Минимизация логических функций

Вычислительная техника

	X_3X_4	00	01	11	10
X_1X_2	00				1
	01		1	1	
	10				
	11				1

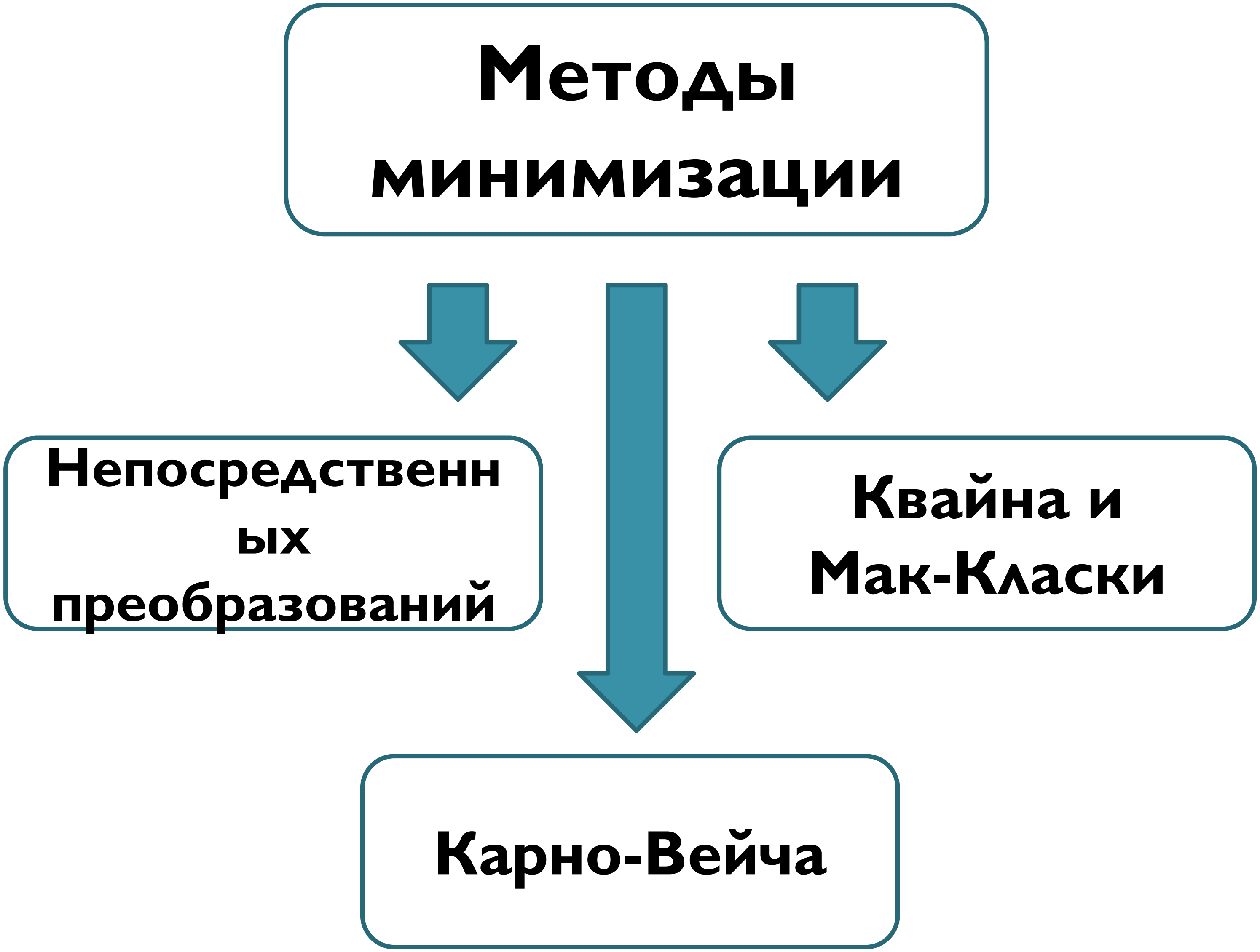
	X_5	0				1			
	X_3X_4	00	01	11	10	00	01	11	10
X_1X_2	00								
	01								
	10			1				1	
	11								

Минимизация

- упрощение формы записи
- схема реализуется с наименьшим числом элементов

Минимальная нормальная форма

- Нормальная форма логической функции, содержащая наименьшее число элементов
- Минимальная ДНФ = МДНФ
- Минимальная КНФ = МКНФ
- Логическая функция может иметь несколько МДНФ или МКНФ одинаковой сложности


Методы минимизации
Непосредственных преобразований
Квайна и Мак-Класки
Карно-Вейча

Минимизация логических функций

МЕТОД НЕПОСРЕДСТВЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Метод непосредственных преобразований

Применение законов алгебры логики

Результат – **тупиковая** форма логической функции

Тупиковая форма

Логическое выражение, к слагаемым которого больше не могут быть применены операции склеивания

Для одной функции может существовать несколько тупиковых форм

Минимальная форма – тупиковая форма логической функции минимальной длины

Функции ***a и b*** называются **равносильными**, если при одинаковых входных данных они принимают одинаковые значения

$$\boldsymbol{a \equiv b}$$

ЗАКОНЫ ЛОГИКИ

1. Идемпотентность

$$a \mathbin{\&} a \equiv a$$

$$a \vee a \equiv a$$

2. Коммутативность

$$a \,\&\, b \equiv b \,\&\, a$$

$$a \vee b \equiv b \vee a$$

3. Ассоциативность

$$a \& (b \& c) \equiv (a \& b) \& c$$

$$a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c$$

4. Дистрибутивность

$$a \,\&\, (b \vee c) \equiv (a \,\&\, b) \vee (a \,\&\, c)$$

$$a \vee (b \,\&\, c) \equiv (a \vee b) \,\&\, (a \vee c)$$

5. Закон двойного отрицания

$$\neg(\neg a) \equiv a$$

6. Законы поглощения

$$a \mathbin{\&} (a \lor b) \equiv a$$

$$a \lor (a \mathbin{\&} b) \equiv a$$

7. Законы де Моргана

$$\neg(a \lor b) \equiv \neg a \;\&\; \neg b$$

$$\neg(a \;\&\; b) \equiv \neg a \lor \neg b$$

8. Закон исключённого третьего

$$\neg a \lor a \equiv 1$$

9. Закон противоречия

$$\neg a \,\&\, a \equiv \mathbf{0}$$

10. Свойства тавтологии и противоречия

$$1 \,\&\, a \equiv a \qquad 1 \vee a \equiv 1$$

$$0 \,\&\, a \equiv 0 \qquad 0 \vee a \equiv a$$

$$\neg 0 \equiv 1 \qquad \neg 1 \equiv 0$$

11. Законы склеивания

$$(a \,\&\, b) \lor (a \,\&\, \neg b) \equiv a$$

$$(a \lor b) \,\&\, (a \lor \neg b) \equiv a$$

12. Законы поглощения

$$a \,\&\, (a \vee b) \equiv a$$

$$a \vee (a \,\&\, b) \equiv a$$

Пример

Минимизировать СДНФ

$$(\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee$$

$$\vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee$$

$$\vee (A \cdot B \cdot C)$$

Пример

$$(\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee$$

$$\vee (A \cdot B \cdot C) \equiv$$

Пример

$$(\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot \neg B \cdot C)$$

$$\vee$$

$$\vee (A \cdot B \cdot C) \equiv$$

Пример

$$(\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot \neg B \cdot C)$$

$$\vee$$

$$\vee (A \cdot B \cdot C) \equiv$$

Пример

$$(\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee$$

$$\vee (A \cdot B \cdot C) \equiv$$

$$(\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee \mathbf{(A \cdot \neg B \cdot C) \vee}$$

$$\mathbf{\vee (A \cdot \neg B \cdot C)} \vee (A \cdot B \cdot C)$$

Пример

$$(\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee$$

$$\vee (A \cdot B \cdot C) \equiv$$

$$(\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee$$

$$\vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee (A \cdot B \cdot C)$$

$$\equiv (\neg B \cdot C) \vee (A \cdot C) \equiv$$

$$\equiv C \quad (A \vee \quad B)$$

A	B	C	f
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Проблема

Определить, какие элементарные конъюнкции / дизъюнкции надо склеивать

Минимизация логических функций

КАРТЫ ВЕЙЧА-КАРНО

Эдвард Вестбрук Вейч

1924 — 2013

Американский физик

1952

«Метод диаграмм для минимизации логических функций»

Морис Карно

Американский физик

1953
Усовершенствовал метод Вейча

род. 1924

Карта Карно

Графическое представление таблицы истинности логических функций

Таблица, содержащая по $\mathbf{2^n}$ прямоугольных ячеек, где $\boldsymbol{n}$ — число логических переменных

Код Грея

- система счисления, в которой два соседних значения различаются только в одном разряде

Пример

X_1	X_2	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

		X_2	
		0	**1**
X_1	**0**	1	0
	1	1	1

Пример

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Пример

	B	0	0	1	1
	C	0	1	1	0
A	0	0	1	0	0
	1	0	1	1	0

Пример

	BC	00	01	11	10
A	0	0	1	0	0
	1	0	1	1	0

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Пример

		0	0	1	1	A
		0	1	1	0	B
0	0	0	0	1	0	
0	1	1	0	0	0	
1	1	0	0	0	0	
1	0	0	1	0	0	
C	D					

Пример

		AB			
		00	01	11	10
CD	00	0	0	1	0
	01	1	0	0	0
	11	0	0	0	0
	10	0	1	0	0

Пример

E		0				1			
AB		00	01	11	10	10	11	01	00
CD	00	0	0	1	0	0	1	0	1
	01	1	0	0	0	0	0	0	0
	11	0	0	0	0	0	0	0	1
	10	0	1	0	0	1	0	0	0

Правила

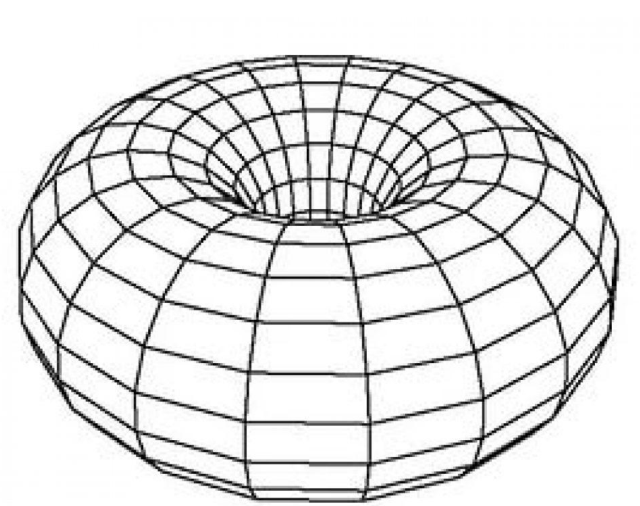
ДНФ **КНФ**

1. Объединяем смежные клетки с **единицами** (**нулями**) в максимально возможные области, содержащие $\mathbf{2^n}$ клеток
2. В области **НЕ** должно находиться клеток, содержащих **нули** (**единицы**)
3. Области могут пересекаться
4. Возможно несколько вариантов покрытия

Правила

5. Крайние строки и столбцы являются соседними между собой

	X_2X_3	00	01	11	10
X_1	1	1	0	0	1
	0	1	0	0	1



Правила

6. Несмежные области, расположенные симметрично оси(ей), могут объединяться в одну

E		0				1			
AB		00	01	11	10	10	11	01	00
CD	00	0	1	1	0	0	1	1	1
	01	1	0	0	0	0	0	0	0
	11	0	0	0	0	0	0	0	1
	10	0	1	0	0	1	0	0	0

Правила

7. Для каждой области записываем **конъюнкцию (дизъюнкцию)** переменных, не изменяющих своё значение

   Если неизменная переменная равна **нулю** **(единице)** – инвертируем

8. **Конъюнкции** (**дизъюнкции**) областей объединяем **дизъюнкцией** (**конъюнкцией**).

Пример

X_1	X_2	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

		X_2	
		0	**1**
X_1	**0**	1	0
	1	1	1

$$F = \neg X_2 \lor X_1$$

Пример – МДНФ

X_1	X_2	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

		X_2	
		0	**1**
x_1	**0**	0	$\boxed{1}$
	1	$\boxed{1}$	0

$$F = X_1 \cdot \neg X_2 \vee \neg X_1 \cdot X_2$$

Пример – МКНФ

X_1	X_2	F
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

		X_2	
		0	**1**
x_1	**0**	0	1
	1	1	0

$$F = (X_1 \vee X_2) \cdot (\neg X_1 \vee \neg X_2)$$

Пример

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Формула

$$(\neg A \cdot \neg B \cdot C) \vee$$
$$\vee (A \cdot \neg B \cdot C) \vee$$
$$\vee (A \cdot B \cdot C)$$

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (**СДНФ**)

$$(A \vee B \vee C) \cdot$$
$$\cdot\ (A \vee \neg B \vee C) \cdot$$
$$\cdot\ (A \vee \neg B \vee \neg C) \cdot$$
$$\cdot\ (\neg A \vee B \vee C) \cdot$$
$$\cdot\ (\neg A \vee \neg B \vee C)$$

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (**СКНФ**)

Пример

	B	0	0	1	1
	C	0	1	1	0
A	0	0	1	0	0
	1	0	1	1	0

Пример

	B	**0**	**0**	**1**	**1**
	C	**0**	**1**	**1**	**0**
A	**0**	0	1	0	0
	1	0	1	1	0

$F = \neg B \cdot C \lor A \cdot C$

МДНФ

Пример

	B	0	0	1	1
	C	0	1	1	0
A	0	0	1	0	0
	1	0	1	1	0

$$F = C \cdot (A \vee \neg B)$$

МКНФ

A	B	C	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

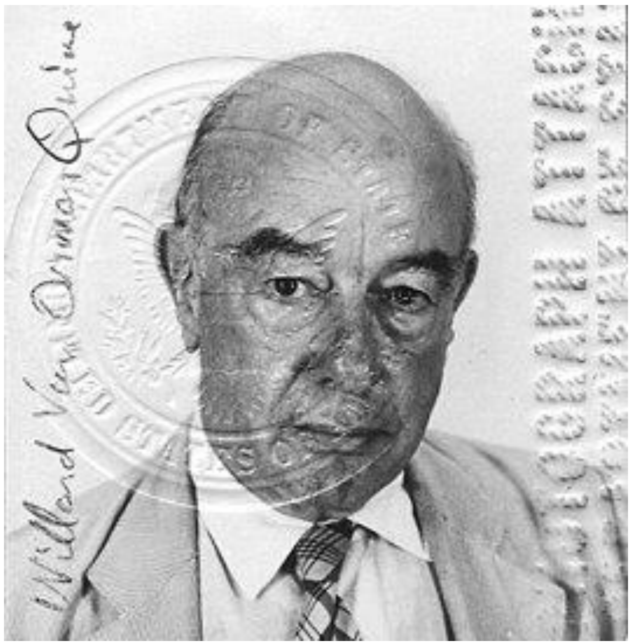
Недостатки

- Применим для функций до **7** переменных
- Выбор областей – визуально
- Нет алгоритма, обеспечивающего оптимальное решение

Минимизация логических функций

МЕТОД КВАЙНА И МАК-КЛАСКИ

Виллард ван Орман Куайн



1908 — 2000

Американский философ, логик и математик

1993
премия Рольфа Шока в области логики и философии

Эдвард Дж. Мак-Класки

1908 — 2000

Почётный профессор Стэнфордского университета.

Пионер в области электротехники

Первый алгоритм проектирования комбинационных схем

Метод Квайна и Мак-Класки

- целесообразно, когда число входных переменных превышает **6 – 7**