

**Пособие поможет учащимся
наглядно представить изучаемый
материал по теме:
«Четырехугольники»
и систематизировать свои знания**


- ▣ Разработал ученик 11 «А» класса МБОУ СОШ №15 г.Королёва
 - ▣ Челыхов Михаил под руководством учителей
 - ▣ Диановой В.А. и Моисеевой В.И.

ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

Виды четырёхугольников



Параллелограмм



Произвольный
четырёхугольник



Прямоугольник



Трапеция



Квадрат



Ромб

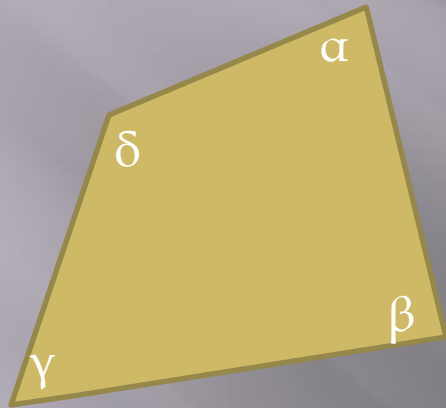


Равнобокая



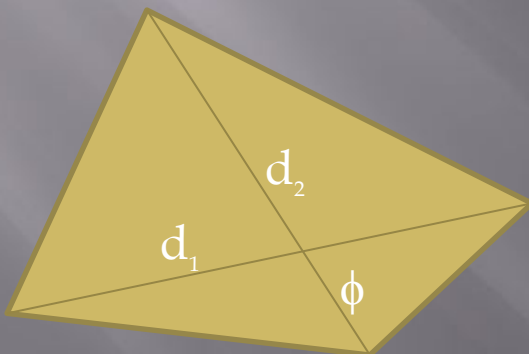
Прямоугольная

Произвольный четырёхугольник



Сумма внутренних углов равна 360° .

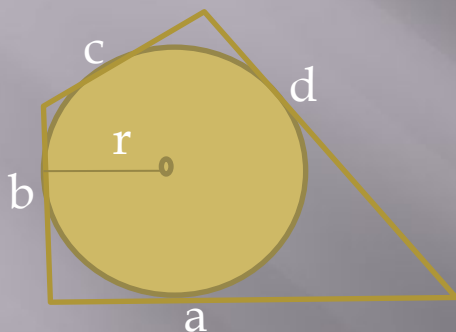
$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ.$$



Площадь (через диагонали и угол между ними):

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin \phi}{2}$$

Четырехугольник , описанный около окружности



Четырехугольник можно описать около окружности, если суммы противоположных сторон равны:

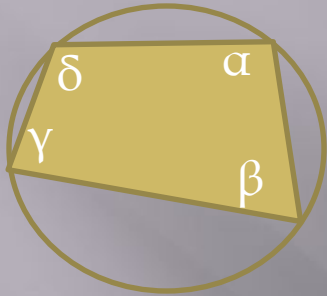
$$a + c = b + d.$$

Если четырехугольник описан около окружности, то суммы противоположных сторон равны.

Площадь: $S = pr$, где $p = (a + b + c + d)/2$ (полупериметр),
 r – радиус вписанной окружности.

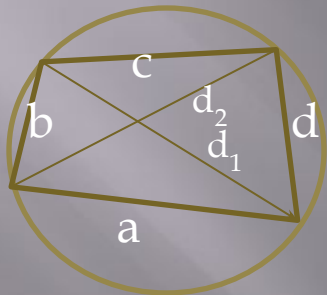
Формула $S = pr$ справедлива для любого многоугольника, описанного около окружности.

Четырехугольник, вписанный в окружность



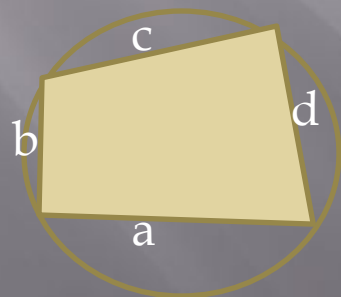
Четырехугольник можно вписать в окружность, если сумма противоположных углов равна 180° : $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$.

Если четырехугольник вписан в окружность, то суммы противоположных углов равна 180° .



Теорема Птолемея

Сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей:
 $a \cdot c + b \cdot d = d_1 d_2$



Площадь (Формула Геррона)

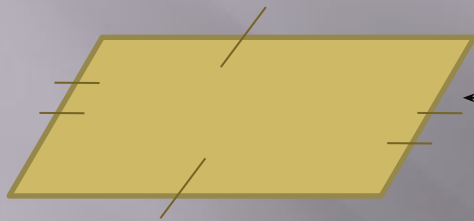
$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

где $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ (полупериметр).

Параллелограмм

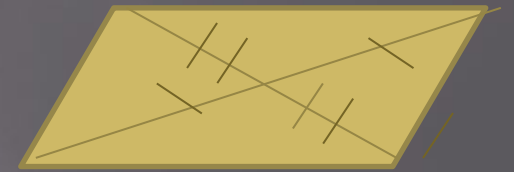
Определение: параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Свойства параллелограмма



Противолежащие стороны попарно равны.

Диагонали точкой пересечения делятся пополам.



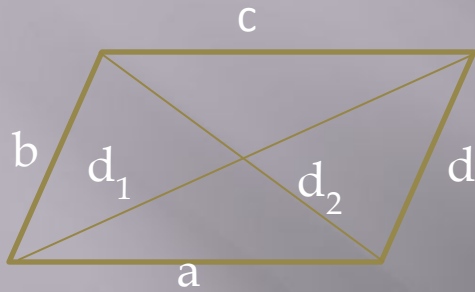
Противолежащие углы попарно равны



Сумма углов, прилежащих к любой стороне, равна 180° :

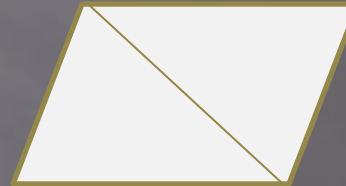
$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

Свойства параллелограмма (продолжение)

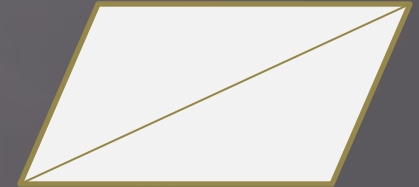


Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон

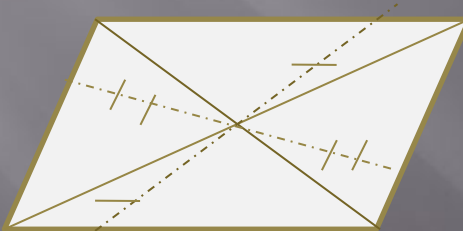
$$d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$



Каждая диагональ делит четырёхугольник на два равных треугольника.



Точка пересечения диагоналей является центром симметрии.



Обе диагонали делят четырёхугольник на четыре *равновеликих* треугольников (одинаковой площади).



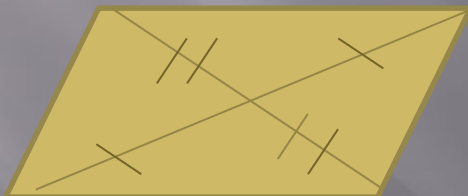
Признаки параллелограмма.



Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

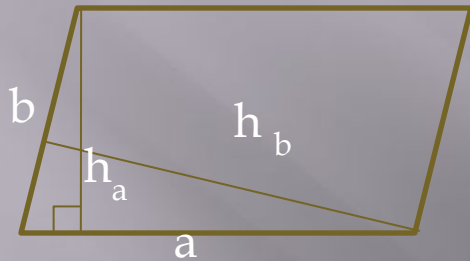


Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

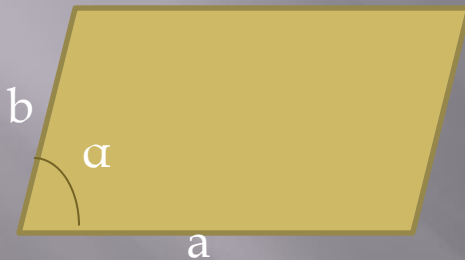


Если в четырёхугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

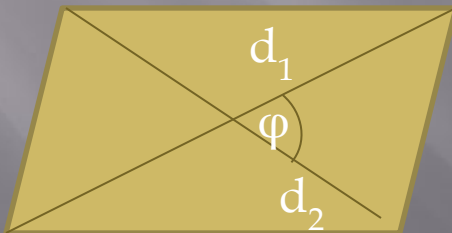
Площадь параллелограмма



Через сторону и опущенную на неё
высоту
Площадь параллелограмма равна
произведению основания на высоту. $S = ah_a = bh_b$



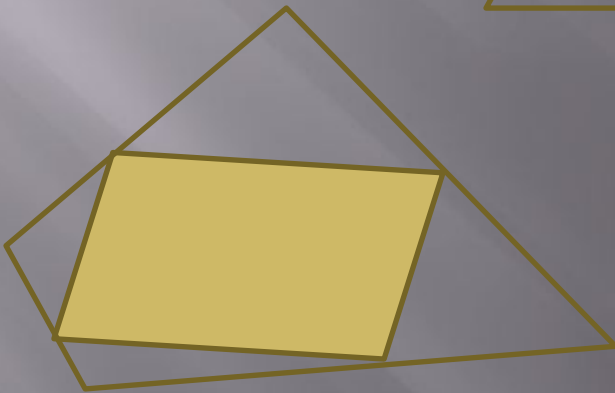
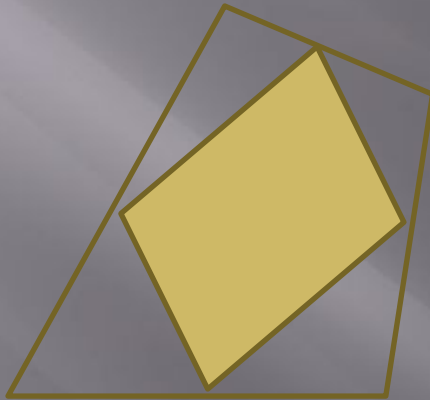
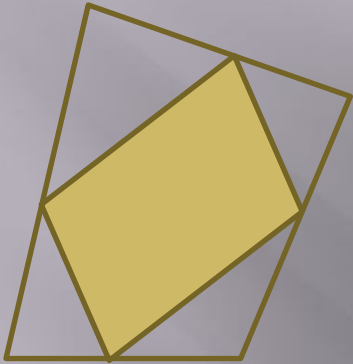
Через две прилежащие стороны и угол между
ними
Площадь параллелограмма равна
произведению его смежных сторон на синус
угла между ними $S = a b \cdot \sin \alpha$



Через диагонали и угол между ними
Площадь параллелограмма равна половине
произведения его диагоналей $S = \frac{d_1 d_2 \sin \varphi}{2}$

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin \varphi}{2}$$

Свойство произвольного четырёхугольника, связанное с параллелограммом.



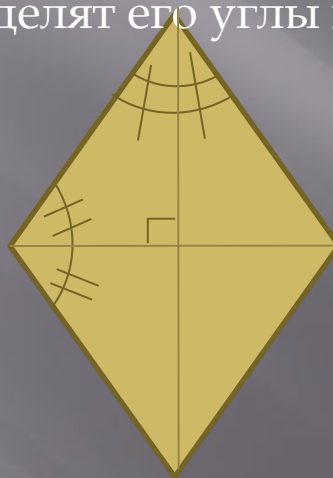
Если соединить отрезками
середины соседних сторон
любого четырёхугольника,
получится параллелограмм.

РОМБ.

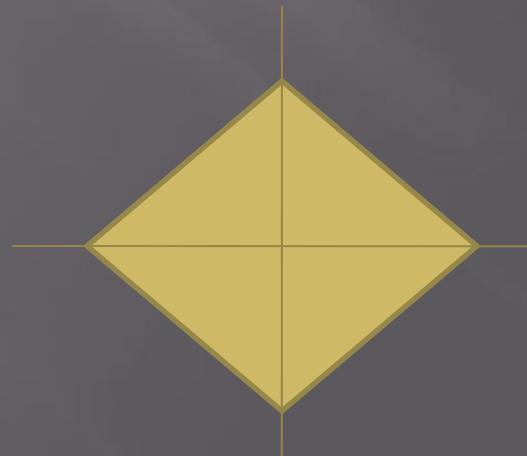
Определение: ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма.

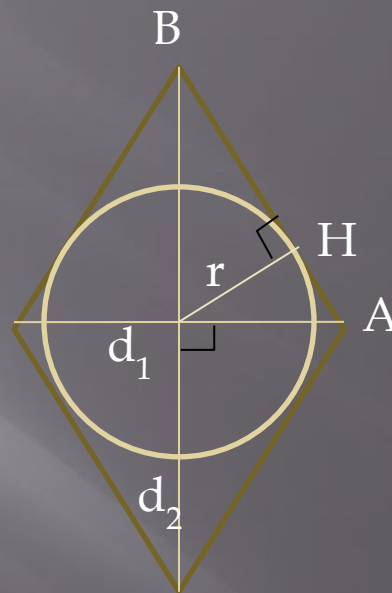
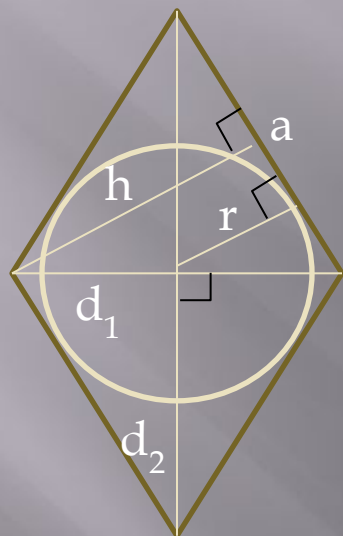
Особое свойство ромба: диагонали ромба взаимно перпендикулярны и делят его углы пополам.



Прямые, содержащие диагонали, являются осями симметрии.



Окружность, вписанная в ромб.



В любой ромб можно вписать окружность. Радиус r вписанной окружности удовлетворяет соотношениям: $r = h/2$

$$r = \frac{d_1 d_2}{4a}$$

где h – высота ромба, $r =$

где d_1 и d_2 – диагонали ромба, a – его

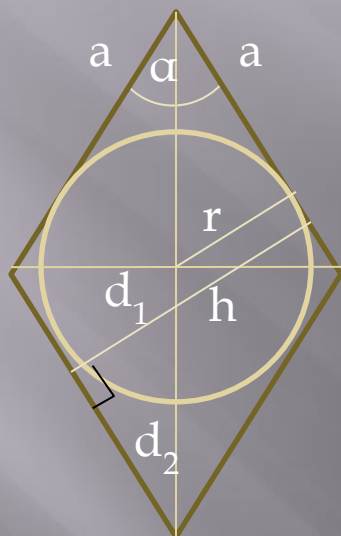
Точка касания вписанной окружности делит сторону ромба на отрезки, связанные с его диагоналями и радиусом вписанной окружности следуют соотношениями:

$$d_1 = 2\sqrt{AH * AB}$$

$$d_2 = 2\sqrt{BH * AB}$$

$$r = \sqrt{AH * HB}$$

Площадь ромба.



Через сторону и высоту:

$$S=ah$$

Через сторону и радиус
вписанной окружности:

$$S=2ar.$$

Через сторону и угол ромба:

$$S=a^2\sin\alpha.$$

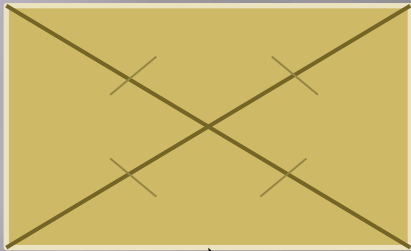
Через диагонали:

$$S = \frac{d_1 d_2}{2}$$

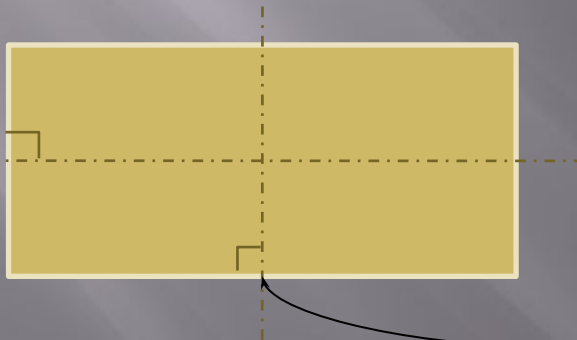
Прямоугольник.

Определение: прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

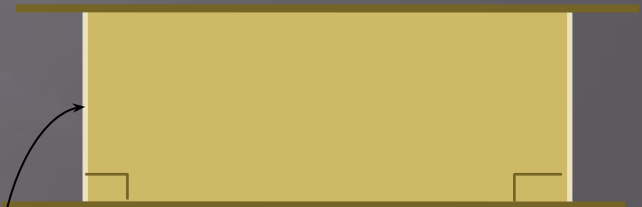
Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма.



Особое свойство
прямоугольника:
диагонали
прямоугольника равны.



Перпендикуляр
ы к сторонам,
проходящие
через их
середины,
являются осями
симметрии.

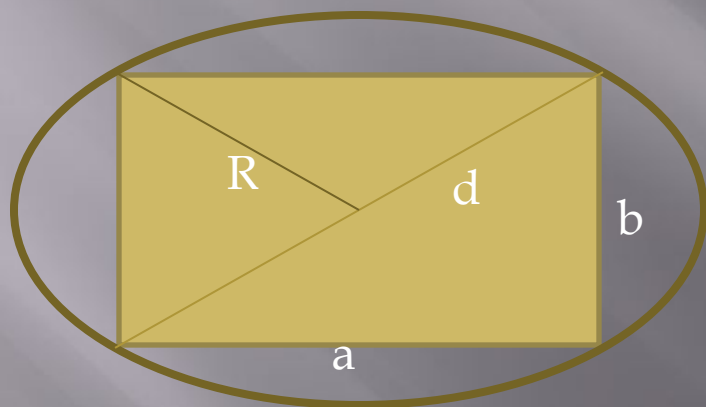


Две стороны
параллельны и углы,
прилежащие к одной из
этих сторон, прямые.



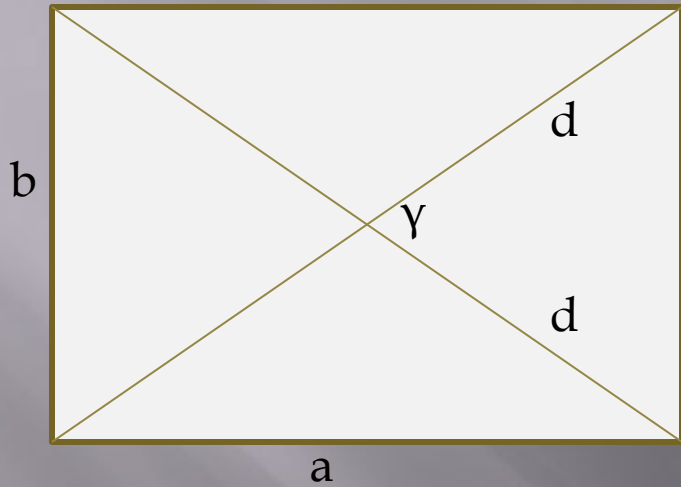
Две противоположные стороны равны и углы,
прилежащие к одной из этих сторон, прямые.

Окружность, описанная около прямоугольника.



Около любого
прямоугольника можно
описать окружность.
Радиус описанной
окружности $R=d/2$,
где $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ –
диагональ
прямоугольника.

Площадь прямоугольника.

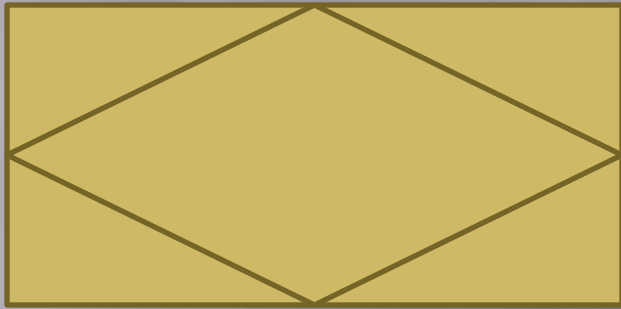


Через стороны: $S=a*b$.

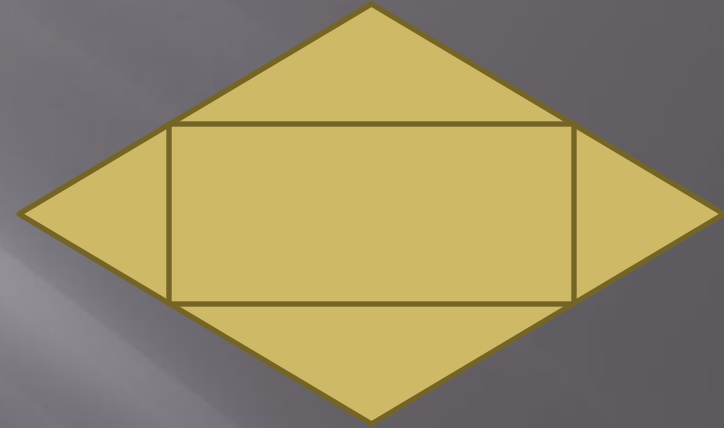
Через диагональ и угол между диагоналями:

$$S = \frac{d^2 \sin \gamma}{2}$$

Связь между прямоугольником и ромбом.



Если соединить отрезками середины соседних сторон любого прямоугольника, получится ромб.



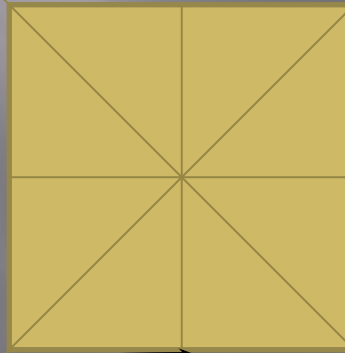
Если соединить отрезками середины соседних сторон любого ромба, получится прямоугольник.

Квадрат.

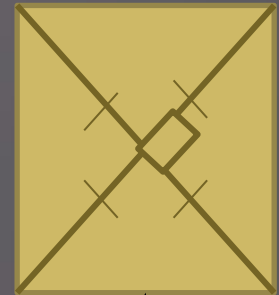
Определение: квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

Четырёхугольник имеет *четыре* оси симметрии:
-прямые, перпендикулярные сторонам и проходящие через их середины;
-прямые, содержащие диагонали.



Диагонали равны, перпендикулярны и, пересекаясь, делятся пополам.



Четырёхугольник обладает поворотной симметрией: он не изменяется при повороте на 90° .

90°

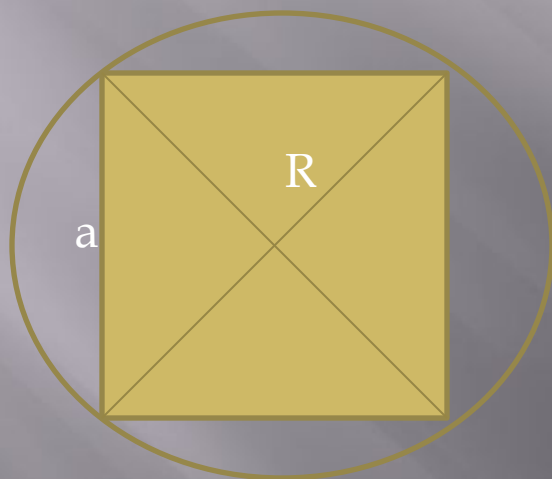


Окружность, описанная около квадрата.

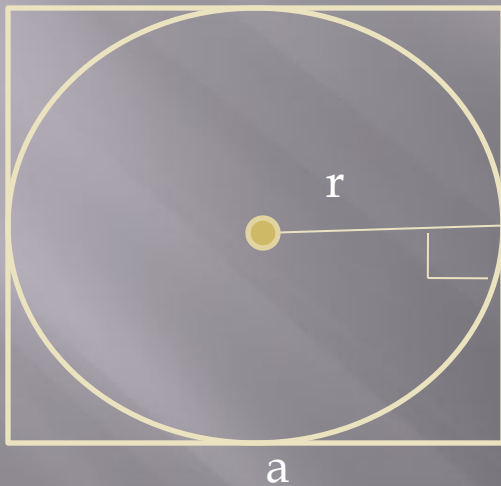
Около квадрата можно описать окружность.

Радиус описанной окружности выражается через сторону a квадрата и его диагональ d следующим образом:

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{d}{2}$$



Окружность, вписанная в квадрат.

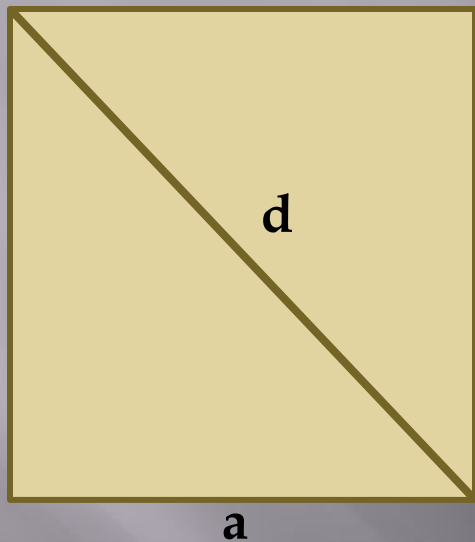


В квадрат можно вписать окружность.

Радиус вписанной окружности равен половине стороны:

$$r = \frac{a}{2}$$

Площадь квадрата.



Через сторону:
 $S=a^2$

Через диагональ: $S = \frac{d^2}{2}$

Трапеция.

Определение: Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются ее **основаниями**, а две другие стороны – **боковыми сторонами**.

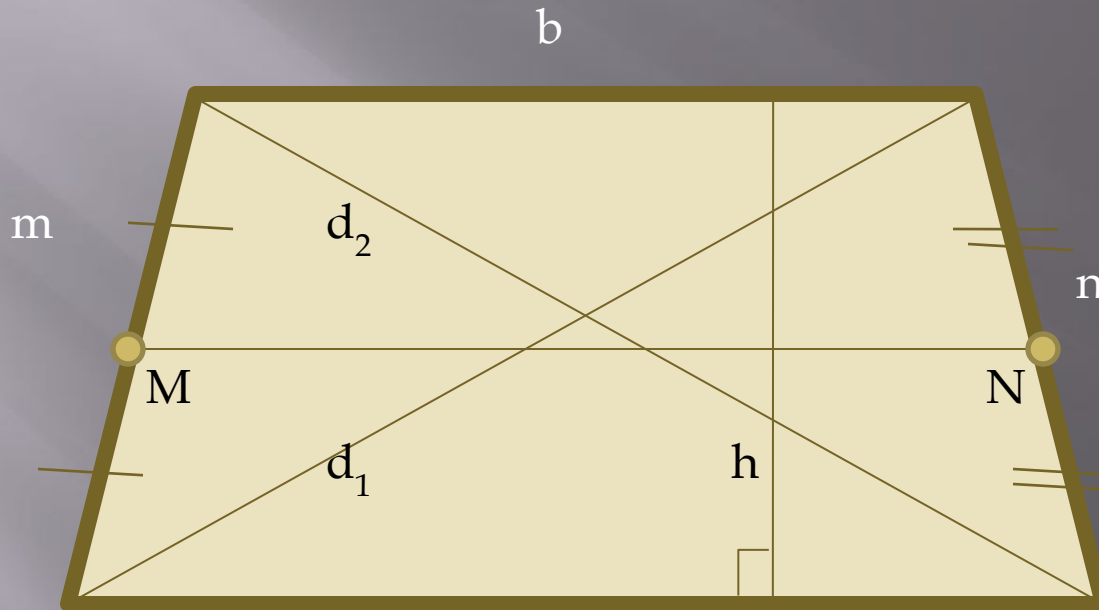


Трапеция называется **равнобедренной**, если ее боковые стороны равны.

прямоугольной:

Трапеция, один из углов которой **прямой**, называется **прямоугольной**.

Элементы трапеции



a, b – основания ($a \parallel b$),

m, n – боковые стороны,

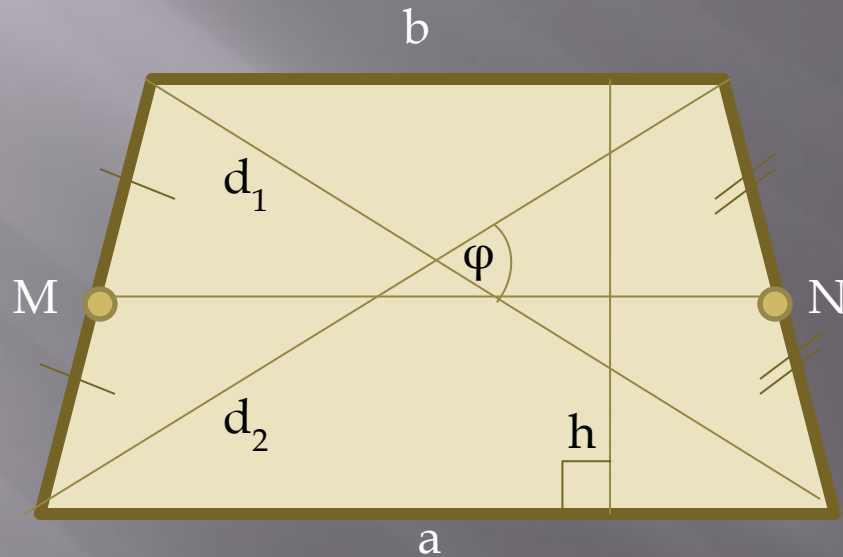
d_1, d_2 – диагонали,

h

h – высота (отрезок, соединяющий основания и перпендикулярный им),

MN – средняя линия (отрезок, соединяющий середины боковых сторон).

Площадь трапеции.



Через полусумму оснований
и высоту

$$S = \frac{a+b}{2} h$$

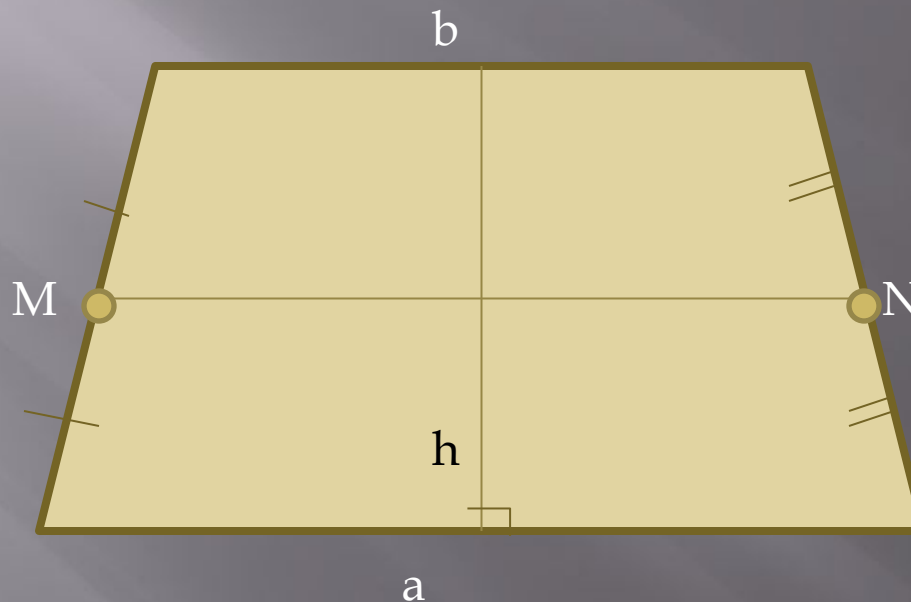
Через среднюю
линию и высоту

$$S = MN \cdot h$$

Через диагонали
и угол между ними

$$S = \frac{d_1 d_2 \sin \varphi}{2}$$

Свойства трапеции.



Средняя линия параллельна основаниям, равна их полусумме и делит любой отрезок с концами, лежащими на прямых, содержащих основания, (например, высоту трапеции) пополам:

$$MN \parallel a, MN \parallel b, MN = (a + b)/2$$

Свойства трапеции.

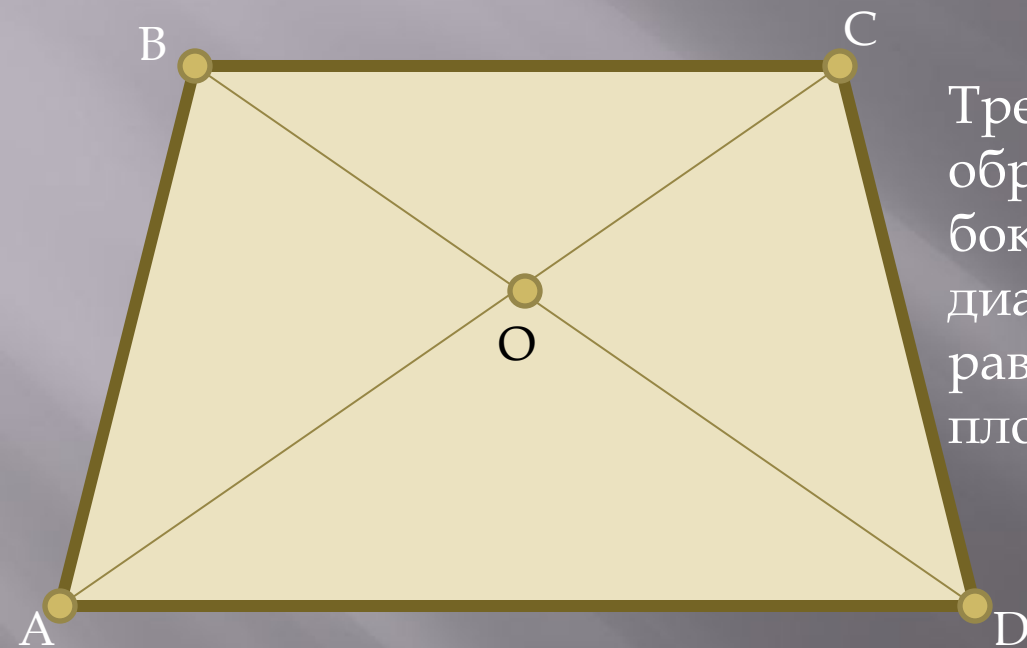


Сумма углов, прилежащих к любой боковой стороне, равна 180° :

$$\alpha + \beta = 180^\circ,$$

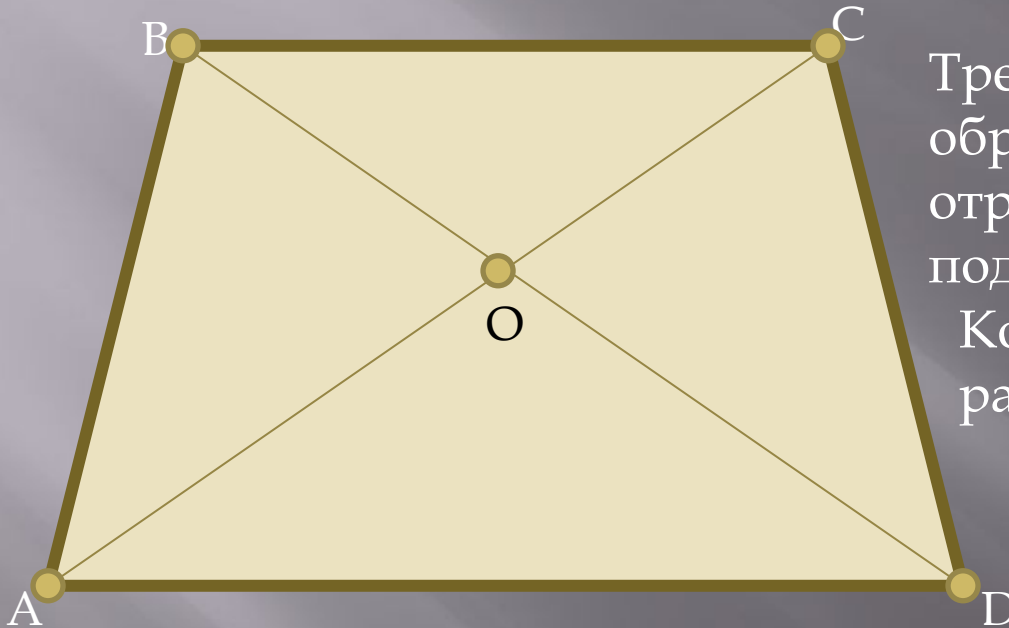
$$\gamma + \delta = 180^\circ.$$

Свойства трапеции.



Треугольники AOB и DOC , образованные боковыми сторонами и отрезками диагоналей, равновелики (имеют равные площади).

Свойства трапеции.

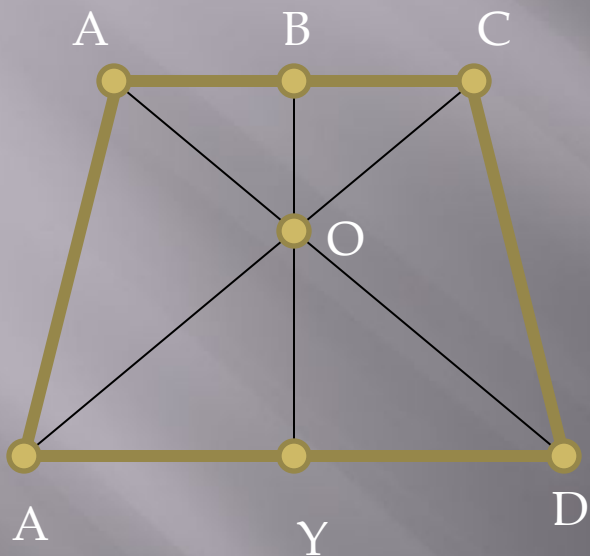


$\triangle AOD$ и $\triangle COB$
подобны.

Треугольники AOD и COB ,
образованные основаниями и
отрезками диагоналей,
подобны.

Коэффициент подобия k
равен отношению оснований:
 $k = AD/BC$

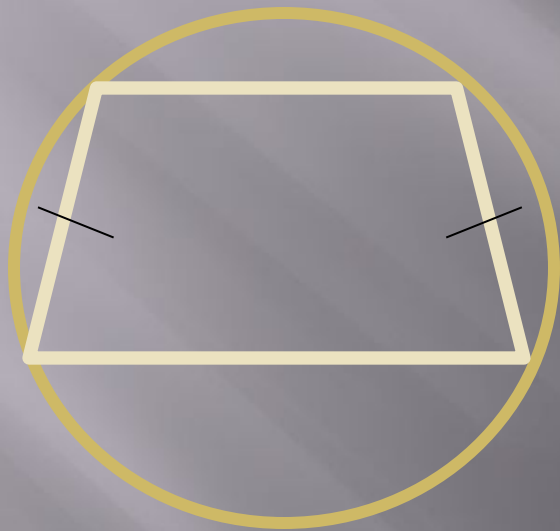
Отношение площадей
этих треугольников
равно k^2 .



Любой отрезок, соединяющий основания и проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции, делится этой точкой в отношении

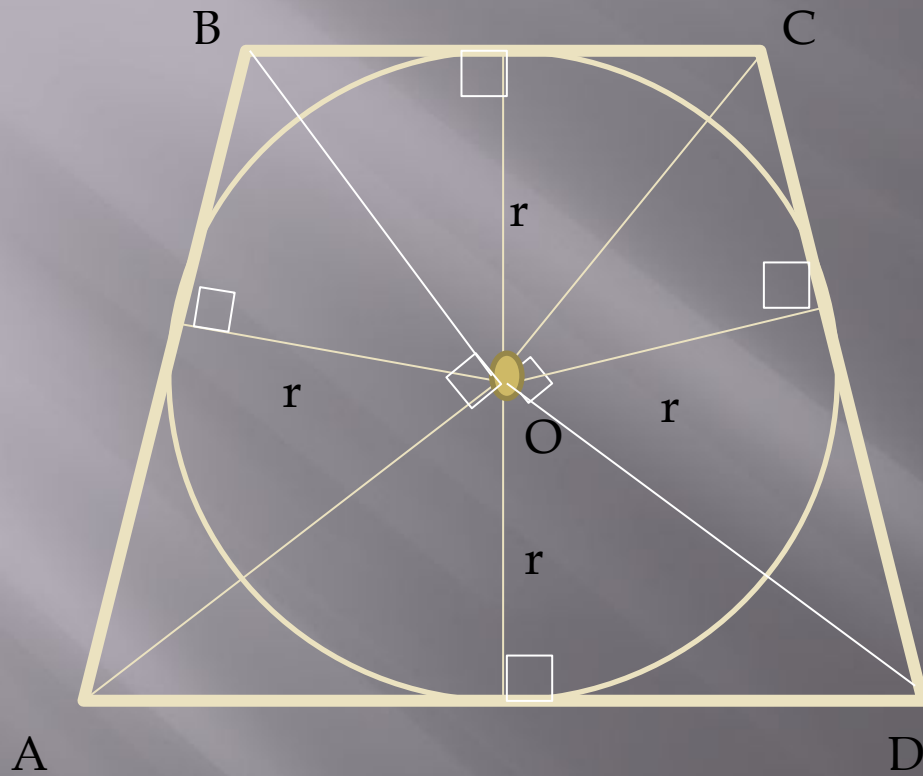
$$OX/OY = BC/AD$$

Это справедливо, в том числе, для самих диагоналей и высот.



Любую *равнобедренную* трапецию можно вписать в окружность.

Вписать в окружность можно *только* равнобедренную трапецию.



Если трапеция *описана* около окружности, то треугольники AOB и DOC прямоугольные (точка O – центр вписанной окружности).

Высоты этих треугольников, опущенные на гипотенузы, равны радиусу вписанной окружности, а высота трапеции равна диаметру вписанной окружности.