



# УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ (ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ)

Форма равновесия в деформированном состоянии считается *устойчивой*, если система при любом малом отклонении от начального состояния равновесия возвращается к нему после снятия внешней нагрузки. В противном случае форма равновесия является *неустойчивой*.

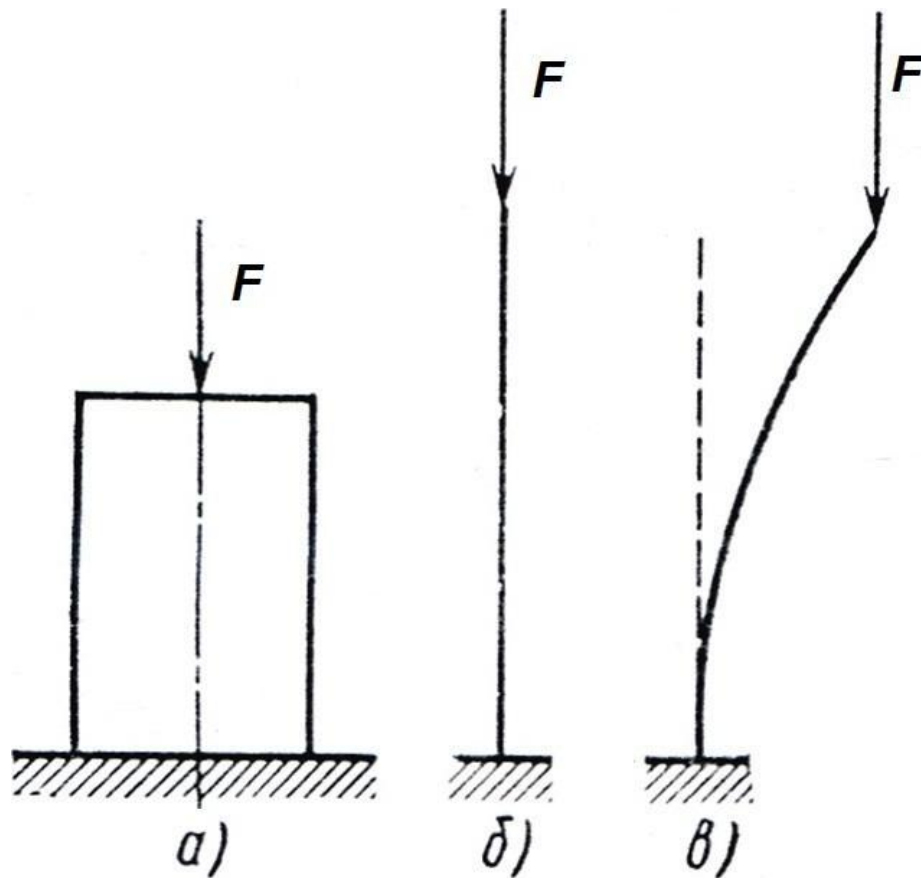


Рис.1

Переход системы из устойчивого состояния в неустойчивое называют *потерей устойчивости*, а границу этого перехода – *критическим состоянием* системы.

Если сжимающую нагрузку воспринимает короткий брус большой жесткости (рис.1,а), то на прочность и жесткость его рассчитывают по формулам для осевого сжатия.

В случае восприятия сжимающей нагрузки длинным тонким стержнем (рис.1,б), последний может искривиться (рис.1,в).

Искривление стержня наступает вследствие того, что его ось практически всегда имеет небольшую начальную кривизну, а точка приложения силы несколько смещена от центра тяжести поперечного сечения стержня. Данное обстоятельство можно не учитывать лишь при значениях силы, меньших некоторой критической величины. При силе, большей критической, стержень будет работать не на осевое сжатие, а на сжатие и изгиб.

Под **критической** следует понимать такую силу, превышение которой вызывает потерю устойчивости первоначальной формы равновесия.

Для обеспечения безопасной работы элементов конструкции, находящихся под действием сжимающей нагрузки, необходимо, чтобы допускаемая нагрузка была меньше критической, т.е.

$$F \leq [F], \quad \text{где } [F] = F_{\text{кр}} / n_y, \quad (1)$$

где  $F_{\text{кр}}$  – критическая сила;  $n_y$  – коэффициент запаса устойчивости.

Величина  $n_y$  принимается несколько большей коэффициента запаса прочности, поскольку здесь необходимо дополнительно учитывать влияние на прочность таких факторов, как начальная кривизна стержня, эксцентриситет приложения силы и др.

Некоторые коэффициенты запаса устойчивости:

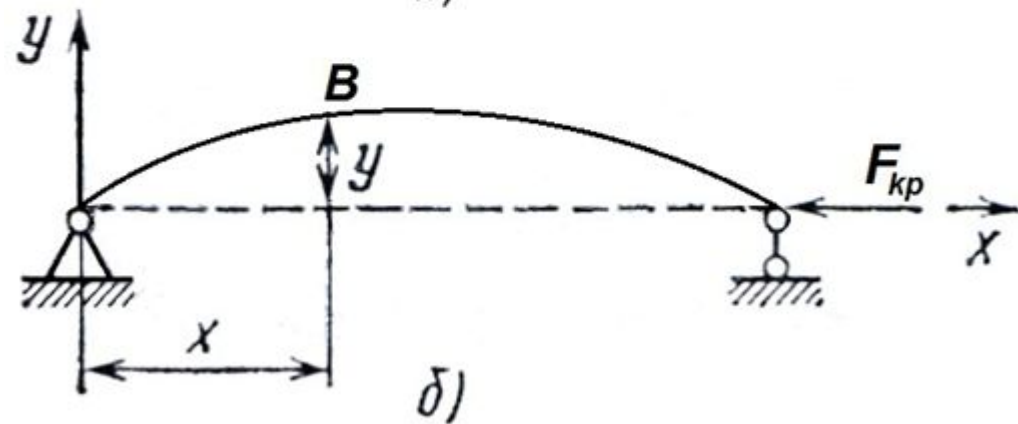
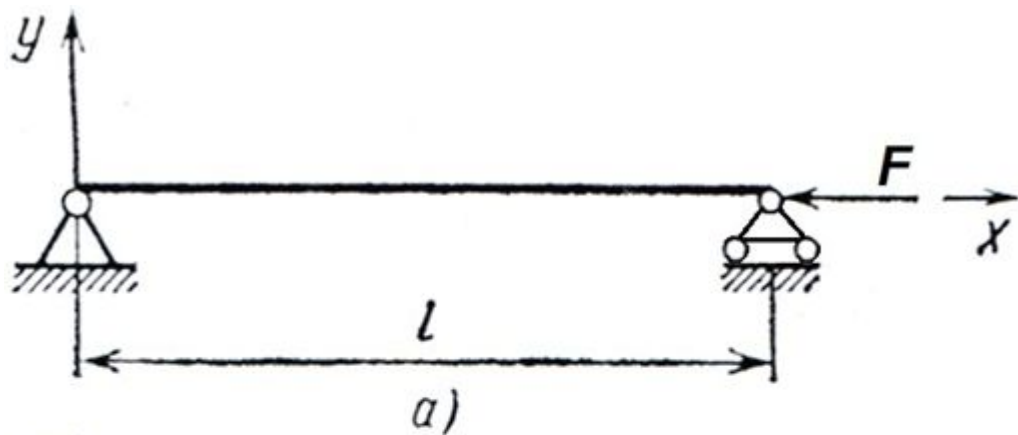
$$n_y = 1,8 \dots 3,0 \text{ (сталь)}$$

$$n_y = 5,0 \dots 5,5 \text{ (чугун)}$$

$$n_y = 2,8 \dots 3,2 \text{ (дерево)}$$

# ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Рассмотрим стержень с шарнирно-закрепленными концами, нагруженный продольной силой  $F$  (рис.2,а). Допустим, что величина этой силы достигла некоторого критического значения ( $F = F_{кр}$ ) и стержень слегка изогнулся (рис.2,б).



б)

Рис.2

Если предположить, что потеря устойчивости происходит при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности, то дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня принимает вид:

$$EJy'' = \pm M \quad (2)$$

При потере устойчивости стержень изгибается в плоскости наименьшей жесткости, т.е. поперечные сечения стержня будут поворачиваться вокруг той оси, относительно которой момент инерции имеет минимальное значение. Поэтому в уравнении (2)  $J = J_{\min}$ .

Изгибающий момент относительно центра тяжести сечения В в изогнутом состоянии:

$$\mathbf{M} = -\mathbf{F}_{\text{кр}} \cdot \mathbf{y} \quad (3)$$

Знак минус берется потому, что стержень изгибается выпуклостью вверх, а прогиб  $y$  положителен. Если бы стержень изогнулся выпуклостью вниз, то момент был бы положительным, но прогибы  $y$  были бы отрицательными, и результат получился бы тот же. С учетом (3) уравнение (2) принимает вид:

$$EJy'' = -F_{\text{кр}} \cdot y.$$

Обозначая  $\alpha^2 = F_{\text{кр}} / (EJ_{\min})$ , получаем:

$$y'' + \alpha^2 y = 0 \quad (4)$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение имеет вид:

$$y = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x \quad (5)$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  – постоянные интегрирования, для определения которых используются известные условия на концах стержня:

- 1) при  $x = 0, y = 0$ ;
- 2) при  $x = l, y = 0$ .



Из первого условия получим  $C_1 = 0$ . Следовательно, стержень изгибается по синусоиде  $y = C_2 \sin \alpha x$ . Из второго условия получим  $C_2 \sin \alpha l = 0$ .

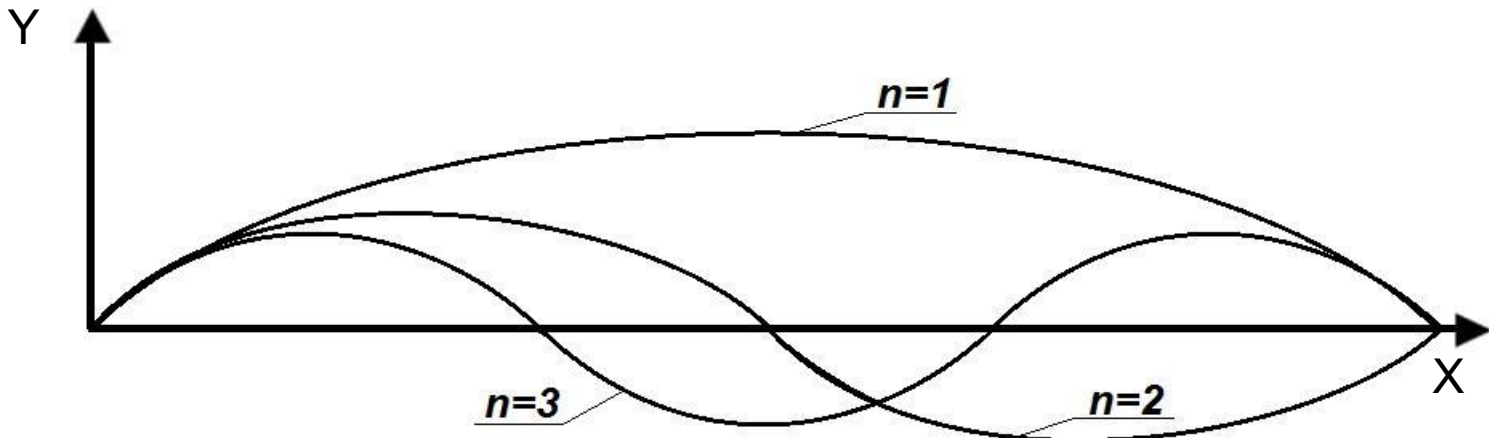
Это соотношение справедливо в двух случаях:

- 1)  $C_2 = 0$ . Но, если  $C_1 = 0$  и  $C_2 = 0$ , то, как следует из уравнения (5), прогибы стержня равны нулю, что противоречит исходной предпосылке;
- 2)  $\sin \alpha l = 0$ . Это условие выполняется, когда  $\alpha l$  принимает следующий ряд бесконечных значений:  $\alpha l = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi$ , где  $n$  – любое целое число.

Отсюда  $\alpha = n\pi / l$ , а так как  $\alpha = \sqrt{F_{kp} / (EJ_{min})}$ , то

$$F_{kp} = \pi^2 J_{min} E n^2 / l^2.$$

Таким образом, получаем не одно, а множество значений критических сил, каждой из которых соответствует своя форма равновесия. Так, при  $n = 1$  (первая критическая сила) стержень изгибается по одной полуволне синусоиды, а при всех последующих значениях число полуволн равно номеру соответствующей критической силы.



С практической точки зрения интерес представляет лишь наименьшее значение критической силы, при котором происходит потеря устойчивости стержня.

Первый корень  $n = 0$  не дает решения задачи. При  $n = 1$  получаем наименьшее значение критической силы. Это и есть формула Эйлера:

$$F_{кр} = \pi^2 EJ_{\min} / \ell^2,$$

где  $\ell$  – длина стержня.

Помимо рассмотренного случая шарнирного закрепления обоих концов стержня (основного случая продольного изгиба), возможны и другие способы закрепления. Рассмотрим некоторые из них.

В этих случаях пользуются обобщенной формулой Эйлера:

$$F_{кр} = \pi^2 EJ_{\min} / (v\ell)^2, \quad (6)$$

где  $v\ell$  – приведенная длина стержня;  
 $v$  – коэффициент приведения длины.

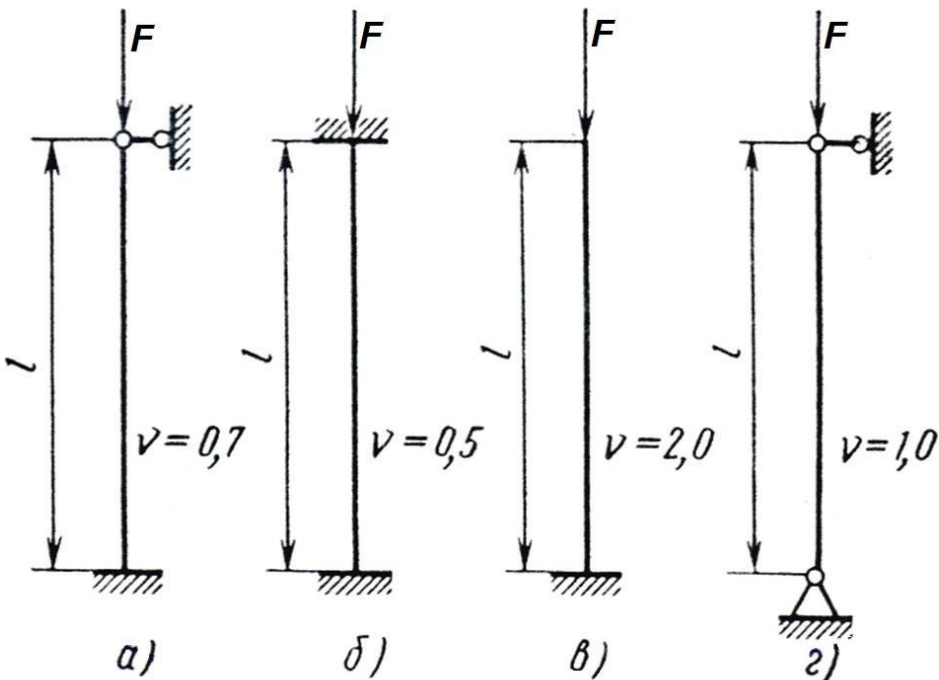


Рис.3

Величина коэффициента  $\nu$  зависит от способа закрепления концов стержня. Так, для основного случая закрепления (рис.3,г)  $\nu = 1$ , для других схем значения  $\nu$  приведены на рис.3,а,б,в.

Как видно из формулы (6), чем меньше  $\nu$ , тем больше критическая, а следовательно, и допускаемая нагрузка стержня. Например, нагрузка стержня, заделанного двумя концами, может быть в 16 раз больше нагрузки стержня, заделанного одним концом. Поэтому там, где возможно, следует осуществлять жесткую заделку обоих концов стержня. Однако это не всегда можно осуществить на практике.

Под действием критической нагрузки  $F_{кр}$  в поперечных сечениях стержня возникают нормальные напряжения, называемые также критическими. Используя обобщенную формулу Эйлера, имеем:

$$\sigma_{кр} = F_{кр} / A = \pi^2 E J_{min} / A(\nu l)^2, \quad (7)$$

где  $\sigma_{кр}$  – критическое напряжение;  $A$  – площадь поперечного сечения стержня.



Так как  $J_{\min} = i_{\min}^2 A$  (где  $i_{\min}^2$  – минимальный радиус инерции), то

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\nu \ell)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left( \frac{\nu \ell}{i_{\min}} \right)^2},$$

или

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2; \quad (8)$$

здесь

$$\lambda = \nu \ell / i_{\min} \quad (9)$$

безразмерная величина, которая называется *гибкостью* стержня и характеризует его способность сопротивляться искривлению в зависимости от размеров и способа закрепления концов.

Как видно из формулы (8), критическое напряжение зависит только от упругих свойств материала (модуля упругости  $E$ ) и гибкости стержня. Чем больше  $\lambda$ , тем меньше  $\sigma_{кр}$  и тем меньшая нужна сжимающая сила, чтобы вызвать продольный изгиб стержня.

Одной из исходных предпосылок при выводе формулы Эйлера было предположение о такой гибкости стержня, при которой напряжения  $\sigma_{кр}$  в момент потери стержнем устойчивости не превышают предела пропорциональности  $\sigma_{пц}$ , т.е. должно соблюдаться условие

$$\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2 \leq \sigma_{пц} \quad (10)$$

Отсюда

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}$$

Знак равенства в зависимости (11) определяет наименьшее (предельное) значение гибкости  $\lambda_{пред}$ , при котором формула Эйлера еще применима. Например, для стержня из стали Ст3 ( $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа и  $\sigma_{пц} = 200$  МПа)

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{3,14^2 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{200}} \approx 100$$

Формулой Эйлера не всегда можно пользоваться. При ее выводе использовались дифференциальные уравнения упругой линии, вывод которого основан на законе Гука. Закон же Гука справедлив до тех пор, пока напряжения не превосходят предела пропорциональности.

Стержни малой и средней гибкости, для которых  $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$ , рассчитывают на устойчивость по эмпирическим формулам, полученным в результате обработки большого количества опытных данных. Одной из таких формул является формула Ф.С. Ясинского

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda \quad (12)$$

Значения коэффициентов  $a$  и  $b$  для различных материалов приведены в справочниках. Например,  $a = 310 \text{ Мпа}$  и  $b = 1,14 \text{ Мпа}$  для стали Ст3 при  $40 < \lambda < 100$ .

Величина  $\sigma_{\text{кр}}$ , вычисленная по формуле (12), при некотором значении гибкости  $\lambda = \lambda_0$  (для стали Ст3  $\lambda_0 = 40$ ) становится равной опасному (предельному) напряжению при сжатии, в качестве которого для пластичных материалов принимается предел текучести  $\sigma_{\text{T}}$ , а для хрупких – предел прочности  $\sigma_{\text{в}}$ . Стержни, у которых  $\lambda < \lambda_0$ , называют *стержнями малой гибкости*. Их можно рассчитать только на прочность без учета опасности продольного изгиба.

Условие устойчивости сжатых стержней (по форме расчета на сжатие)

$$\sigma = F / A_{\text{бр}} \leq [\sigma_y], \quad (13)$$

где  $A_{\text{бр}}$  – полная площадь (брутто) поперечного сечения стержня (без учета местных ослаблений сечения);  $[\sigma_y]$  – допускаемое напряжение на устойчивость.

Величина  $[\sigma_y]$  назначается с учетом выбранного коэффициента запаса  $n_y$ , т.е.

$$[\sigma_y] = \sigma_{\text{кр}} / n_y. \quad (14)$$

Коэффициент запаса в расчетах на устойчивость колеблется в пределах 1,8–3,0 для стальных и 5,0–5,5 для чугунных стержней.

Связь между допускаемым напряжением на устойчивость  $[\sigma_y]$  и допускаемым напряжением на прочность при сжатии  $[\sigma_{\text{сж}}]$  можно установить, используя следующие соотношения:

$$\frac{[\sigma_y]}{[\sigma_{\text{сж}}]} = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{n_y} \cdot \frac{n_0}{\sigma_{\text{пр}}} \text{ или } [\sigma_y] = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{\sigma_{\text{пр}}} \cdot \frac{n_0}{n_y} \cdot [\sigma_{\text{сж}}]$$

Введя обозначение

$$\varphi = \frac{\sigma_{\text{кр}}}{\sigma_{\text{пр}}} \cdot \frac{n_0}{n_y} \quad (15)$$

Получим

$$[\sigma_y] = \varphi \cdot [\sigma_{\text{сж}}];$$

здесь  $\varphi$  – коэффициент уменьшения основного допускаемого напряжения (или коэффициент продольного изгиба).

Величина  $\varphi$  зависит от материала и гибкости стержня и приводится в справочниках.

Используя зависимость (15), условие устойчивости (13) окончательно можно представить в следующем виде:

$$\sigma = F / A_{\text{бр}} \leq \varphi \cdot [\sigma_{\text{сж}}].$$

Проверка сжатых стержней на устойчивость не исключает их дополнительной проверки на прочность по известной формуле для чистого сжатия.

Для подбора сечения формулу приводят к следующему виду:

$$A = F / \varphi \cdot [\sigma_{\text{сж}}]$$

При этом значением  $\varphi$  приходится задаваться, так как гибкость  $\lambda$  не известна, так как не известна площадь сечения  $A$ , а гибкость зависит от нее. В качестве первого приближения рекомендуется принимать  $\varphi_1 = 0,5$ . Затем определяют величины  $A$ ,  $I_{\text{min}}$ ,  $i_{\text{min}}$ ,  $\lambda$  и по таблице находят соответствующее значение  $\varphi_1'$ .

Если получается большая разница между значениями  $\varphi_1$  и  $\varphi_1'$ , то следует повторить расчет, задавшись новым значением  $\varphi_2$ :

$$\varphi_2 = (\varphi_1 + \varphi_1') / 2$$

и так далее, пока разница между последовательными значениями не будет превышать 4 – 6%.

В сопротивлении стержней продольному изгибу основную роль играет гибкость стержня. Поэтому вопрос о форме поперечного сечения является не менее существенным, чем вопрос о величине площади сечения. Как показывает практика, наиболее выгодными следует признать кольцевые, а также коробчатые тонкостенные сечения. Сплошные прямоугольные и двутавровые сечения считаются нерациональными.

Что касается выбора материала, то для стержней большой гибкости (когда  $\sigma_{кр} < \sigma_{сж}$ ) применять сталь повышенной прочности нецелесообразно. Это следует из того, что в данном случае модуль упругости  $E$  является единственной механической характеристикой, определяющей сопротивляемость стержня при потере устойчивости (см. формулу (6)), а для различных сортов стали его величина практически одинакова.

Для стержней малой гибкости применение высококачественных сталей оказывается выгодным, так как с увеличением предела текучести повышаются критические напряжения, а следовательно, и запас устойчивости.



**Пример.** Определить допускаемую нагрузку сжатого стержня из стали Ст3, имеющего прямоугольное сечение  $b \times h = 40 \times 60$  мм. Концы стержня закреплены шарнирно. Длина стержня  $\ell = 80$  мм. Требуемый коэффициент запаса устойчивости  $n_y = 3$ .

**Решение.** Так как задан определенный коэффициент запаса устойчивости, то расчет ведем непосредственно по формулам Эйлера и Ясинского.

Чтобы определить, какой из указанных формул следует пользоваться, определяем гибкость стержня:

$$\lambda = \nu \ell / i_{\min},$$

где

$$i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A} = \sqrt{b^3 h / (12bh)} = \sqrt{b^2 / 12} = \sqrt{40^2 / 12} = 11,5 \text{ мм}$$

$$\lambda = 1 \cdot 80 / 11,5 = 69,5$$

Гибкость меньше 100, т.е. формула Эйлера для стержня из малоуглеродистой стали неприменима.

Следовательно, расчет должен быть выполнен по формуле Ясинского:

$$[F] = \frac{F_{kp}}{n_y} = \frac{\sigma_{kp} \cdot A}{n_y} = \frac{(a - b\lambda) \cdot A}{n_y} = \frac{(310 - 1,14 \cdot 69,5) \cdot 40 \cdot 60}{3} = 0,18 \text{ МН}$$

## Задача № 5

Стальной стержень (Сталь3) длиной  $l$  сжимается силой  $F$ .

Требуется:

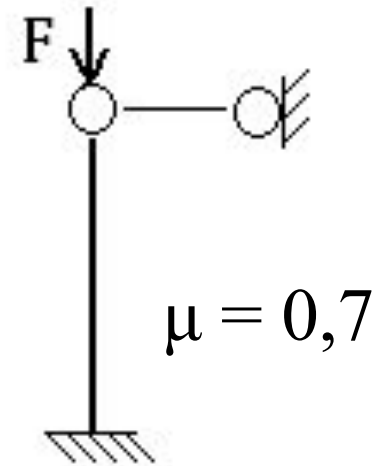
1. Подобрать поперечное сечение сжатого стержня при допуске напряжении на сжатие  $[\sigma] = 150$  МПа, пользуясь методом последовательных приближений. Вид закрепления и данные взять таблицы.
2. Определить величину критической силы.
3. Вычислить коэффициент запаса устойчивости.

**Дано:**

$$F = 130 \text{ кН}; \quad l = 2,5 \text{ м};$$

Форма поперечного сечения: *швеллер*;

Схема закрепления : *III*.



## Решение:

1. Принимаем в качестве первого приближения  $\varphi_1 = 0,5$ . Получаем:

$$A = \frac{F}{\varphi_1[\sigma]} = \frac{130 * 10^3}{0,5 * 150} = 1733 \text{ мм}^2 = 17,3 \text{ см}^2$$

Из таблиц сортамента (ГОСТ 8239-72) выбираем швеллер № 14а, у которого  $A = 17,0 \text{ см}^2$ .

Наименьший радиус инерции (из тех же таблиц сортамента)

$$i_{min} = i_y = 1,84 \text{ см}$$

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu * l}{i_{min}} = \frac{0,7 * 250}{1,84} = 95,1$$

Коэффициент  $\varphi_1'$  по таблице для стали 3 при  $\lambda = 95$  равен 0,645. Так как разница между  $\varphi_1$  и  $\varphi_1'$  значительна, повторяем расчет, принимая

Тогда 
$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0,5 + 0,645}{2} \cong 0,57$$

$$A = \frac{130 * 10^3}{0,57 * 150} = 1520 \text{ мм}^2 = 15,2 \text{ см}^2$$

Принимаем швеллер № 12, у которого  $A = 13,3 \text{ см}^2$ ,  
 $i_y = 1,53 \text{ см}$ .

Гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu * l}{i_{\min}} = \frac{0,7 * 250}{1,53} = 114,4$$

Коэффициент  $\varphi$  по таблице  $\varphi_2' = 0,49$ . Напряжение в поперечном сечении:

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{130 * 10^3}{13,3 * 10^2} = 97,7 \text{ МПа}$$

Допускаемое напряжение при расчете на устойчивость:

$$[\sigma]_y = \varphi_2' * [\sigma] = 0,49 * 150 = 73,5 \text{ МПа}$$

Перенапряжение составляет:

$$\frac{(97,7 - 73,5) * 100}{73,5} \cong 33\%,$$

что недопустимо

Делаем еще попытку.

Принимаем:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0,57 + 0,49}{2} \cong 0,53$$

Получаем:

$$A = \frac{130 * 10^3}{0,53 * 150} = 1635 \text{ мм}^2 = 16,4 \text{ см}^2$$

Принимаем швеллер № 14, у которого  $A = 15,6 \text{ см}^2$ ,  
 $i_y = 1,70 \text{ см}$ .

Получим гибкость стержня

$$\lambda = \frac{0,7 * 250}{1,70} = 102,9$$



Из таблиц коэффициент  $\varphi_3' = 0,57$ .

Напряжение:

$$\sigma = \frac{130 * 10^3}{15,6 * 10^2} = 83,3 \text{ МПа}$$

Допускаемое напряжение

$$\varphi_3' * [\sigma] = 0,57 * 150 = 85,5 \text{ МПа}$$

Недонапряжение:

$$\frac{(85,5 - 83,3) * 100}{83,3} \cong 2,6\%$$

что допустимо

## 2. Величина критической силы

Предельная гибкость для стали 3

$$\lambda_{пред} = 100 < \lambda = 102,9$$

Значит  $F_{кр}$  определяем по формуле Эйлера

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 * E * J_{min}}{(\mu l)^2} =$$

$$= \frac{3,14^2 * 2,0 * 10^{11} * 45,4 * 10^{-8}}{(0,7 * 2,5)^2} = 292 * 10^3 \text{ Н} = 292 \text{ кН}$$

## 3. Коэффициент запаса устойчивости

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{292}{130} = 2,24$$

## *Примечание.*

Если форма поперечного сечения окружность или прямоугольник (квадрат), то геометрические параметры сечения определяются следующим образом:

1.1. Размеры сечения:

$$A \stackrel{\text{(круг)}}{=} \frac{\pi d^2}{4}, \quad d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}$$

$$A = b * h \quad \begin{array}{l} \text{Если квадрат, то } A = b^2; \\ \text{Если прямоугольник } h = 2b, \text{ то} \end{array} \quad b = \sqrt{A}$$

$$A = b * 2b = 2b^2; \quad b = \sqrt{A/2}$$

## 1.2. Осевой момент инерции:

$$J_y = J_z = \frac{\pi * d^4}{64} \text{ (круг)}$$

$$J_{\min} = \frac{b * h^3}{12} \text{ (прямоугольник)}$$

$$J_{\min} = \frac{b^4}{12} \text{ (квадрат)}$$

## 1.3. Радиус инерции

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}$$

А далее, как в примере.