

Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения первого порядка

- Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными
- Однородные дифференциальные уравнения
- Линейные уравнения

Уравнения с разделяющимися переменными

Наиболее простым ДУ первого порядка является уравнение вида:

$$P(x)dx = Q(y)dy \quad (1)$$

Такое уравнение называется уравнением с **разделенными переменными**.

Проинтегрировав это уравнение почленно, получим:

$$\int P(x)dx = \int Q(y)dy + C \text{ - общий интеграл ДУ.}$$

Более общий случай описывают уравнения с **разделяющимися переменными**, которые имеют вид:

$$P_1(x) \cdot Q_1(y)dx + P_2(x) \cdot Q_2(y)dy = 0 \quad (2)$$

Уравнение (2) сводится к уравнению (1) путем почленного деления его на

$$P_2(x) \cdot Q_1(y) \neq 0$$

Уравнения с разделяющимися переменными

Получаем:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = 0 \implies \int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot dx = \int -\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy + C$$

Замечание: при проведении почленного деления ДУ на $P_2(x)Q_1(y)$ могут быть потеряны некоторые решения.

Поэтому следует отдельно решить уравнение $P_2(x)Q_1(y) = 0$ и установить те решения, которые не могут быть получены из общего решения – **особые решения**.

Уравнение

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad (3)$$

также сводится к уравнению с разделенными переменными.

Для этого достаточно положить $y' = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \implies \int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx + C$$

Уравнения с разделяющимися переменными

$$(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0 \Rightarrow y(1+x)dx = x(y-1)dy$$

Разделим обе части уравнения на xy : $\frac{1+x}{x}dx = \frac{y-1}{y}dy \Rightarrow$

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \int \left(1 - \frac{1}{y}\right) dy \Rightarrow x + \ln|x| = y + \ln|y| + C$$

Решим уравнение $xy = 0$:

Общий интеграл ДУ

Его решения: $x = 0$ и $y = 0$ являются решениями данного ДУ, но не входят в общее решение, значит это **особое решение**.

Решить задачу Коши: $y' = -\frac{y}{x}$; $y(4) = 1$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln C \Rightarrow \ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$\Rightarrow y = \frac{C}{x}$$

Подставим начальные условия: $1 = \frac{C}{4} \Rightarrow C = 4$

$$y = \frac{4}{x}$$

Общее решение ДУ

Частное решение ДУ

Уравнения с разделяющимися переменными

Рассмотрим задачу, приводящую к ДУ первого порядка с разделяющимися переменными:

Задача: материальная точка массы m замедляет свое движение под воздействием силы сопротивления среды, пропорциональной квадрату скорости V . Найти зависимость скорости от времени. Найти скорость точки через 3 с после начала замедления, если $V(0) = 100$ м/с, $V(1) = 50$ м/с.

Решение:

Примем за переменную время t , отсчитываемое от начала замедления точки. Тогда скорость V будет функцией t : $V = V(t)$.

Воспользуемся вторым законом Ньютона:

$$F = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad F = m \cdot V'(t)$$

В нашем случае $F = -kV^2$

$k > 0$ - коэффициент пропорциональности

Уравнения с разделяющимися переменными

Получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$-kV^2 = m \cdot V' \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\frac{k}{m}V^2 \Rightarrow \int \frac{dV}{V^2} = \int -\frac{k}{m} dt$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{V} = -\frac{k}{m}t + C \Rightarrow V = \frac{1}{\frac{k}{m}t + C}$$

По условию задачи: $V(0) = \frac{1}{C} = 100 \Rightarrow C = \frac{1}{100}$

$$V(1) = \frac{1}{\frac{k}{m} + \frac{1}{100}} = 50 \Rightarrow \frac{k}{m} = \frac{1}{100}$$

Скорость точки изменяется по закону:

$$V = \frac{100}{t+1}$$

$$V(3) = 25$$

ДУ с однородной функцией
нулевого порядка в правой части.
(однородные уравнения первого порядка).

- Функция $f(x; y)$ называется однородной степени n , если умножение всех её аргументов на одно и то же число t равносильно умножению функции на t^n , т.е.

$$f(tx; ty) = t^n f(x; y)$$

Пример 1.

1) $f(x; y) = x^3 + 2x^2y - 5y^3$ - однородная функция
3-ей степени

Так как $f(tx; ty) = (tx)^3 + 2(tx)^2 ty - 5(ty)^3 =$
 $= t^3 x^3 + 2t^2 x^2 t y - 5t^3 y^3 = t^3 (x^3 + 2x^2 y - 5y^3) =$
 $= t^3 f(x; y)$

2) $f(x; y) = 3x + 2y$ - однородная функция 1-ой степени

Так как $f(tx; ty) = 3tx + 2ty = t(3x + 2y) = t \cdot f(x; y)$

3) $f(x; y) = \frac{x - y}{2x + 3y}$ - однородная функция 0-ой степени

Так как $f(tx; ty) = \frac{tx - ty}{2tx + 3ty} = \frac{t(x - y)}{t(2x + 3y)} = \frac{x - y}{2x + 3y} =$

$$= f(x; y) = t^0 f(x; y)$$

4) $f(x; y) = x^2 \sin \frac{y}{x}$ - однородная функция 2-ой степени

Так как $f(tx; ty) = (tx)^2 \sin \frac{ty}{tx} = t^2 x^2 \sin \frac{y}{x} = t^2 f(x; y)$

5) $f(x; y) = \frac{1}{x + y}$ - однородная функция (-1)-ой степени

Так как $f(tx; ty) = \frac{1}{tx + ty} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{x + y} = t^{-1} \frac{1}{x + y} =$
 $= t^{-1} f(x; y)$

- ДУ I порядка $y' = f(x; y)$ называется однородным, если $f(x; y)$ - однородная функция 0-ой степени, т.е.

$$f(tx; ty) = f(x; y)$$

- Однородное ДУ I порядка
записать в виде:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Т.к. $f(x; y) = f(tx; ty)$, то если положить $t = \frac{1}{x}$

Получаем:

$$f(x; y) = f\left(\frac{x}{x}; \frac{y}{x}\right) = f\left(1; \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Решение однородного ДУ I порядка $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

Это уравнение преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи замены переменной

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{или} \quad y = u \cdot x$$

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{или} \quad y = u \cdot x$$

$$(u \cdot x)' = \varphi(u)$$

$$u'x + u \cdot x' = \varphi(u)$$

$$u'x + u = \varphi(u)$$

$$x \cdot \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u$$

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$F(u) = \ln|x| + C$$

ИЛИ

$$F\left(\frac{y}{x}\right) = \ln|x| + C \quad \text{-общее решение данного ДУ}$$

Пример 2. Найти общее решение ДУ:

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

Это однородное ДУ вида $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{y}{x} = u \quad \Rightarrow \quad y = u \cdot x$$

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

$$u'x + u x' = u + \operatorname{tgu}$$

$$x \frac{du}{dx} + u = u + \operatorname{tgu}$$

$$x \frac{du}{dx} = \operatorname{tgu}$$

$$\frac{du}{\operatorname{tgu}} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{\operatorname{tgu}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + C$$

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln|\sin u| = \ln|Cx|$$

$$|\sin u| = |Cx|$$

$$\sin u = \pm Cx$$

$$\sin u = Cx$$

$$u = \arcsin Cx$$

$$\frac{y}{x} = \arcsin Cx$$

$$y = x \cdot \arcsin Cx$$

Пример 3. Решить задачу Коши:

$$y' = \frac{2x + y}{2x}, \text{ если } y(1) = 0$$

$$y' = \frac{2x + y}{2x} = \frac{2x}{2x} + \frac{y}{2x} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x}$$

Это однородное ДУ вида $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\frac{y}{x} = u \quad \Rightarrow \quad y = u \cdot x$$

$$y' = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x}$$

$$x \frac{du}{dx} = 1 - \frac{u}{2}$$

$$u'x + u = 1 + \frac{1}{2} \cdot u$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{2-u}{2}$$

$$x \frac{du}{dx} + u = 1 + \frac{u}{2}$$

$$\frac{du}{2-u} = \frac{dx}{2x}$$

$$x \frac{du}{dx} = 1 + \frac{u}{2} - u$$

$$\int \frac{du}{2-u} = \int \frac{dx}{2x}$$

$$-\ln|2-u| = \frac{1}{2}\ln|x| + C \quad | \cdot (-2)$$

$$2\ln|2-u| = -\ln|x| + C$$

$$\ln(2-u)^2 = -\ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln(2-u)^2 = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$2-u = \frac{C}{\sqrt{x}}$$

$$(2-u)^2 = \frac{C}{x}$$

$$u = 2 - \frac{C}{\sqrt{x}}$$

$$2-u = \pm\sqrt{\frac{C}{x}}$$

$$\frac{y}{x} = 2 - \frac{C}{\sqrt{x}}$$

$$y = x \left(2 - \frac{C}{\sqrt{x}} \right) \quad - \text{общее решение}$$

Решим задачу Коши $y(1)=0$:

$$0 = 1 \cdot \left(2 - \frac{C}{1} \right)$$

$$0 = 2 - C$$

$$C = 2$$

$$y = x \left(2 - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$$

или $y = 2(x - \sqrt{x})$ - частное решение

- Уравнение вида $M(x; y) dx + N(x; y) dy = 0$

называется однородным уравнением в дифференциальной форме,

если $M(x; y)$ и $N(x; y)$ - однородные функции одной и той же степени.

Пример 4. Найти общее решение ДУ:

$$y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$$

$$y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx} \quad | \cdot dx$$

$$y^2 dx + x^2 dy = xy dy$$

$$y^2 dx + (x^2 - xy) dy = 0$$

- однородное уравнение вида

$$M(x; y) dx + N(x; y) dy = 0$$

$M(x; y)$

$N(x; y)$

$$\frac{y}{x} = u \quad \Rightarrow \quad y = u \cdot x$$

$$y' = u'x + u x'$$

$$\frac{dy}{dx} = u'x + u x'$$

$$dy = u'x dx + u x' dx$$

$$dy = x du + u dx$$

$$y^2 dx + (x^2 - xy) dy = 0$$

$$u^2 x^2 dx + (x^2 - x \cdot ux)(x du + u dx) = 0$$

$$u^2 x^2 dx + x^3 du - x^3 u du + x^2 u dx - x^2 u^2 dx = 0$$

$$x^3 (1 - u) du + ux^2 dx = 0$$

$$x^3 (1 - u) du = -ux^2 dx$$

$$\frac{u-1}{u} du = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{u-1}{u} du = \int \frac{dx}{x} \quad (*)$$

$$\int du - \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$u - \ln|u| = \ln|x| + C$$

$$u - \ln|u| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln e^u - \ln|u| = \ln|Cx|$$

$$\ln \left| \frac{e^u}{u} \right| = \ln|Cx|$$

$$\frac{e^u}{u} = \pm Cx$$

$$\frac{e^u}{u} = Cx$$

$$e^u = uCx$$

$$e^{\frac{y}{x}} = \frac{y}{x} Cx$$

$$e^{\frac{y}{x}} = Cy \quad \text{- общее решение}$$

Это однородное ДУ можно привести к виду $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

$$y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$$

$$y^2 + (x^2 - xy) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x^2 - xy) \cdot y' = -y^2$$

$$y' = -\frac{y^2}{x(x-y)} = \frac{y^2}{x(y-x)} = \frac{y^2}{x^2 \left(\frac{y}{x} - 1\right)} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1}$$

$$\frac{y}{x} = u \quad \Rightarrow \quad y = u \cdot x$$

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x} - 1} \quad \Rightarrow \quad u'x + u = \frac{u^2}{u - 1}$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u - 1} - u$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u^2 - u^2 + u}{u - 1}$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u}{u-1}$$

$$\frac{u-1}{u} du = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{u-1}{u} du = \int \frac{dx}{x}$$

- получили (*)

Пример 5. Найти общее решение ДУ:

$$(x^2 - 2y^2)dx + 2xy dy = 0$$

$$(x^2 - 2y^2)dx + 2xy dy = 0$$

$M(x;y)$

$N(x;y)$

- однородное уравнение вида

$$M(x; y) dx + N(x; y) dy = 0$$

$$\frac{y}{x} = u$$

\Rightarrow

$$y = u \cdot x$$

$$\frac{dy}{dx} = u'x + u x'$$

$$y' = u'x + u x'$$

$$dy = u'x dx + u x' dx$$

$$dy = x du + u dx$$

$$(x^2 - 2u^2 x^2) dx + 2x \cdot ux (x du + u dx) = 0$$

$$(x^2 - 2x^2 u^2) dx + 2x^3 u du + 2x^2 u^2 dx = 0$$

$$x^2 dx + 2x^3 u du = 0$$

$$2u du = -\frac{dx}{x}$$

$$\int 2u du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$u^2 = -\ln|x| + C$$

$$u^2 = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$y^2 = x^2 \ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

$$y^2 = -x^2 \ln|Cx|$$

$$y^2 + x^2 \ln|Cx| = 0$$

Пример 6. Найти общее решение ДУ:

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Это однородное ДУ можно привести к виду $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

$$xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2} \quad | : x$$

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2}}$$

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\frac{y}{x} = u \quad \Rightarrow \quad y = u \cdot x$$

$$y' = u'x + u x'$$

$$y' = x \frac{du}{dx} + u$$

$$x \frac{du}{dx} + u = u + \sqrt{1+u^2}$$

$$x \frac{du}{dx} = \sqrt{1+u^2}$$

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|u + \sqrt{1+u^2}| = \ln|x| + C$$

$$u + \sqrt{1+u^2} = Cx$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Cx$$

$$\frac{y}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = Cx$$

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$$

общий
интеграл ду

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2 \quad - \text{общий интеграл}$$

ИЛИ

$$\sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2 - y \quad | ()^2$$

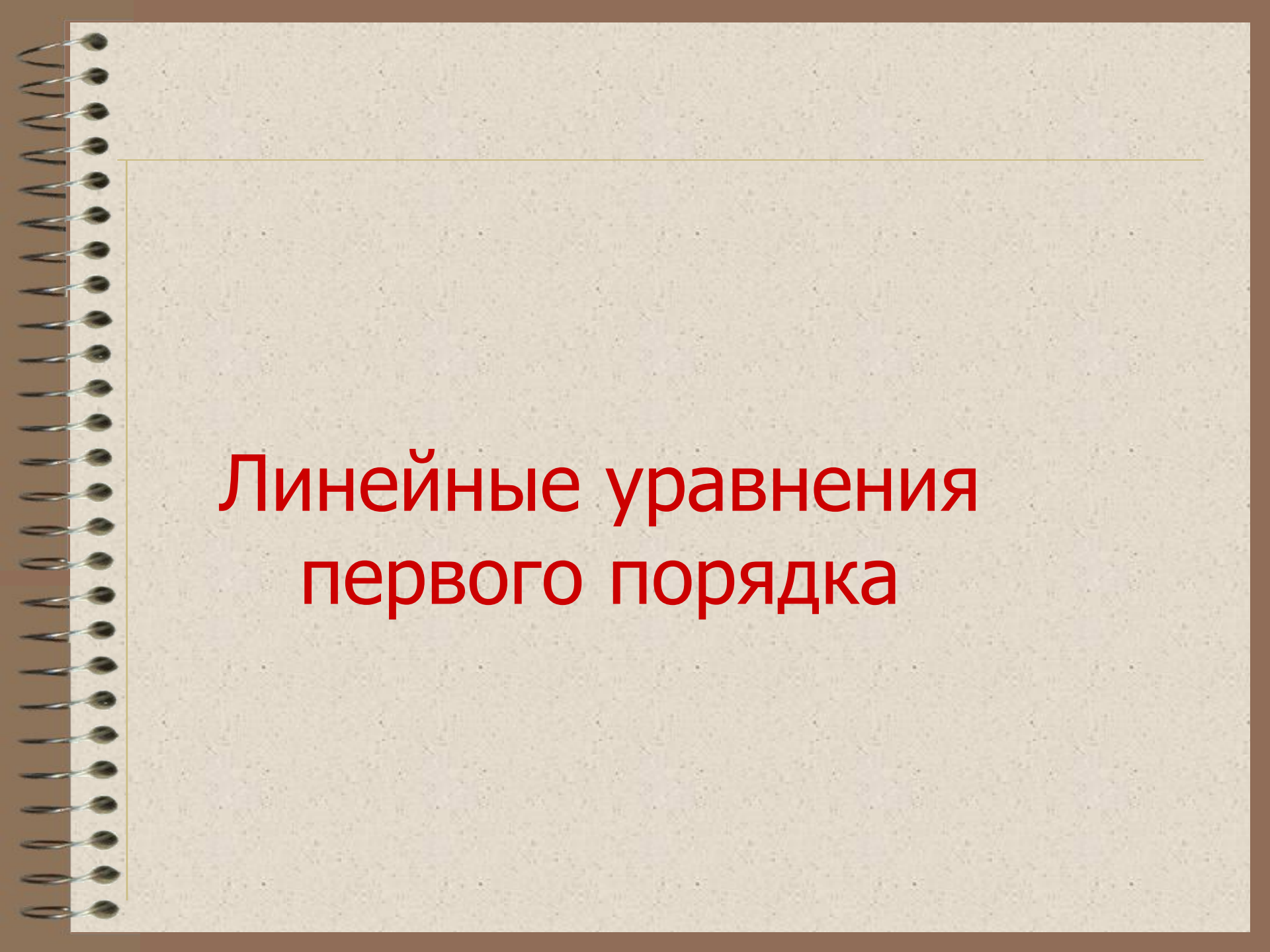
$$x^2 + y^2 = (Cx^2 - y)^2$$

$$x^2 + y^2 = Cx^4 - 2yCx^2 + y^2$$

$$x^2 = x^2(Cx^2 - 2yC)$$

$$1 = C(x^2 - 2y)$$

$$\frac{1}{x^2 - 2y} = C \quad - \text{общий интеграл}$$

A spiral-bound notebook with a light beige cover and a silver metal spiral binding on the left side. The notebook is open to a blank page with a light beige background. A thin gold horizontal line is visible near the top of the page. The text is centered on the page in a bold, red, sans-serif font.

Линейные уравнения первого порядка

Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется ДУ 1-го порядка, линейное относительно неизвестной функции y и ее производной y' .

В общем случае линейное уравнение 1-го порядка можно

записать в виде
$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \quad (1)$$

где $p(x)$, $q(x)$ – заданные непрерывные функции.

Если $q(x) \equiv 0$, то линейное уравнение называется *однородным*.

В противном случае уравнение называется *неоднородным*.

Линейное однородное уравнение

$$y' + p(x) \cdot y = 0$$

является уравнением с разделяющимися переменными.

$$y' + p(x)y = 0$$

Разделим переменные: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow$

$\frac{dy}{y} = -p(x)dx$, интегрируя это выражение, получаем:

$$\ln |y| = -\int p(x)dx + \ln C, \quad C > 0 \Rightarrow$$

$$\ln |y| = \ln e^{-\int p(x)dx} + \ln C, \quad \text{где } C > 0 \Rightarrow$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \quad C \neq 0$$

В процессе преобразований было потеряно решение $y=0$.

Тогда общее решение принимает вид:

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx} \quad \forall C \quad (2)$$

Рассмотрим линейное неоднородное

уравнение:

$$y' + p(x) \cdot y = f(x). \quad (1)$$

Существуют два метода его

I) Метод вариации постоянной (метод Лагранжа)

- 1) Интегрируем однородное уравнение $y' + p(x) \cdot y = 0$,
– соответствующее данному неоднородному уравнению.

Его общее решение имеет вид :

$$(2) \quad y = C \cdot e^{-\int p(x) dx}.$$

- 2) Полагаем, что решение **неоднородного** уравнения по структуре совпадает с решением соответствующего линейного **однородного** уравнения.

$$\Rightarrow \text{Оно имеет вид } y = C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx}.$$

Функцию $C(x)$ найдем, подставив

y и y' в исходное неоднородное уравнение (1).

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx} \cdot e^{-\int p(x) dx} - C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} \cdot p(x)$$

Подставим эти выражения в уравнение $y' + p(x)y = f(x)$:

$$\frac{dC}{dx} \cdot e^{-\int p(x) dx} - C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} \cdot p(x) + p(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int p(x) dx} = f(x)$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dx} \cdot e^{-\int p(x) dx} = f$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dx} = f(x) \cdot e^{\int p(x) dx}$$

$$\Rightarrow dC = f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx$$

Интегрируя, находим $C(x) = \int f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + C$.

$$C(x) = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

Таким образом, общее решение линейного неоднородного уравнения (1) имеет вид:

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = \left(\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right) e^{-\int p(x)dx} \quad (3)$$

Замечание.

Раскроем скобки в (3):

$$y(x) = C \cdot e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \cdot \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx. \quad (4)$$

Заметим, что первое слагаемое в (4) – общее решение линейного однородного уравнения, а второе – частное решение линейного неоднородного уравнения (получается из общего решения при $C = 0$).

III) Метод Бернулли.

Будем искать решение (1) в следующем виде:

$$y = u(x) \cdot v(x) .$$

Тогда

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v' .$$

Подставим y

и y' в уравнение (1) и получим:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + puv = f(x)$$

или

$$u' \cdot v + u \cdot [v' + pv] = f(x) .$$

Полагаем, что функция $v(x)$ такова,

что

$$[v' + pv] = 0 .$$

}

(5)

Тогда (5) позволяет однозначно определить $v(x)$ и $u(x)$.

Первое уравнение – это линейное однородное уравнение

$$\Rightarrow v(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$$

Учитывая свободу выбора $v(x)$, положим $C = 1$, тогда

$$v(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Подставляем полученную функцию во второе уравнение:

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int p(x)dx} = f \quad \Rightarrow \quad du = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx \quad \Rightarrow$$

(x)

$$\Rightarrow y = u(x) \cdot v(x) = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C$$

Замечание. Линейное неоднородное уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = b$$

проще интегрировать как уравнение с разделяющимися переменными.