Численное дифференцирование

Дифференцирование с помощью разностных соотношений

$$[a,b]: \quad x_i = a + ih, \quad i = \overline{0,n}; \quad hn = b - a$$

$$U(x_i), \quad i = \overline{0,n}$$

1

$$\boxed{U_{\bar{x},i} = \frac{U(x_i) - U(x_{i-1})}{h}}$$

-левая разностная производная функции $U(x)$ в точке $x=x_i$

2

$$\boxed{U_{x,i} = \frac{U(x_{i+1}) - U(x_i)}{h}}$$

-правая разностная производная функции $U(x)$ в точке $x=x_i$

3

$$\boxed{U_{\overset{\circ}{x},i} = \frac{U(x_{i+1}) - U(x_{i-1})}{2h}}$$

-центральная разностная производная функции $U(x)$ в точке $x=x_i$

Погрешность разностных формул

$$U(x) = U(x_i) + U'(x_i)(x - x_i) + \frac{U''(\xi)}{2}(x - x_i)^2, \quad \xi \in [x, x_i]$$

$$U'(x_i) = \frac{U(x) - U(x_i)}{x - x_i} - \frac{U''(\xi)}{2}(x - x_i) \qquad 4$$

$x = x_{i-1}$:

$$U'(x_i) = \frac{U(x_i) - U(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} + \frac{U''(\xi_i)}{2}(x_i - x_{i-1}), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$\boxed{U'(x_i) = U_{\bar{x},i} + \frac{h}{2}U''(\xi_i)}$$

$$\boxed{U'(x_i) = U_{\bar{x},i} + \frac{h}{2}U''(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]} \qquad \boxed{p=1} \qquad 1.1$$

$$\boxed{U'(x_i) = U_{x,i} - \frac{h}{2}U''(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]} \qquad \boxed{p=1} \qquad 2.1$$

$$\boxed{U'(x_i) = U_{\mathring{x},i} - \frac{h^2}{6}U''(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]} \qquad \boxed{p=2} \qquad 3.1$$

$$U_{\bar{x}x,i} = \frac{1}{h}(U_{x,i} - U_{\bar{x},i}) = \frac{U(x_{i-1}) - 2U(x_i) + U(x_{i+1})}{h^2}$$

$$U_{\bar{x}x,i} = U''(x_i) + \frac{h^2}{12}U^{(4)}(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$$

Уточнение результата методом Рунге

$$\boxed{U'(x_i) = U_{\bar{x},i} + \frac{h}{2}U''(\xi_i), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]}$$

$U'(x) -$ производная функции $U(x)$ (точное значение)

$U_{x,h}(x) -$разностное соотношение, вычисленное с шагом h

$$R = h^p \varphi(x) + o(h^{p+1})$$

$$U'(x) = U_{x,h} + h^p \varphi(x) + o(h^{p+1}) \qquad (5)$$

$h_1 = kh:$ $\qquad U'(x) = U_{x,kh} + (kh)^p \varphi(x) + o((kh)^{p+1})$

$$h^p \varphi(x) = \frac{U_{x,h} - U_{x,kh}}{k^p - 1} + o(h^{p+1}) \qquad (6)$$

$$\boxed{U'(x) = U_{x,h} + \frac{U_{x,h} - U_{x,kh}}{k^p - 1} + o(h^{p+1})}$$

Выбор шага дифференцирования

$$U'(x_i) = \frac{U(x_{i+1}) - U(x_i)}{h} - \frac{h}{2} U''(\xi_i)$$

$U(x_i)$ – приближенное значение функции $U(x)$ в точке x_i

$\tilde{U}(x_i)$ - точное значение функции $U(x)$ в точке x_i

$$\tilde{U}(x_i) = \boxed{U(x_i) \pm \delta} \Rightarrow \tilde{U}(x_i) \in [U(x_i) - \delta, U(x_i) + \delta]$$

$$\boxed{\frac{2\delta}{h}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \le \dfrac{M_2}{2} h, \\ M_2 = \max\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} \left| U''(x) \right| \end{array}}$$

$$\left| U'(x_i) - \frac{U(x_{i+1}) - U(x_i)}{h} \right| \le \frac{2\delta}{h} + \frac{M_2}{2} h$$

$$g(h)=\frac{2\delta}{h}+\frac{M_2}{2}h\rightarrow \min$$ - функция полной погрешности

$$h\rightarrow 0 \quad g(h)\rightarrow \infty$$

$$h\rightarrow \infty \quad g(h)\rightarrow \infty$$

$$g'(h)=-\frac{2\delta}{h^2}+\frac{M_2}{2}=0$$

$$\boxed{h_{opt}=2\sqrt{\frac{\delta}{M_2}}}$$

Дифференцирование с помощью интерполяционных многочленов

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b; \quad U(x_i); \quad h_i = x_i - x_{i-1}$$

$$L_{2,i} = \frac{(x - x_i)(x - x_{i+1})}{h_i(h_i + h_{i+1})} U(x_{i-1}) - \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})}{h_i h_{i+1}} U(x_i) + \\ + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} U(x_{i+1})$$

$$L'_{2,i} = \frac{(2x - x_i - x_{i+1})}{h_i(h_i + h_{i+1})} U(x_{i-1}) - \frac{(2x - x_{i-1} - x_{i+1})}{h_i h_{i+1}} U(x_i) + \\ + \frac{(2x - x_{i-1} - x_i)}{h_{i+1}(h_i + h_{i+1})} U(x_{i+1})$$

Метод неопределенных коэффициентов

$U(x_0), \ldots, U(x_n)$

$U^{(k)}(x^*) - ?$

$x^* \in [x_0, x_n]$

7

$$U^{(k)}(x^*) \approx C_0 U(x_0) + C_1 U(x_1) + \ldots + C_n U(x_n)$$

$$U(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_n(x - x_0)^n$$

$U(x) = 1;$

$U(x) = x - x_0;$

$\ldots$

$U(x) = (x - x_0)^n$

$x^* \in [x_0, x_3], \quad U(x_i), i = \overline{0,3}$

$$\boxed{U'(x^*) \approx C_0 U(x_0) + C_1 U(x_1) + C_2 U(x_2) + C_3 U(x_3)} \quad (7.1)$$

$U(x) = 1; \qquad U'(x) = 0;$

$U(x) = x - x_0; \qquad U'(x) = 1;$

$U(x) = (x - x_0)^2; \qquad U'(x) = 2(x - x_0);$

$U(x) = (x - x_0)^3 \qquad U'(x) = 3(x - x_0)^2 \qquad x = x^*$

$$\begin{cases} 0 = C_0 \cdot 1 + C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 + C_3 \cdot 1 \\ \\ \\ \end{cases}$$

Вычисление частных производных

$$U = f(x, y):$$

$$U_{ij} = f(x_i, y_j), \quad x_i = x_0 + ih_1,\ i = \overline{0, I}; \quad y_j = y_0 + jh_2,\ j = \overline{0, J}$$

$$(x_i, y_j) - ?$$

		y_{j-1}	y_j	y_{j+1}	
	…	…	…	…	…
x_{i-1}	…	$U_{i-1,j-1}$	$U_{i-1,j}$	$U_{i-1,j+1}$	…
x_i	…	$U_{i,j-1}$	U_{ij}	$U_{i,j+1}$	…
x_{i+1}	…	$U_{i+1,j-1}$	$U_{i+1,j}$	$U_{i+1,j+1}$	…
	…	…	…	…	…

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{ij} \approx \frac{U_{i+1,j} - U_{ij}}{h_1}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{ij} \approx \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h_1}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{ij} \approx \frac{U_{i,j+1} - U_{ij}}{h_2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{ij} \approx \frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}}{h_1^2}$$

		y_{j-1}	y_j	y_{j+1}	
	…	…	…	…	…
x_{i-1}	…	$U_{i-1,j-1}$	$U_{i-1,j}$	$U_{i-1,j+1}$	…
x_i	…	$U_{i,j-1}$	U_{ij}	$U_{i,j+1}$	…
x_{i+1}	…	$U_{i+1,j-1}$	$U_{i+1,j}$	$U_{i+1,j+1}$	…
	…	…	…	…	…

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}\right)_{ij} \approx \frac{U_{i+1,j+1} - U_{i+1,j-1} - U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j-1}}{4h_1 h_2}}$$