = -190$$

$$y = -2$$

Подставим найденное значение  $y$ , к примеру, во второе уравнение системы и найдем соответствующее значение  $x$ .

$$-6x + 25y = -32$$

$$-6x + 25 \cdot (-2) = -32 \quad x = -3$$

$$-6x - 50 = -32$$

$$-6x = 50 - 32$$

$$-6x = 18$$

**Ответ: (-3 ; -2)**

# № 13. 10.

Трудность заключается в том, что при переменных коэффициенты отличны от 1.

Придётся искать НОК коэффициентов, чтобы привести к одному коэффициенту при  $x$ .

**Решите систему уравнений:**

$$6) \begin{cases} 9x + 8y = -53, \\ 15x + 12y = -27; \end{cases}$$

Для начала, заметим, что каждый элемент второго уравнения можно разделить на 3.

$$\begin{cases} 9x + 8y = -53 \\ 5x + 4y = -9 \end{cases}$$

Умножим второе уравнения на 2, чтобы уровнять коэффициенты при  $y$ . Затем вычтем из первого уравнения второе.

$$\begin{cases} 9x + 8y = -53 \\ 10x + 8y = -18 \end{cases}$$

$$- \begin{cases} 9x + 8y = -53 \\ 10x + 8y = -18 \end{cases}$$

$$(9x + 8y) - (10x + 8y) = -53 - (-18)$$

$$9x + 8y - 10x - 8y = -53 + 18$$

$$(9x - 10x) + (8y - 8y) = -35$$

$$-x = -35$$

$$x = 35$$

Подставим найденное значение  $x$ , к примеру, в первое уравнение системы и найдем соответствующее значение  $y$ .

$$9x + 8y = -53$$

$$9 \cdot 35 + 8y = -53$$

$$315 + 8y = -53$$

$$8y = -53 - 315$$

$$8y = -368$$

$$y = -46$$

**Ответ: (35 ; -46)**

№ 13. 10.

**В)** 
$$\begin{cases} 12x - 35y = 25, \\ -8x - 15y = -55; \end{cases}$$

**Г)** 
$$\begin{cases} 25x - 24y = -21, \\ 10x - 9y = 3. \end{cases}$$

Первое уравнение умножим на 2, а второе уравнение на 4.

**ЗАЧЕМ?**

Чтобы, в первом и во втором уравнении при  $x$  был коэффициент **24**.

Так удобнее, логичнее и легче.

Затем сложим первое и второе уравнение системы.

Первое уравнение умножим на 2, а второе уравнение умножим на 5.

**ЗАЧЕМ?**

Чтобы, в первом и во втором уравнении при  $x$  был коэффициент **50**.

Так удобнее, логичнее и легче.

Затем вычтем из первого уравнения второе.

# № 13.11

Трудность заключается в том, что при переменных коэффициенты отличны от 1 и представляют собой дроби.

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 1, \\ 6x - 5y = 3; \end{cases}$$

$$- \begin{cases} 6x - 4y = 12 \\ 6x - 5y = 3 \end{cases}$$

$$(6x - 4y) - (6x - 5y) = 12 - 3$$

$$6x - 4y - 6x + 5y = 9$$

$$(6x - 6x) + (-4y + 5y) = 9$$

$$y = 9$$

Умножим первое уравнение на 12, чтобы и в первом и во втором уравнении при  $x$  был коэффициент 6, заодно избавимся от дробей.

Затем вычтем из первого уравнения второе.

$$\frac{1}{2}x \cdot 12 = \frac{1 \cdot 12}{2} \cdot x = 6x$$

Подставим найденное значение  $y$ , к примеру, во второе уравнение системы и найдем соответствующее значение  $x$ .

$$6x - 5y = 3$$

$$6x - 5 \cdot 9 = 3$$

$$6x - 45 = 3$$

$$6x = 48$$

$$x = 8$$

Ответ: (8 ; 9)

№ 13.11

б) 
$$\begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y = 11, \\ \frac{3}{5}x - 2y = 8; \end{cases}$$

в) 
$$\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y = 4, \\ \frac{4}{5}x - 3y = 7; \end{cases}$$

г) 
$$\begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{1}{4}y = -1, \\ 2x - 3y = -54. \end{cases}$$

Первое уравнение умножим на 45, а второе уравнение умножим на 25.  
Зачем?

Чтобы в первом и во втором уравнении системы коэффициент при  $x$  был одинаковый, в данном случае - 15.  
Затем, из первого уравнения вычтем второе.

Первое уравнение умножим на 48, а второе уравнение умножим на 15.  
Зачем?

Чтобы в первом и во втором уравнении системы коэффициент при  $x$  был одинаковый, в данном случае - 12.  
Затем, из первого уравнения вычтем второе.

Первое уравнение умножим на 20, а второе уравнение умножим на 22.  
Зачем?

Чтобы в первом и во втором уравнении системы коэффициент при  $x$  был одинаковый, в данном случае - 2.  
Затем, из первого уравнения вычтем второе.

# № 13.17

При каких значениях  $a$  и  $b$  решением системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} ax + by = 36, \\ ax - by = 8 \end{cases} \text{ является пара чисел } (2; -1)?$$

Ответить на этот вопрос очень просто, если решили всё то, что было задано до этого.

1. Подставим и в первое и во второе уравнения системы вместо  $x$  и  $y$  конкретные числа  $(2; -1)$ .
2. Затем решим систему с двумя переменными  $a$  и  $b$  методом алгебраического сложения.

$$+ \begin{cases} 2a - b = 36 \\ 2a + b = 8 \end{cases}$$

$$(2a - b) + (2a + b) = 36 + 8$$

$$(2a + 2a) + (-b + b) = 44$$

$$4a = 44$$

$$a = 11$$

Подставим найденное значение  $a$ , к примеру, в первое уравнение системы и найдем соответствующее значение  $b$ .

$$2a + b = 8$$

$$2 \cdot 11 + b = 8$$

$$22 + b = 8$$

$$b = 8 - 22$$

$$b = -14$$

Ответ:  $(11; -14)$

# №12.20

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3, \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{1}{3}; \end{cases} \\ \text{б) } & \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 5, \\ 5x - 11y = 1; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } & \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = -4, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = -2; \end{cases} \\ \text{г) } & \begin{cases} 4x + 7y = 1, \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{6} = -\frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Первое, что мы делаем в данном уравнении избавляемся от дробей, для этого нужно левую и правую части уравнения умножить на такое число, чтобы сократились знаменатели и эти числа.

Рассмотрим пример а.

И в первом и во втором уравнении удобнее всего умножить и левую и правую части уравнений на 6.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ x + 1,5y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ x = 1 - 1,5y \end{cases}$$

Теперь разделим второе уравнение на 2, чтобы выразить x и решаем точно также как и все остальные из пункта 12 методом подстановки.