Методы оптимальных решений
Введение . Литература. Контрольная работа

Методы принятия оптимальных решений имеют широкое применение в различных областях практической деятельности.

С точки описания модели <u>методы решения оптимизационных задач подразделяются на линейные и нелинейные .</u>

В настоящем курсе изучаются <u>линейные оптимизационные модели.</u>

<u>Литература по дисциплине:</u>

1. М.С. Красс, Б.П. Чупрынов. Математика для экономистов. Главы 8, 14

2. М.Ю. Афанасьев, К.А. Багриновский, В.М. Матюшок. Прикладные задачи исследования операций. Главы 1 – 5.

3. Высшая математика для экономистов./Под ред. Н.Ш.Кремера. Глава 15, 15.1- 15.8, 15.11.

4. О. О. Замков, А.В. Толстопятенко, Ю.Н. Черемных. Математические методы в экономике. МГУ, М. «ДИС» 1997 г.

Методы оптимальных решений
Контрольная работа

<u>Контрольная работа.</u>

Поток разбивается на <u>бригады по три человека</u>

Цель контрольной_работы - постановка задач оптимизации.

В отчете следует сформулировать и описать

- **задачу линейного программирования**
- **транспортную задачу.**

Методы оптимальных решений
Основные темы дисциплины

Основные темы дисциплины

1. Оптимизация – постановка задачи
2. Линейное программирование и задача оптимизации. Методы решения
3. Двойственные задачи. Применение в экономических приложениях
4. Транспортная задача
5. Нелинейная оптимизация – постановка задачи

1. Оптимизация – постановка задачи

Оптимизация – постановка задачи

Оптимизация **– раздел теории исследования операций. Это деятельность, направленная на получение** ***наилучших результатов*** **при соответствующих условиях.**

Постановка задачи оптимизации предполагает существование конкурирующих свойств процесса, (количество продукции и расход сырья; количество и качество продукции).

Выбор компромиссного варианта является решением оптимизационной задачи.

При постановке задачи оптимизации необходимо:

1).Наличие ***объекта и цели*** **оптимизации;**

2). Наличие ***ресурсов оптимизации*****, т.е. возможность выбора значений некоторых параметров оптимизируемого объекта;**

3). ***Возможность количественной оценки*** **оптимизируемой величины, так как только в этом случае можно сравнивать эффекты от выбора тех или иных управляющих воздействий.**

4). ***Учет ограничений.***

Оптимизация – терминология

Операция **– любое действие, направленное на достижение конкретной цели**

Решение **- любой набор всех необходимых параметров операции**

Оптимальное решение **– решение, которое согласно последующей оценке, предпочтительнее других.**

Оптимизация – терминология

Показатель эффективности, ***целевая функция*** **F –** разработанный заранее ***численный критерий оценки,*** позволяющий сравнивать между собой различные варианты решения задачи

На любую операцию воздействуют два вида факторов:

1. Известные, заданные факторы (параметры) a_1, a_2, …a_n
2. Подлежащие определению элементы решения x_1, …x_n

В этом случае целевая функция F зависит от каждого вида, может быть записана

$F(a_1,a_2..a_n;x_1,x_2,\dots x_n) \to \max$

или

$F(a_1,a_2..a_n;x_1,x_2,\dots x_n) \to \min$

Оптимизация – постановка задачи

Чаще всего оптимизационные модели принятия решений записываются как системы ограничений на регулируемую многомерную переменную X и сформулированную *целевую функцию F (X)*. Формулировка задачи

Целевая функция **F(X)→ min (или F(X)→ max) (1)**

Система ограничений **Ax<=B (2)**

В (1) и (2): X – вектор независимых переменных

A – матрица коэффициентов системы

B – вектор ограничений

Если и ограничения системы (2), и целевая функция (1) линейны, то задача решается методами *линейного программирования*

Управляющий параметр *X* может иметь различную природу – число, вектор, множество и т.п. Задача менеджера – оптимизировать целевую функцию F (*X*), выбрав управляющий параметр *X*, соответствующий системе ограничений (2)

Оптимизация – постановка задачи

Полученные на предыдущем слайде выражения:
целевой функции **F(X)□ min (F(X)□ max) (1)**
и системы ограничений Ax<=B (2)
могут быть записаны в матричной форме.

$$F(X)=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j \rightarrow \max(\min) \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \le b_i, i=\overline{1,m} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0, j=\overline{1,n}$$

Оптимизация – методы решения

К методам решения оптимизационных задач относятся:

- **Метод математического программирования**
- **<u>Методы линейного программирования</u>**
- **Методы нелинейного программирования**
- **Метод целочисленного программирования и др.**

Широкое применение получил *<u>метод линейного программирования</u>*. Основной особенностью задачи линейного программирования является то, что *<u>как ограничения</u>* (системы линейных неравенств или равенств), так и *<u>целевая функция</u>* линейны.

Впервые задачи ЛП решались советским математиком Л.В. Канторовичем (1912-1986) в 1930-х годах как задачи производственного менеджмента с целью оптимизации организации производства и производственных процессов. Впоследствии аналогичными задачами занялся Т. Купманс США). Л.В. Канторович и Т. Купманс были награждены *Нобелевскими премиями по экономике.*

2. Линейное программирование. Методы решения

К задачам линейного программирования относятся:

- Разработка оптимального плана производства;

- Задачи оптимального смешения – однопродуктовые и многопродуктовые;

- Задачи оптимального раскроя и др.

В зависимости от размерности управляющего параметра X (числа независимых переменных) задачу решают графическим или аналитическим путем.

<u>В случае двух независимых переменных задачу можно решить графическим методом.</u>

В случае, когда количество переменных больше двух, применяют различные методы, такие, как *<u>симплекс метод</u>* *или* *<u>метод двойственности</u>*

2. Линейное программирование и задача оптимизации. Методы решения

Линейное программирование. Методы решения

Методы решения задач линейного программирования относятся к вычислительной математике, а не к экономике и менеджменту. Уметь пользоваться этим инструментом должен любой менеджер или инженер. Существуют программы, (Excel), позволяющие автоматизировать решение этой задачи.

Методы решения задачи линейного программирования

1.Простой перебор. Метод графического решения задачи. Строится многоугольник области допустимых решений, в узлах этого прямоугольника вычисляется значение целевой функции, находятся координаты оптимального решения. Применим для задач с двумя управляющими параметрами

2. Направленный перебор. Строится линия целевой функции, которая переносится параллельно самой себе в направлении роста целевой функции. Находится вершина решения

3. Симплекс метод

Линейное программирование. Пример 1.

Цех производит стулья и столы. На производство стула идет 5 единиц материала, на производство стола - 20 единиц. Стул требует 10 человеко-часов, стол - 15. Имеется 400 единиц материала и 450 человеко-часов. Прибыль при производстве стула – 45 руб. , при производстве стола - 80 руб. Определить объем производимой продукции, дающий максимальную прибыль, израсходовав при этом весь материал.

Обозначим: X_1 - число изготовленных стульев, X_2 – количество изготовленных столов. Опишем задачу в табличной форме

Таблица 1

Параметры процесса	Продукция		Всего
	Стулья(X_1)	Столы(X_2)	
Количество материала/ед. продукции	5	20	400
Время чел/час	10	15	450
Прибыль от производства ед. продукции в руб.	45	80	

3. Продолжение примера 1

Параметры процесса	Продукция		Всего
	Стулья (x_1)	Столы (x_2)	
Количество материала/ед.	5	20	400
Время чел/час	10	15	450
<u>Прибыль от производства</u>	<u>45</u>	<u>80</u>	

x_1 –количество стульев, x_2 - количество столов

Задача оптимизации (целевая функция) и ограничения задачи (допустимое множество X) имеет вид

<u>Целевая функция</u> $F(x_1,x_2) = 45\,X_1 + 80\,X_2 \rightarrow \max$, (1)

Ограничения задачи

$$
\begin{aligned}
5\,X_1 + 20\,X_2 &\le 400 \\
10\,X_1 + 15\,X_2 &\le 450 \qquad (2) \\
X_1 &\ge 0 \\
X_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

Решение примера 1 графическим методом

Систему ограничений (2) можно представить в виде <u>выпуклого</u> многоугольника. $F(x_1,x_2) = 45\,X_1 + 80\,X_2$ □ max ,

$$5\,X_1 + 20\,X_2 \le 400$$

$$10\,X_1 + 15\,X_2 \le 450 \qquad (2)$$

$$X_1 \ge 0\ ;\ X_2 \ge 0$$

<u>Ограничения по материалу</u> $5\,X_1 + 20\,X_2 \le 400$ **и** $X_1 \ge 0$, $X_2 \ge 0$, **можно представить в виде треугольника рис.1 ;**

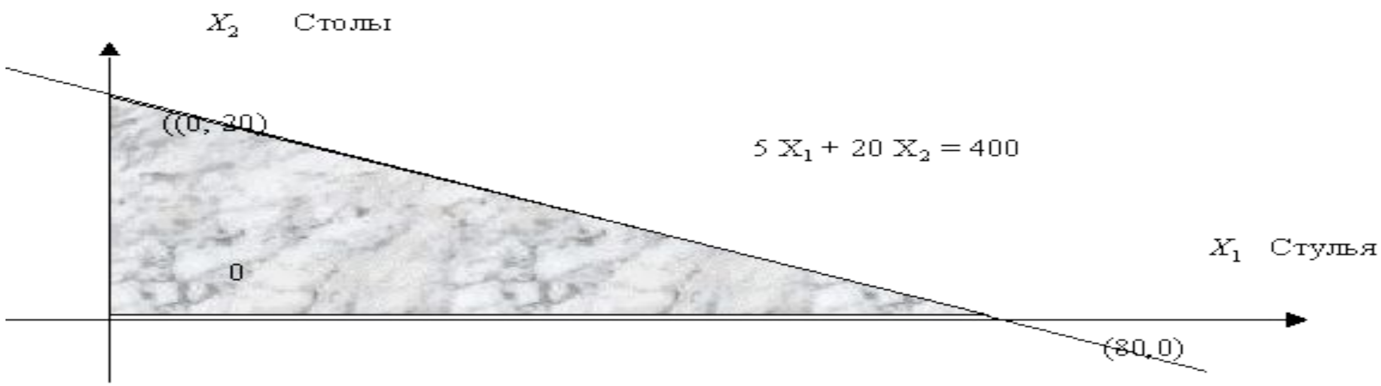


Рис. 1. Ограничения по материалу

Прямая пересекает ось X_1 (стулья) в точке (80,0), пересекает ось X_2 в точке (0, 30). Это означает, что если весь материал пустить на изготовление стульев, то будет изготовлено 80 стульев, если на столы – то будет изготовлено 30 столов.

Решение примера 1 графическим методом

Ограничения по труду **$10X_1 + 15X_2 \le 450$ и $X_1 \ge 0$, $X_2 \ge 0$ можно представить в виде треугольника рис. 2.**

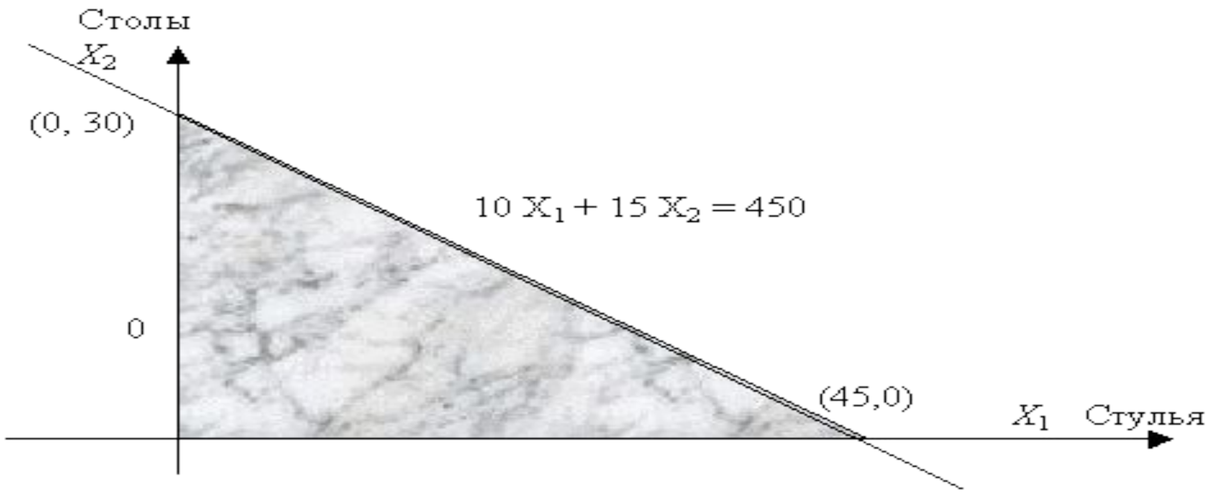
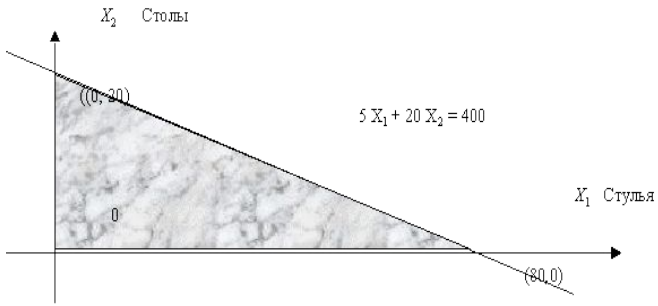


Рис.2. Ограничения по труду

Совмещение рис.1 и рис.2 дает рис.3, всю область допустимых решений (выпуклый многоугольник допустимых решений)

Линейное программирование. Продолжение примера 1



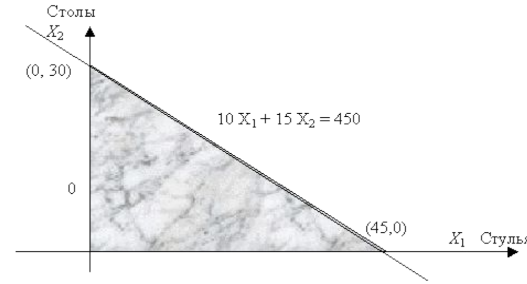
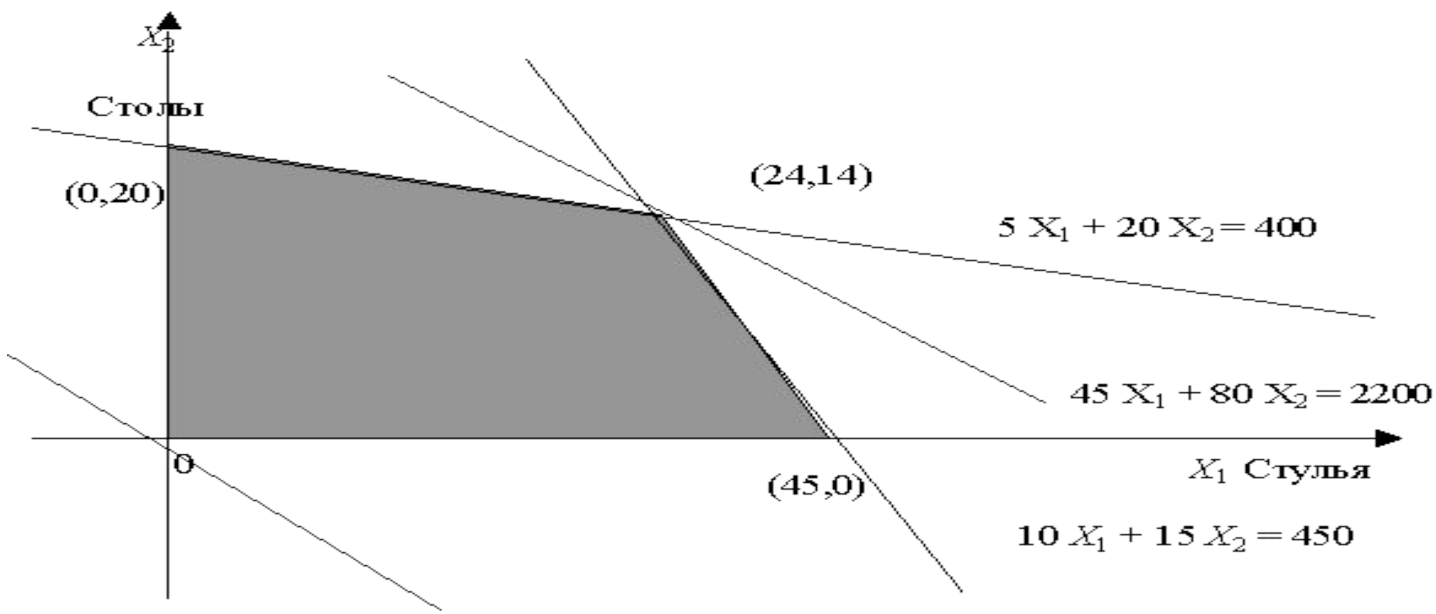


Рис.2. Ограничения по труду



Линейное программирование. Продолжение примера 1

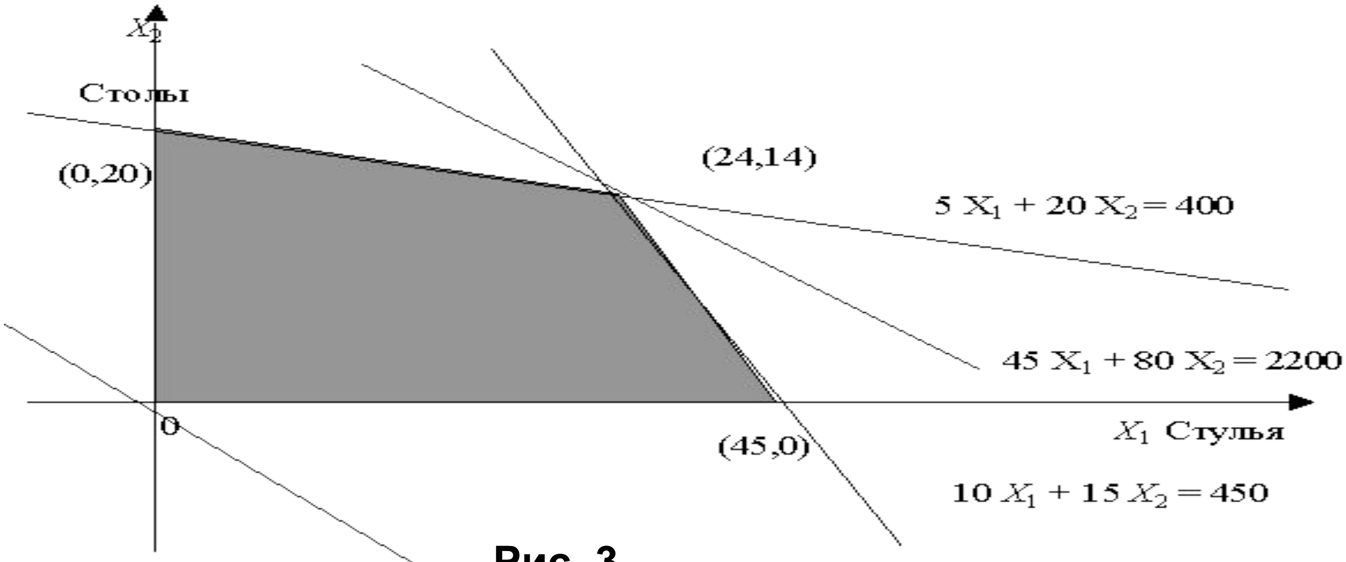


Рис. 3

Объединение ограничений рис. 1 и рис. 2 приводит к образованию совместной системы ограничений и формированию области допустимых решений. Графически эта область представляет выпуклый многоугольник (рис.3) с соответствующими координатами вершин. Максимальное значение целевой функции для этой задачи можно найти методом простого перебора, вычислив значение целевой функции $F(x_1,x_2) = 45 X_1 + 80X_2$ в узлах выпуклого многоугольника или по градиентному методу поиска.

Решение задачи: максимум целевой функции достигается в точке (24, 14) и равен 2200 денежных единиц.

Вывод

Полученное решение примера 1 говорит о том, что максимальную прибыль (2200 денежных единиц) цех по производству столов и стульев получит при производстве 24 стульев и 14 столов.

2. Линейное программирование. Пример 2

Рассмотрим задачу планирования производства:
Кооператив по производству строительных материалов выпускает *жидкое стекло* и *пенопласт.*
<u>Трудозатраты</u> на производство 1 т. стекла -20 ч., 1 т. пенопласта - 10 ч.
<u>Оборудование</u> позволяет производить не более 15 т. стекла и 30 т. пенопласта в неделю.
<u>Прибыль</u> от реализации 1 т. стекла - 50 р., 1 т. пенопласта – 40 р.
В кооперативе работают 10 рабочих, по 40 часов в неделю.
Сколько материалов каждого вида следует выпускать для получения максимальной прибыли.
Приведем математическую модель задачи. Для этого обозначим переменные задачи:
x_1 – объем производимого стекла в неделю,
x_2 - объем производимого пенопласта в неделю.

В кооперативе работают 10 человек, по 40 часов в неделю

2. Линейное программирование. Продолжение примера 2

Запишем условие задачи в виде таблицы

Трудозатраты на производство 1 т.	Жидкое стекло	Пенопласт
	20 ч.	10 ч.
Производительность оборудования в неделю.	15 т.	30 т.
Прибыль от реализации 1 т.	50 р.	40 р.
В кооперативе работают 10 человек, по 40 часов в неделю		

x_1 – объем производимого *<u>жидкого стекла</u>* в неделю,

x_2 - объем производимого *<u>пенопласта</u>* в неделю

***F* – целевая функция**

$$F = 50x_1 + 40x_2 \to \max$$

Система ограничений

$$20x_1 + 10x_2 \le 400$$

$$x_1 \le 15;$$

$$x_2 \le 30$$

$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$$

Продолжение примера 2. x_1 **– объем производимого *жидкого стекла* в неделю,** x_2 **- объем производимого *пенопласта* в неделю**

F – целевая функция $F = 50x_1 + 40x_2 \rightarrow \max$

Система ограничений

$$20x_1 + 10x_2 \le 400$$
$$x_1 \le 15;$$
$$x_2 \le 30$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$$

2.Линейное программирование. Продолжение примера 2

Описание задачи в матричной форме:

Вектор переменных $\mathbf{X=(x_1,\ x_2)}$

Вектор коэффициентов целевой функции $\mathbf{C=(c_1,\ c_2) = (50,40)}$

Вектор ограничений $\mathbf{B=(в_1,в_2,в_3)=(\ 400,15,30)}$

Матрица ограничений

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Описание задачи в матричной форме:

$$\mathbf{F=C \cdot X^t \rightarrow max}$$

$$\mathbf{A \cdot X^t \le B}$$

$$\mathbf{X_j >= 0}$$

2 Линейное программирование. Пример 2. Продолжение

Выше (слайд 20) была получена математическая модель примера 2

$$50x_1 + 40x_2 \to \max \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} &20x_1 + 10x_2 \le 400 \\ &x_1 \le 15 \\ &x_2 \le 30 \\ &x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Найденное графическим методом оптимальное решение равно $X=(x_1, x_2)=$ (5, 30), значение целевой функции, максимальная прибыль от реализации 5 тонн жидкого стекла и 30 тонн пенопласта равна $F = 50x_1 + 40x_2 = 1450$ условных денежных единиц

2. Линейное программирование. Симплекс метод

1. Основной, универсальный метод решения задачи линейного программирования
2. Один из первых специализированных методов решения задач линейного программирования. Предложен американцем Г. Данцигом в 1951 г.
3. Основной алгоритм реализации метода: продвижение по выпуклому многограннику ограничений от вершины к вершине, при котором на каждом шаге значение целевой функции улучшается до тех пор, пока не будет достигнут оптимум.
В соответствии с методом, переход от одного допустимого базисного решения к другому приводит к тому, что значения целевой функции непрерывно стремится к оптимальному .
Оптимальное решение находится за конечное число шагов.

2. Линейное программирование. Симплекс метод

Основной алгоритм метода:

1) **Исходная система при помощи дополнительных переменных приводится в каноническую форму**
2) **Выбираются базисные переменные, свободные переменные пересчитываются через базисные, пересчитывается целевая функция.**
3) **Для следующей итерации выбирают разрешающую переменную, пересчитывают матрицу А, определяют новый базис**
4) **Пункты 2) и 3) повторяют до достижения оптимального значения целевой функции**

2. Линейное программирование. Симплекс метод.

Пример 3. Словесное и табличное описание задачи

Предприятие может выпускать автоматические кухни, кофеварки и самовары. Данные о производственных мощностях (в штуках изделий) приведены в табл. 2. Штамповка и отделка проводятся на одном и том же оборудовании, а сборка проводится на отдельных участках

Таблица 2

	Кухни	Кофеварки	Самовары
Штамповка	20000	30000	12000
Отделка	30000	10000	10000
Сборка	20000	12000	8000
Объем выпуска	x_1	x_2	x_3
Удельная прибыль (на 1 изделие)	15	12	14

Симплекс метод. Продолжение примера 3

	Кухни	Кофеварки	Самовары
Штамповка	20000	30000	12000
Отделка	30000	10000	10000
Сборка	20000	12000	8000
Объем выпуска	x_1	x_2	x_3
Удельная прибыль	15	12	14

Для удобства восприятия <u>система ограничений дана в процентах</u> и задача линейного программирования имеет вид

<u>Система ограничений</u>

$X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$, $X_3 \geq 0$, (0) {стандартные ограничения}

$X_1 / 200 + X_2 / 300 + X_3 / 120 \leq 100$, (1) {ограничение по штамповке}

$X_1 / 300 + X_2 / 100 + X_3 / 100 \leq 100$, (2) {ограничение по отделке}

$X_1 / 200 \leq 100$, (3) {ограничение по сборке для кухонь, вытекает из 1, можно исключить}

$X_2 / 120 \leq 100$, (4) {ограничение по сборке для кофеварок, из 2, можно исключить}

$X_3 / 80 \leq 100$, (5) {ограничение по сборке для самоваров}

<u>Целевая функция</u>

- $F = 15 X_1 + 12 X_2 + 14 X_3 \rightarrow \max$.

Симплекс метод. Продолжение примера 3

Описание задачи после исключения неравенств (3) и (4)

$F = 15\,X_1 + 12\,X_2 + 14\,X_3 \rightarrow \max$.

- $X_1 / 200 + X_2 / 300 + X_3 / 120 \le 100$ (1),
- $X_1 / 300 + X_2 / 100 + X_3 / 100 \le 100$ (2),
- $X_3 / 80 \le 100$ (5)

Вводом трех новых переменных система неравенств приводится в систему равенств. В результате получена система уравнений (4) с тремя уравнениями и шестью неизвестными. Система решается путем последовательного перебора базовых переменных, который приводит к росту целевой функции

Система ограничений

$$\begin{aligned} X_1 / 200 + X_2 / 300 + X_3 / 120 + X_4 &= 100 \\ X_1 / 300 + X_2 / 100 + X_3 / 100 + X_5 &= 100 \qquad (4) \\ X_3 / 80 + X_6 &= 100 \end{aligned}$$

$X_1 \ge 0$, $X_2 \ge 0$, $X_3 \ge 0$, $X_4 \ge 0$, $X_5 \ge 0$, $X_6 \ge 0$,

Целевая функция

$F = 15\,X_1 + 12\,X_2 + 14\,X_3 \rightarrow \max$

Симплекс метод. Продолжение примера 3

Решение системы (4) – *<u>первая итерация</u>*

$$
\begin{aligned}
&X_1 / 200 + X_2 / 300 + X_3 / 120 + X_4 = 100\\
&X_1 / 300 + X_2 / 100 + X_3 / 100 + X_5 = 100 \qquad (4)\\
&X_3 / 80 + X_6 = 100\\
&15 X_1 + 12 X_2 + 14 X_3 = F
\end{aligned}
$$

В данную систему переменные X_4 , X_5 , X_6 входят только в одно из уравнений с коэффициентом 1 и они *<u>являются базисными</u>* (балансовые переменные).

***<u>Свободные переменные</u>* X_1 , X_2 , X_3 можно приравнять любой константе, в том числе – нулю.**

Тогда первое допустимое решение (0,0,0,100, 100, 100) , значение целевой функции *F =0.*

Дальнейшая система пересчетов сводится к переводу одной из свободных переменных в базис и с выводом одной из базисных переменных и переводом ее в свободные переменные.

Симплекс метод. Пример 3 Вторая итерация

Данные на начало второй итерации

$$
\begin{aligned}
&X_1 / 200 + X_2 / 300 + X_3 / 120 + X_4 && = 100 \\
&X_1 / 300 + X_2 / 100 + X_3 / 100 + X_5 && = 100 \qquad (4) \\
&X_3 / 80 + X_6 && = 100
\end{aligned}
$$

X = (0,0,0,100, 100, 100)

F = 15 X_1 + 12 X_2 + 14 X_3 =0

1. В качестве новой базисной переменной выбираем X_1 – переменную с наибольшим положительным коэффициентом в *F* .

2. Сравниваем частные от деления свободных членов на коэффициенты при выбранной базисной переменной X_1 .

Получаем 100 / (1/200) = 20000, 100 / (1/300) =30000, 100/0 = + ∞.

Выбираем в системе строку, которой соответствует *минимальное* из отношений. Это – первая строка. После ряда преобразований над системой (4) получаем новую систему (4.1)

Симплекс метод. Продолжение примера 3

$$
\begin{aligned}
&X_1 + 2/3\, X_2 + 2/1{,}2\, X_3 + 200\, X_4 = 20000\\
&7/900\, X_2 + 4/900\, X_3 - 2/3\, X_4 + X_5 = 100/3, \qquad (4.1)\\
&X_3 / 80 + X_6 = 100
\end{aligned}
$$

$$2\, X_2 - 11\, X_3 - 3000\, X_4 = F - 300000$$

В новой системе базисными являются X_1 , X_5 , X_6 , свободными - X_2, X_3 X_4. Второе допустимое решение (20000,0,0,0,100/3, 100)

Значение F = 300000.

<u>Симплекс метод – третья итерация</u>

Наименьший положительный коэффициент в целевой функции – при X_2, выбираем X_2 базисной переменной. Проводя аналогичные действия, образуем частные от деления свободных членов на коэффициенты при X_2 , получаем

20000 / (2/3) = 30000, (100/3) / (7/900) = 30000/7, 100/0 = + ∞.

В качестве разрешающей выбираем вторую строку и после ряда преобразований и пересчетов получаем систему (4.2)) и новую целевую функцию

Симплекс метод. Продолжение примера 3

$$
\begin{aligned}
&X_1 + \quad 9/7\,X_3 + 1800/7\,X_4 - 600/7\,X_5 = 120000/7 \\
&X_2 + 4/7\,X_3 - 600/7\,X_4 + 900/7\,X_5 = 30000/7 \quad (4.2) \\
&X_3 / 80 + X_6 = 100 \\
&- 85/7\,X_3 - 19800/7\,X_4 - 1800/7\,X_5 = F - 308571
\end{aligned}
$$

Из (4.2) следует, что базисными переменными являются:

X_1 =120000/7 , X_2 = 30000/7 , X_6 = 100 , F = 308571.

Так как в строке - 85/7 X_3 - 19800/7 X_4 - 1800/7 X_5 = F – 308571

не осталось ни одного положительного коэффициента, то оптимальный план найден и производственная программа такая:

Кухни - 120000/7 = 17143

Кофемолки - 30000/7 = 4286

Самовары – 0

Максимальная прибыль – 308571 усл. ден. ед.

Все производственное оборудование будет задействовано за исключением линии по сборке самоваров

Симплекс метод. Пример 4

Предприятие <u>располагает тремя</u> *производственными ресурсами* – сырьем, оборудованием, электроэнергией – и производит продукцию *двумя способами:*
- первый способ: предприятие выпускает 3000 изделий/мес.,
- второй способ: предприятие выпускает 4000 изделий/мес.
Расход ресурсов и амортизация оборудования за один месяц и общий ресурс при каждом способе производства дан в таблице 1 (в ден. ед.).

Требуется определить:

Сколько месяцев* должно работать предприятие каждым из способов, чтобы при наличных ресурсах обеспечить *максимальный выпуск продукции.

Табличное описание задачи приведено на следующем слайде.

Симплекс метод. Пример 4

Таблица 1

Ресурс	Расход ресурса в месяц (тыс.)		Общий ресурс (тыс.)
	Первый способ	Второй способ	
сырье	1	2	4
оборудование	1	1	3
электроэнергия	2	1	8

Симплекс метод. Пример 4

Решение: Обозначим: x_1-время работы предприятия первым способом; x_2- время работы предприятия вторым способом.

Целевая функция $F(x_1, x_2) = 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \longrightarrow \max$

- при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Каноническая форма записи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 8 \\ x_j \ge 0; j = \overline{1,5} \end{cases}$$

Задача решается методом пошагового улучшения путем заполнения соответствующих симплекс- таблиц .

Решение приведено на следующих слайдах

Симплекс метод. Пример 4

Симплекс таблица <u>первого</u> шага

c	БП	3	4	0	0	0	F(X)
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_3	1	2	1	0	0	4
0	x_4	1	1	0	1	0	3
0	x_5	2	1	0	0	1	8
Δj		-3	-4	0	0	0	0

В индексной строке – два отрицательных элемента. Ключевым является второй столбец, по максимуму Abs(Δj).

Ключевую строку выбираем по min (b_i /$a_{i,2}$) = min(4/2;3/1;8/1).

Ключевая строка вторая, ключевой элемент $a_{1,2}$=2.

Выводим из базы X_3 , вводим в базу X_2. Производим перерасчет.

Симплекс таблица второго шага представлена на слайде 35

Симплекс метод. Пример 4

Симплекс таблица <u>второго</u> шага

c	БП						F(X)
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
4	x_2	1/2	1	1/2	0	0	2
0	x_4	1/2	0	-1/2	1	0	1
0	x_5	2/2	0	-1/2	0	1	6
Δj		-1	0	2	0	0	8

- **Вектор решения второй итерации** $\overline{X_2} = (0,2,0,1,6)$
- **Значение целевой функции** $F(x_1,..\ x_5)= 4 \cdot x_2 =8$
- **В индексной строке один отрицательный элемент. Ключевой столбец – первый.**
- **Ключевую строку выбираем по min (b_i /$a_{i,1}$) = min(4, 2,6). Ключевая строка – вторая. Вводим в базис x_1, выводим из базиса x_4. Симплекс таблица третьего шага представлена на следующем слайде.**

Симплекс метод. Пример 4

Симплекс таблица третьего шага

c	БП	3	4	0	0	0	F(X)
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
4	x_2	0	1	1	-1	0	1
3	x_1	1	0	-1	2	0	2
0	x_5	0	0	1	-3	1	3
Δj		0	0	1	2	0	10

Все оценки свободных переменны x_3, x_4, x_5 неотрицательны, следовательно оптимальное решение найдено

$$\overline{X_3 opt} = (2,1,0,0,3), F(x) = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 10$$

Здесь x_1 – время работы (в месяцах) первым способом, x_2 – время работы вторым способом.

3. Двойственные задачи

3. Двойственные задачи и их приложение

Каждой задаче ЛП можно определенным образом поставить в соответствии другую задачу ЛП, которую называют *двойственной* по отношению к исходной.
В двойственной задаче по сравнению с исходной задачей строки матрицы ограничений переходят в столбцы, неравенства целевой функции меняют знак, вместо максимума ищется минимум (или вместо минимума – максимум). Двойственную задачу чаще всего применяют с целью уменьшить количество искомых переменных.
Алгоритм вычисления параметров двойственной задачи:

1. **Матрица ограничений двойственной задачи равна A^t исходной**
2. **Целевая функция $F^* = B^t.Y$**
3. **Для решения двойственной задачи можно применить графический метод решения или симплекс-метод**

Доказано, что оптимальные значения целевых функций в исходной и двойственной задачах совпадают (т.е. максимум в исходной задаче совпадает с минимумом в двойственной).

3. Двойственные задачи. Примеры

1. Пример 1 и двойственная к нему задача

Прямая задача

Целевая функция

$F = 45X_1 + 80\, X_2 \rightarrow \max$,

- $5\, X_1 + 20\, X_2 \leq 400$,
- $10\, X_1 + 15\, X_2 \leq 450$,
- $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$.

Двойственная задача

Целевая функция

$F = 400\, y_1 + 450\, y_2 \rightarrow \min$,

$5\, y_1 + 10\, y_2 \geq 45$,

$20\, y_1 + 15\, y_2 \geq 80$,

$y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$.

Очевидно, что:

1. Матрица ограничений двойственной задачи равна транспонированной матрице исходной ,

$A_{\text{двойств.зад.}} = A^t_{\text{исходной зад.}}$

2. Целевая функция двойственной задачи равна $F^*_{\text{двойств.}} = B^t.Y$

3. Направление оптимизации меняется на противоположное

$F_{\text{прямая}} \rightarrow \max$ $\qquad$ $F_{\text{двойств..}} \rightarrow \min$

или

$F_{\text{прямая}} \rightarrow \min$ $\qquad$ $F_{\text{двойств. .}} \rightarrow \max$

3. Задача, двойственная к примеру 2

Прямая задача

$$50x_1 + 40x_2 \to \max$$
$$20x_1 + 10x_2 \le 400$$
$$x_1 \le 15$$
$$x_2 \le 30$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$$

Двойственная задача

$$400y_1 + 15y_2 + 30y_3 \to \min$$
$$20y_1 + y_2 \ge 50$$
$$10y_1 + y_3 \ge 40$$
$$y_1 \ge ; y_2 \ge 0; y_3 \ge 0$$

Алгоритм вычисления параметров двойственной задачи:

1. **Матрица ограничений двойственной задачи задачи равна A^t исходной**
2. **Целевая функция $F^* = B^t.Y$**
3. **Для решения двойственной задачи можно применить графический метод решения или симплекс-метод**

Задача, двойственная к примеру 2

Прямая задача

$$50x_1 + 40x_2 \to \max$$
$$20x_1 + 10x_2 \le 400$$
$$x_1 \le 15$$
$$x_2 \le 30$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$$

Двойственная задача

$$400y_1 + 15y_2 + 30y_3 \to \min$$
$$20y_1 + y_2 + \ge 50$$
$$10y_1 + y_3 \ge 40$$
$$y_1 \ge; y_2 \ge 0; y_3 \ge 0$$

Решение прямой задачи

(см. на слайдах 20, 21)

Оптимальное решение

x_1=5; x_2=30;F=1450

Решение двойственной задачи:

Задачу можно решить методом простого перебора вершин много-гранника ограничений

Оптимальное решение

y_1=2.5 ; y_2=0; y_3=15; F=1450

Двойственные оценки показывают на какую величину возрастает прибыль, если ресурс увеличивается на единицу. В нашем случае дополнительный час рабочего времени приносит 2.5 рубля прибыли, а увеличение производственной мощности по пенопласту на 1 т. приводит к увеличению прибыли на 15 руб.

3. Двойственная задача

Пример 3. <u>Прямая задача</u>: найти минимум целевой функции

F = $10x_2 - 3x_3$ $\rightarrow$ min при ограничениях

$$\begin{cases} -2X_1 + X_2 - X_3 \geq 1 \\ X_1 + 2X_2 - X_3 \geq 3 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>Двойственная задача</u>

$F^* = y_1 + 3y_2$ $\rightarrow$ max при ограничениях

$y_1 >= 0$; $y_2 >= 0$

$$\begin{cases} -2y_1 + \quad y_2 \leq 0 \\ y_1 + \quad 2y_2 \leq 10 \\ y_1 + \quad y_2 \geq 3 \end{cases}$$

Графическое решение обратной задачи: max $F^* = F^*(2,4) = 14$

Следовательно, минимум исходной задачи равен 14

4. Транспортная задача

4.1 Формулировка задачи

4.2.Примеры. Описание

4. Транспортная задача

Транспортная задача – одна из задач линейного программирования. Ее цель – разработка наиболее рациональных путей и способов транспортировки товаров, устранения чрезмерно дальних, встречных, повторных перевозок.

Разработка рациональных способов транспортировки товаров позволяет сокращать время перевозок, расходы транспортировок, приводит к своевременной реализации потребностей потребителя.

В зависимости от соотношения между суммарными запасами и суммарными потребностями транспортные задачи могут быть *закрытыми* и *открытыми.*

Если сумма запасов груза равна суммарной потребности в нем, то задача - *закрытая* , в противном случае – *открытая.*

Математическая модель закрытой транспортной задачи – минимизация целевой функции при заданных тарифах на перевозки

Количество переменных и ограничений в транспортной задаче таково, что ее следует решать с применением современных программных продуктов. В учебных задачах небольшого размера можно использовать метод потенциалов

4. Транспортная задача. Постановка задачи. Пример 5

Товар хранится на трех складах, его необходимо перевезти четырем потребителям. Даны запасы товара на каждом складе, потребности каждого потребителя и стоимость перевозки единицы товара от i-го склада к j-му потребителю. Данные задачи приведены в таблице 3.

Таблица 3.

Потребители	П1	П2	П3	П4	**Запасы(a)**
Склады					
с1	2	5	5	5	60
с2	1	2	1	4	80
с3	3	1	5	2	60
Потребности (b)	50	40	70	40	200

Необходимо спланировать перевозки, т.е. определить объемы поставок товара X_{ij} со склада i потребителю j, где i = 1,2,3; j = 1,2,3,4. Очевидно, необходимо определить 12 переменных X_{ij}

4. Транспортная задача. Пример 5.Продолжение

Потребители	П1	П2	П3	П4	Запасы(a)
Склады					
c1	2	5	5	5	60
c2	1	2	1	4	80
c3	3	1	5	2	60
Потребности (b)	50	40	70	40	200

12 переменных x_{ij} удовлетворяют двум группам ограничений:

По запасам на складах:

$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 60$,
$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 80$,
$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 60$.

По ограничениям на потребление

$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 50$
$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 40$,
$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 70$,
$X_{14} + X_{24} + X_{34} = 40$

и все x_{ij} >=0

В данной задаче 7 ограничений типа равенств и 12 неравенств.

Целевая функция - издержки по перевозке, которые необходимо минимизировать:

$F = 2X_{11} + 5X_{12} + 4X_{13} + 5X_{14} + X_{21} + 2X_{22} + X_{23} + 4X_{24} + 3X_{31} + X_{32} + 5X_{33} + 2X_{34} \rightarrow \min$.

Решение закрытой транспортной задачи. Метод потенциалов

Для решения транспортной задачи чаще всего применяют *методом потенциалов*. Метод аналогичен симплекс методу и имеет следующие три этапа :

- **1. Нахождение исходного опорного решения**
- **2. Проверка этого решения на оптимальность**
- **3. Переход от одного опорного решения к другому**

Условия задачи и ее исходное опорное решение заносят в специальную таблицу, называемую *распределительной таблицей.* Клетки, в которые размещаются грузы, называют занятыми, им соответствуют базисные переменные опорного плана, незанятым клеткам соответствуют свободные переменные.

Для нахождения исходного опорного плана часто применяется *метод минимального тарифа*.

Пример решения закрытой транспортной задачи можно посмотреть в файле Транспортная задача.doc , размещенном в каталоге дисциплины