!Здравствуйте

Лекция №1

Αα – Альфа

Ββ – Бета

Γγ – Гамма

Δδ – Дельта

Εε –Эпсилон

Ζζ – Дзета

Ηη – Эта

Θθϑ – Тета

Ιι – Иота

Κκ – Каппа

Λλ – Ламбда

Μμ – Мю

Νν – Ню

Ξξ – Кси

Οο – Омикрон

Ππϖ – Пи

Ρρ – Ро

Σσς – Сигма

Ττ – Тау

Υυ – Ипсилон

Φφϕ – Фи

Χχ – Хи

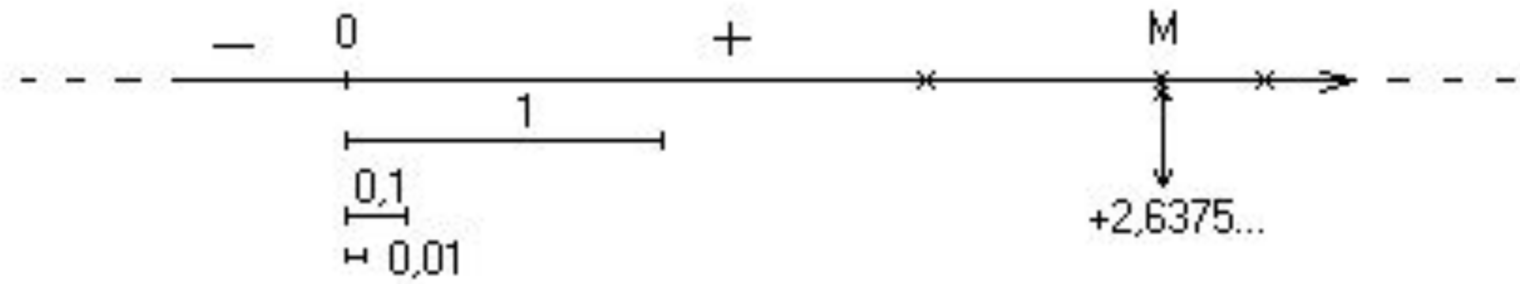
Ψψ – Пси

Ωω – Омега

Часть 1

Теория пределов

Взаимно-однозначное соответствие точка-число



1. На этой прямой выберем какую-то точку, которую будем считать за начало отсчета. Этой точке поставим в соответствие число +0,0000…
2. Будем считать, что если точка расположена правее начала отсчета, то соответствующее ей число имеет знак +, а если левее – то знак –. Тем самым на прямой будет задано направление.
3. Выберем некоторый отрезок, длину которого будем считать за 1.
4. Пусть М – некоторая точка прямой, расположенная скажем, правее точки отсчета. Будем откладывать от начала отсчета единичные отрезки до тех пор, пока конец не «перескочит» точку М. Сколько раз этот единичный отрезок уложится до точки М определит нам целую часть числа, соответствующего этой точке (на рисунке +2).
5. Разделим отрезок, равный 1 на 10 равных частей, и от последней точки будем откладывать теперь этот отрезок, равный 1/10. Сколько раз он уложился до точки М, определит нам первую цифру числа после запятой (на рисунке +2,6)
6. Разделим отрезок, равный 1/10снова на 10 равных частей, и от последней точки будем откладывать теперь этот отрезок, равный 1/100. Сколько раз он уложился до точки М, определит нам вторую цифру числа после запятой (на рисунке +2,63)
7. Разделим отрезок, равный 1/100снова на 10 равных частей, и …

Продолжая этот процесс деления отрезка на 10 равных частей неограниченное число раз, мы и получим число, соответствующее точке М нашей прямой (см. на рис. +2,6375…).

Сделаем только одну важную оговорку. Что делать, если на каком-то этапе конец отрезка «воткнется» в точку М, то есть совпадет с ней? Здесь, конечно, дело вкуса. Для определенности договоримся, что мы всегда будем откладывать отрезок <u>по недостатку</u>, то есть так, чтобы его конец не превосходил точки М и не совпадал с ней. Поэтому, скажем, точке М, расположенной на расстоянии $\frac{1}{2}$ длины единичного отрезка будет соответствовать число +0,49999… а не число +0,5000… Эта оговорка гарантирует нам взаимную одноначность соответствия точка $\leftrightarrow$ число.

Вещественные числа

<u>Вещественным числом</u> называется бесконечная десятичная дробь вида:

$$\text{ЗНАК } a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

где ЗНАК $\in \{+,-\}$

$$a_0 \in \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

а все цифры a_i <u>после запятой</u> принадлежат множеству $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Оговорки:

1.Запрещаются числа вида: $\pm a_0,a_1a_2....a_n0000\ ...$

2.Существует особое число +0,0000…

Равенство двух вещественных чисел

Пусть даны два вещественных числа:

$$a = \pm a_0,a_1a_2a_3...$$

$$b = \pm b_0,b_1b_2b_3...$$

Будем считать, что $a = b$, если:

a)знак a = знак b

b) $a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3...$

то есть если у них одинаковые знаки и совпадают все соответствующие друг другу цифры.

Сравнение двух вещественных чисел

1. Пусть оба вещественных числа имеют знак +.

$a = +a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$

$b = +b_0, b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots.$

Найдем первую по порядку цифру в этих числах, которые не равны друг другу. Пусть это будет цифра с номером n, то есть $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ \ldots.a_{n\text{-}1} = b_{n\text{-}1}$, но $a_n \neq b_n$ (заметим, что символами математики это записывается так: $n = \min\{k{:}a_k \neq b_k\}$). Тогда, если $a_n > b_n$, то считаем, что $a>b$, а если $a_n < b_n$, то $a<b$.

2. Если вещественные числа a и b разных знаков, то большим считается число, имеющее знак +.

3. Пусть оба числа имеют знак –. Назовем модулем вещественного числа это же число, но со знаком +:

$$|a| = +a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

Тогда, если $|a|>|b|$ то считаем, что $a<b$, если же $|a|<|b|$ то считаем, что $a>b$.

Супремум и инфимум числовых множеств

Определение. Множество, элементами которого являются вещественные числа, называется числовым множеством.

Числовые множества мы будем обозначать $\{x\}$, где под x будут пониматься вещественные числа.

Определение 1. Числовое множество $\{x\}$ называется ограниченным сверху, если $\exists M < +\infty \ \forall x \in \{x\} \ \ x \le M$ (читается: существует такое $M < +\infty$, что для любого $x \in \{x\}$ выполнено условие $x \le M$). Число M называется верхней гранью числового множества $\{x\}$.

Определение 2. Числовое множество $\{x\}$ называется ограниченным снизу, если $\exists m > -\infty \ \forall x \in \{x\} \ \ x \ge m$. Число m называется нижней гранью числового множества $\{x\}$.

Определение 3. Числовое множество $\{x\}$ называется ограниченным, если $\exists m, M \ \forall x \in \{x\} \ \ m \le x \le M$.

Определение 4. Наименьшая из верхних граней называется точной верхней гранью или супремумом числового множества $\{x\}$ (обозначение $\sup\{x\}$).

Наибольшая из нижних граней называется точной нижней гранью или инфимумом числового множества $\{x\}$ (обозначение $\inf\{x\}$).

Эти понятия столь важны, что опишем их в других терминах.

$\sup\{x\}$ определяется двумя свойствами:

1. $\forall x \in \{x\} \quad x \le \sup\{x\}$
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in \{x\} \quad x > \sup\{x\} - \varepsilon$

Первое свойство означает, что $\sup\{x\}$ – верхняя грань, то есть все элементы $\{x\}$ не превосходят $\sup\{x\}$.

Второе свойство означает, что любая попытка уменьшить эту верхнюю грань приводит к появлению элемента из $\{x\}$, который окажется больше $\sup\{x\} - \varepsilon$.

Аналогично, $\inf\{x\}$ определяется двумя свойствами:

1. $\forall x \in \{x\} \quad x \geq \inf\{x\}$
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in \{x\} \quad x < \inf\{x\} + \varepsilon$

Заметим, что сами $\sup\{x\}$ и $\inf\{x\}$ могут как принадлежать, так и не принадлежать множеству $\{x\}$.