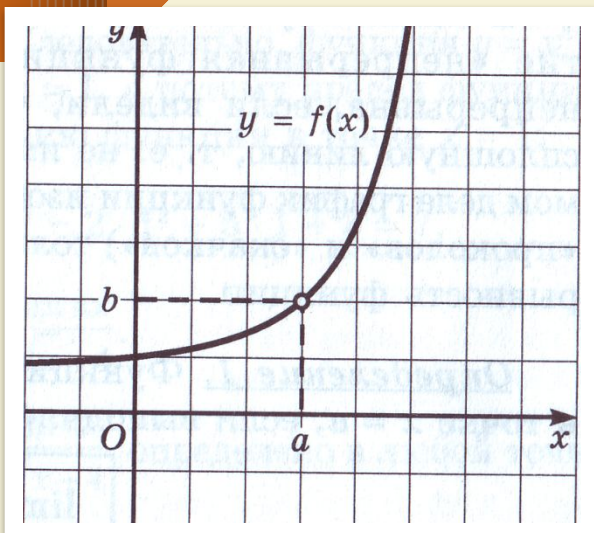
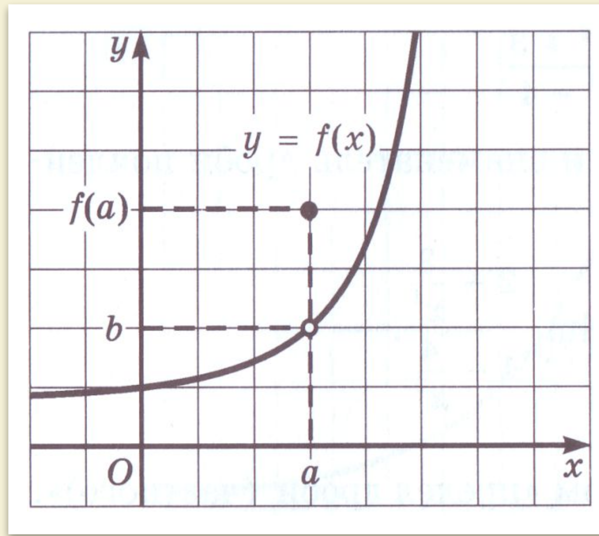
Предел функции в точке

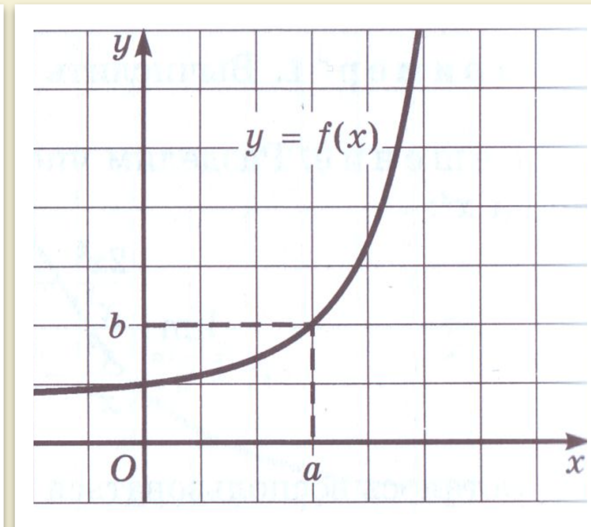
Одна и та же кривая,
три разные функции

*

Отличие – поведение в точке x = a





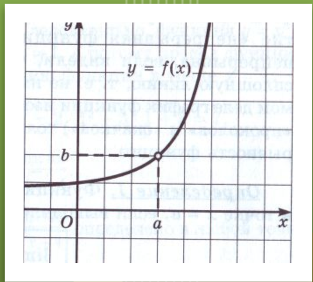


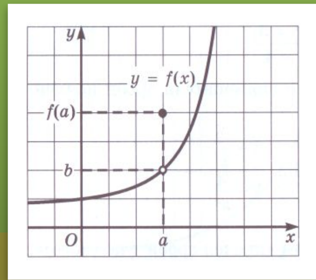
f(a) – не существует, т.к. в точке x =a функция y = f(x) не определена

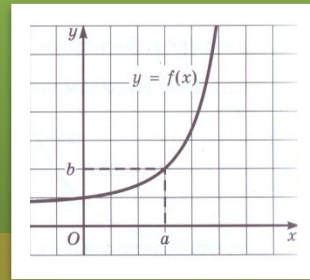
f(a) существует, но отличается от b

f(a) = b

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$







Какую из трех функций естественно считать непрерывной?

Определение. **Функцию y = f(x) называют непрерывной в точке x = a, если выполняется соотношение**

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Функцию y = f(x) называют непрерывной на промежутке X, если она непрерывна в каждой точке промежутка.

Если выражение f(x) составлено из рациональных, иррациональных, тригонометрических и обратных тригонометрических выражений, то функция y = f(x) непрерывна в любой точке , в которой определено выражение f(x).

*

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИИ

Правила вычисления пределов.

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, то

1.Предел суммы равен сумме пределов.

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = b+c$$

2. Предел произведения равен произведению пределов

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x) = b \cdot c$$

3. Предел частного равен частному пределов (с≠о)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = b/c$$

4. $$\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{sint}{t} = 1}$$

Вычисление пределов

Вычисление предела: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

начинают с подстановки предельного значения x_0 в функцию f(x).

Если при этом получается конечное число, то предел равен этому числу.

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x - 1}{x^2} = \frac{3 \cdot 1 - 1}{1^2} = 2$$

Если при подстановки предельного значения x_0 в функцию f(x) получаются выражения вида:

$$\frac{C}{0} = \infty \qquad \frac{C}{\infty} = 0$$

то предел будет равен:

Вычисление пределов

Часто при подстановке предельного значения x_0 в функцию f(x) получаются выражения следующих видов:

$$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad 0\cdot\infty;\quad 1^{\infty};\quad 0^{0};\quad 0^{\infty};\quad \infty^{0};\quad \infty-\infty$$

Эти выражения называются неопределенности, а вычисление пределов в этом случае называется раскрытие неопределенности.

*

Примеры вычисления пределов

$$\lim_{x\to 1}(x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2\cdot 1^2 + 5\cdot 1 + 3 = 7$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin\pi x}{\sqrt{x}+4} = \frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2}+4} = \frac{0}{\sqrt{2}+4} = 0$$

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{4x+12} = \lim_{x\to -3}\frac{(x-3)(x+3)}{4(x+3)} = \lim_{x\to -3}\frac{(x-3)}{4} = \frac{-3-3}{4} = -1,5$$

Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+16)}{\cancel{(x-2)}(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{18}{-2}=-9$$

Если f(x) – дробно – рациональная функция, необходимо разложить на множители числитель и знаменатель дроби

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x+1-1}}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

Если f(x) – иррациональная дробь, необходимо умножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю.

Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^2}{x^2}+\dfrac{3x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{4x^2}{x^2}+\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{5}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\left[\frac{C}{\infty}=0\right]=\frac{2+0+0}{4+0+0}=\frac{1}{2}$$

Если f(x) – дробно - рациональная функция или иррациональная дробь необходимо разделить числитель и знаменатель дроби на х в старшей степени

Раскрытие неопределенностей

- Раскрытие неопределенности $\infty - \infty$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right) = \left[\infty - \infty\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

Умножим и разделим функцию на сопряженное выражение.

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$= \frac{2}{\infty} = 0$$

Первый замечательный предел

$$\boxed{\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2$$

$$=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\right)^2=2\left(\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}\right)^2=$$

$$=2\left(2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2=2(2\cdot 1)^2=8$$

*

Выполнить задания

- В классе:
- №39.23(а,б)-№39.25(а,б);
- № 39.29(а,б)

- Дома:
- №39.23(в,г);
- № 39.27(в,г);
- №39.29(в)

Предел функции на бесконечности.

Предел функции на плюс бесконечности.

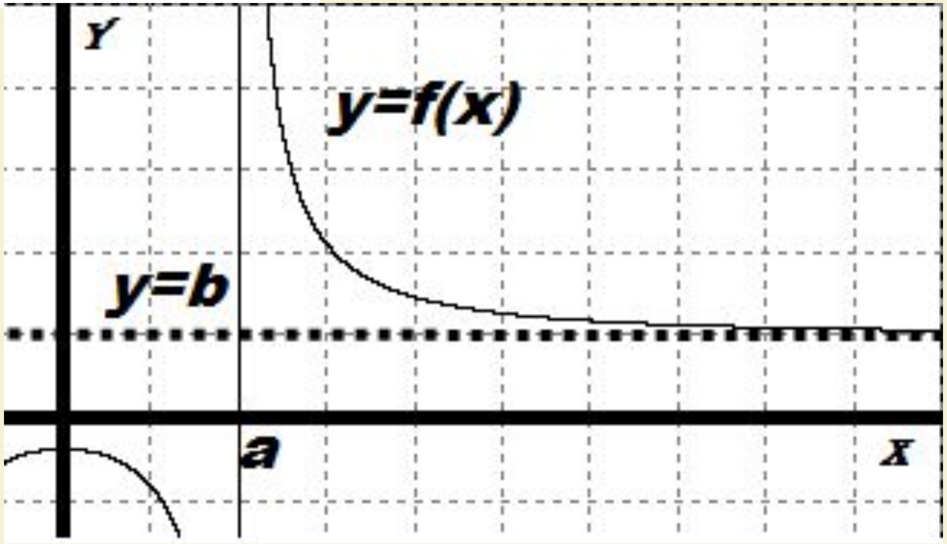
Теперь давайте перейдем к пределу функции на бесконечности:

Пусть у нас есть функция y=f(x), область определения нашей функции содержит луч [a; +∞), и пусть прямая y=b является горизонтальной асимптотой графика функции y=f(x), запишем все это на математическом языке:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$$

Будем читать наше выражение как:

предел функции y=f(x) при x стремящимся к плюс бесконечности равен b



Предел функции на бесконечности.

Предел функции на минус бесконечности.

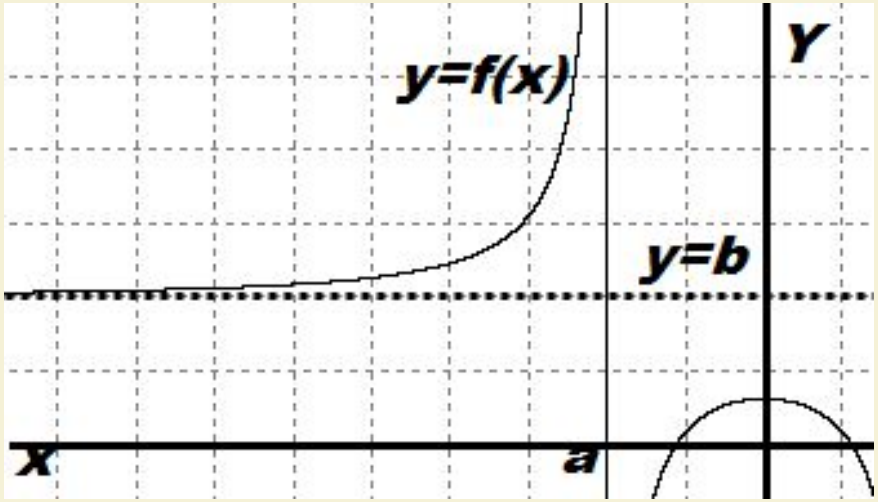
Посмотрим немного другой случай:

Пусть у нас есть функция y=f(x), область определения нашей функции содержит луч (-∞; a], и пусть прямая y=b является горизонтальной асимптотой графика функции y=f(x), запишем все это на математическом языке:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

Будем читать наше выражение как:

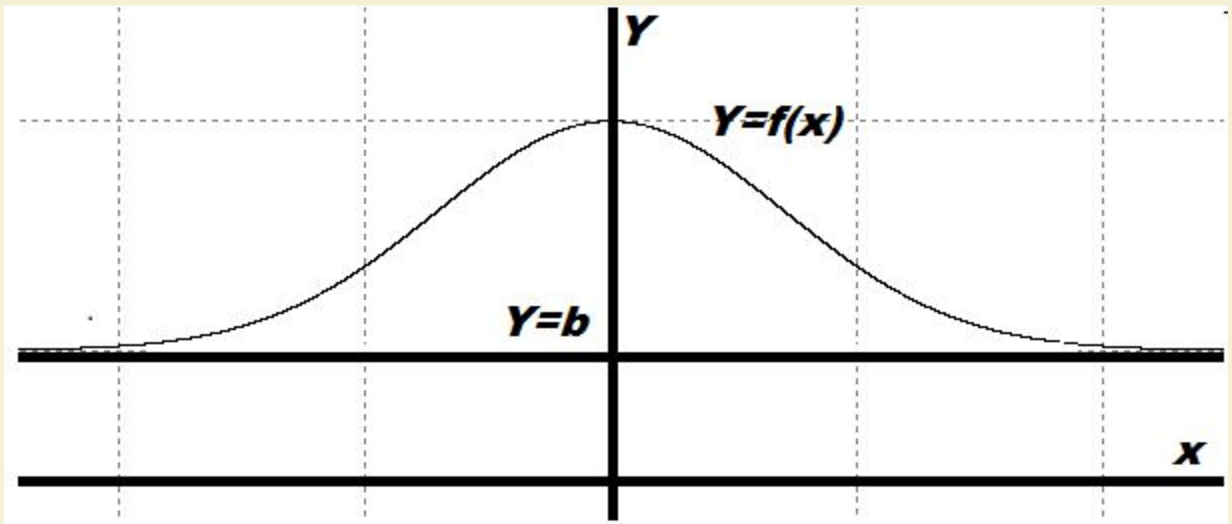
предел функции y=f(x) при x стремящимся к минус бесконечности равен b



Предел функции на бесконечности.

Предел функции на бесконечности.

Так же наши соотношения могут выполняться одновременно:



Тогда принято записывать как:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b \quad \text{или} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

предел функции y=f(x) при x стремящимся к бесконечности равен b

Предел функции на бесконечности.

Пример.

Пример. Построить график функции y=f(x), такой что:

1)Область определения – множество действительных чисел.

2)f(x)- непрерывная функция

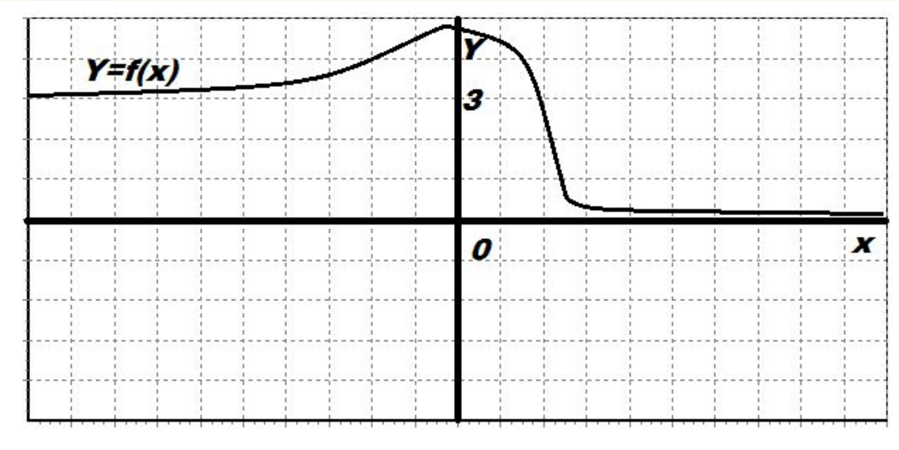
3) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$

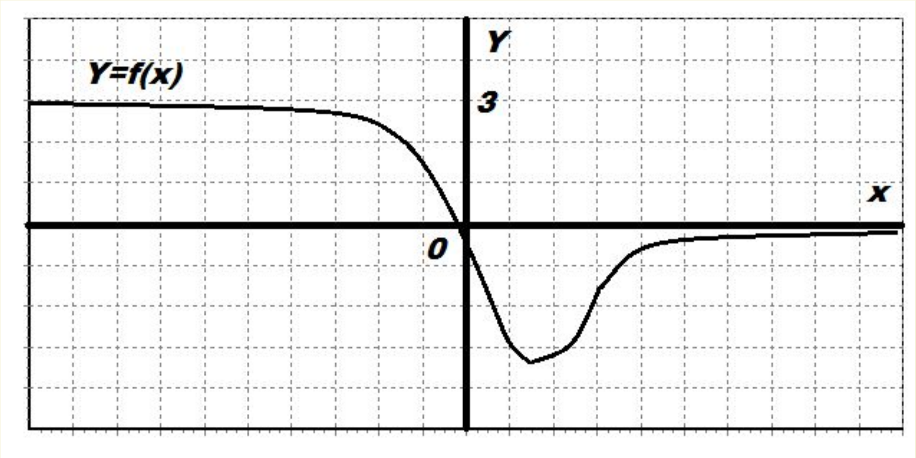
4) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Решение:

Нам надо построить непрерывную функцию на (-∞; +∞).

Покажем пару примеров нашей функции.





Предел функции на бесконечности.

Основные свойства.

Для вычисления предела на бесконечности пользуются несколькими утверждениями:

1) Для любого натурально числа m справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^m}\right) = 0$$

2) Если $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ $\lim_{x\to\infty} g(x) = c$ *то:*

а) Предел суммы равен сумме пределов: $\lim_{x\to\infty}(f(x) + g(x)) = b + c$

б) Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) \times g(x)) = b \times c$$

в) Предел частного равен частному пределов: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{b}{c}, c \neq 0$

г) Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x\to\infty} kf(x) = \mathrm{k}\lim_{x\to\infty} f(x)$$

Предел функции на бесконечности.

Пример.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{5x+3}$

Решение.

Разделим числитель и знаменатель дроби на х.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{5+\frac{3}{x}}$$

Воспользуемся свойством предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{5+\frac{3}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(2-\frac{1}{x})}{\lim\limits_{x\to\infty}(5+\frac{3}{x})}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}=0$$

Получим: $\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}(2-0)}{\lim\limits_{x\to\infty}(5+0)}=\dfrac{2}{5}$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{5x+3}=\dfrac{2}{5}$

Предел функции на бесконечности.

Пример.

Пример. Найти предел функции y=f(x), при x стремящимся к бесконечности.

$$f(x) = \frac{5x^3 - 1}{10x^3 + 5}$$

Решение. $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 - 1}{10x^3 + 5}$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на x в третьей степени.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5 - \frac{1}{x^3}}{10 + \frac{5}{x^3}}$$

Воспользуемся свойствами предела на бесконечности

$$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(5 - \frac{1}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(10 + \frac{5}{x^3})}$$

Предел числителя равен: 5-0=5; Предел знаменателя равен: 10+0=10

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Предел функции на бесконечности.

Пример.

Пример. Найти предел функции y=f(x), при x стремящимся к бесконечности.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2-3x+10}{8x^3+5}$$

Решение.

Разделим числитель и знаменатель дроби на x в третьей степени.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{10}{x^3}}{\frac{8x^3}{x^3}+\frac{5}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{10}{x^3}}{8+\frac{5}{x^3}}$$

Воспользуемся свойствами предела на бесконечности

$$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{10}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(8+\frac{5}{x^3})}$$

Предел числителя равен: 0; Предел знаменателя равен: 8

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{0}{8}=0$$

Предел функции на бесконечности.

Задачи для самостоятельного решения.

1) *Построить график непрерывной функции y=f(x). Такой что предел при x стремящимся к плюс бесконечности равен 7, а при x стремящимся к минус бесконечности 3.*
2) *Построить график непрерывной функции y=f(x). Такой что предел при x стремящимся к плюс бесконечности равен 5 и функция возрастает.*
3) *Найти пределы:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-2x}{8x+5} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{5x-3}{4x+10}$$

4) *Найти пределы:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^4-2x^2+1}{12x^4+5} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+9x+1}{10x^4}$$

Использованная литература

- Мордкович А.Г., Семенов П.В. «Алгебра и начала математического анализа. Профильный уровень». 10 класс.