

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

## РОТАТАБЕЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

*Ротатабельным* называют планирование, для которого дисперсия отклика (выходного параметра)  $y$ , предсказанного уравнением регрессии, постоянна для всех точек, находящихся на равном расстоянии от центра эксперимента. Экспериментатору заранее не известно, где находится та часть поверхности отклика, которая представляет для него особый интерес, поэтому следует стремиться к тому, чтобы количество информации, содержащееся в уравнении регрессии, было одинаково для всех равноотстоящих от центра эксперимента точек.

## РОТАТАБЕЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Бокс и Хантер предложили ротатабельные планы второго порядка. Для того чтобы композиционный план был ротатабельным, величину звездного плеча  $\alpha$  выбирают из условия

$$\alpha = 2^{\frac{k}{4}} \text{ при } k < 5 \text{ и } \alpha = 2^{\frac{k-1}{4}} \text{ при } k \geq 5,$$

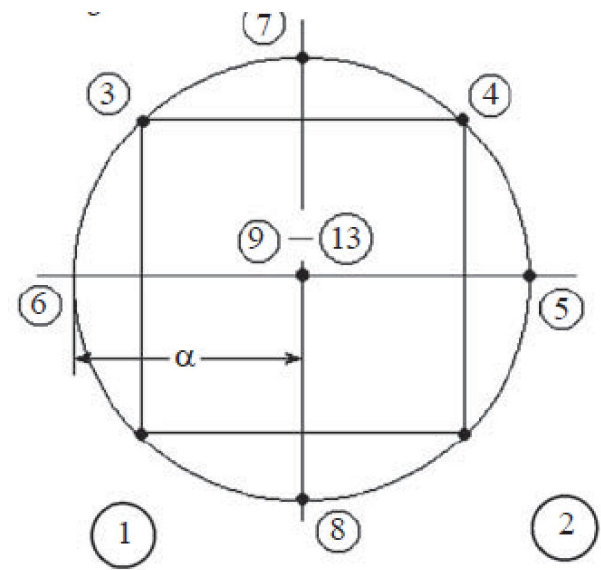
или в общем случае  $\alpha = 2^{\frac{k-p}{4}}$

где  $k$  – число факторов;  $p$  – дробность реплики (для ПФЭ  $p = 0$ , для полуреплики  $p = 1$ , для четвертьреплики  $p = 2$  и т.д.). Число точек в центре плана  $n_0$  увеличивают.

# РОТАТАБЕЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

на пример, для матрицы ротатабельного планирования второго порядка для обеспечения ротатабельности точек 5, 6, 7, 8 необходимо удалить их от центра плана на расстояние  $\alpha$  в  $\sqrt{2} = 1,414$  раз большее, чем удаление точек 1, 2, 3, 4 от осей  $x_2$  и  $x_1$ .

В результате этого все точки плана оказываются лежащими на окружности. Учитывая существенно большее влияние на функцию отклика случайной ошибки в точке 9, рекомендуется ставить в этой точке плана не один, а несколько дублирующих опытов (в данном случае опыты с 9 до 13) для усреднения полученных результатов и для осуществления статистического анализа результатов всего эксперимента в целом



# РОТАТАБЕЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В таблице приведены значения  $\alpha$  и  $n_0$  для различного числа независимых факторов

Параметр плана	Значения параметров при числе независимых факторов								
	2	3	4	5	6	6	6	7	7
Ядро плана	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$	$2^{5-1}$	$2^6$	$2^{6-1}$	$2^7$	$2^{7-1}$
Звездное плечо	1,414	1,682	2,00	2,378	2,00	2,828	2,378	3,333	2,828
Число точек в центре плана $n_0$	5	6	7	10	6	15	9	21	14

## РОТАТАБЕЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В таблице приведены параметры униформ-ротатабельного ЦКП для числа факторов  $2 \leq k \leq 5$ . Поскольку в центре плана ставится несколько опытов, это позволяет не проводить дублирование опытов. Для статистического анализа дисперсия воспроизводимости рассчитывается по повторным опытам в центре плана.

Количество факторов $k$	2	3	4	5	4	5
Количество опытов ПФЭ $3^k$	9	27	81	243	81	243
Тип ядра	ПФЭ $2^k$				ДФЭ $2^{k-1}$	
Количество опытов «ядра» ( $N_1 = 2^{k-p}$ )	4	8	16	32	8	16
Количество опытов в центре плана ( $n_0$ )	5	6	7	10	5	6
Общее количество опытов ( $N_1 + 2k + n_0$ )	13	20	31	52	21	32
Величина «плеча» $\alpha$	1,414	1,682	2,000	2,378	1,682	2,000

# РОТАТАБЕЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Ротатабельный план второго порядка

Параметр опыта	№ опыта	Факторы						Результат $y_j$
		$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1x_2$	$x_1^2$	$x_2^2$	
Ядро плана	1	+1	-1	-1	+1	+1	+1	$y_1$
	2	+1	+1	-1	-1	+1	+1	$y_2$
	3	+1	-1	+1	-1	+1	+1	$y_3$
	4	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$y_4$
Звездные точки	5	+1	+1,414	0	0	2	0	$y_5$
	6	+1	-1,414	0	0	2	0	$y_6$
	7	+1	0	+1,414	0	0	2	$y_7$
	8	+1	0	-1,414	0	0	2	$y_8$
Центр плана	9	+1	0	0	0	0	0	$y_9$
	10	+1	0	0	0	0	0	$y_{10}$
	11	+1	0	0	0	0	0	$y_{11}$
	12	+1	0	0	0	0	0	$y_{12}$
	13	+1	0	0	0	0	0	$y_{13}$

# РОТАТАБЕЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Учитывая специфический характер ротатабельного плана в общем виде, можно также получить формулы для расчёта коэффициентов уравнения регрессии и их дисперсий.

Так как общее число опытов  $n = n_1 + 2k + n_0$  (число опытов ядра  $n_1$  плюс  $2k$  звездных точек и количество опытов в центре плана  $n_0$ ), введем дополнительные переменные для  $k$  – факторов

$$\lambda = \frac{nk}{(k+2)(n_1+2k)}$$

$$A = \frac{1}{2\lambda[(k+2)\lambda - k]}$$

$$c = \frac{1}{\sum_{j=1}^n X_{ij}^2}$$

Определим коэффициенты уравнения  $y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i X_i + \sum_{i=1}^k b_{ii} X_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^k b_{ij} X_i X_j + \dots$



# РОТАТЕЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

$$b_0 = \frac{A}{n} \left[ 2\lambda^2(k+2) \sum_{j=1}^n X_{0j}y_j - 2\lambda c \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij}^2 y_j \right]$$

$$b_i = \frac{c}{n} \sum_{j=1}^n X_{ij} y_j$$

$$b_{ii} = \frac{A}{n} \left[ c^2[(k+2)\lambda - k] \sum_{j=1}^n X_{ij}^2 y_j + c^2(1-\lambda) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n X_{ij}^2 y_j - 2\lambda c \sum_{j=1}^n X_{0j} y_j \right]$$

$$b_{iu} = \frac{c^2}{n\lambda} \sum_{j=1}^n X_{ij} X_{uj} y_j$$

# РОТАТАБЕЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Дисперсии коэффициентов:

$$S_{b_0}^2 = \frac{2A\lambda^2(k+2)}{n} S_{\text{воспр}}^2$$

$$S_{b_i}^2 = \frac{1}{n - n_0} S_{\text{воспр}}^2$$

$$S_{b_{ii}}^2 = \frac{A[(k+1)\lambda - (k-1)c^2]}{n} S_{\text{воспр}}^2$$

$$S_{b_{iu}}^2 = \frac{c^2\lambda}{n} S_{\text{воспр}}^2$$

# РОТАТАБЕЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Матрица ротатабельного планирования **неортогональна**, следовательно, если какой-либо из квадратичных эффектов оказался незначимым, то после его исключения коэффициенты уравнения регрессии необходимо пересчитать заново.

При использовании ротатабельных планов второго порядка дисперсию **воспроизводимости** можно определить по опытам в центре плана.

При проверке **адекватности** уравнения регрессии, полученного по ротатабельному плану второго порядка, поступают следующим образом.

Находят остаточную сумму квадратов

$$S_1^2 = \sum_{j=1}^n (y_j - y_j^{\text{расч}})^2$$

с числом степеней свободы

$$m_1 = n - \frac{(k+2)(k+1)}{2}.$$

# РОТАТЕЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

По опытам в центре плана определяют сумму квадратов воспроизводимости

$$S_2^2 = \sum_{j=1}^{n_0} (y_{0j} - \bar{y}_{0j})^2$$

с числом степеней свободы  $m_2 = n_0 - 1$ .

Далее находят сумму квадратов, характеризующих неадекватность

$$S_3^2 = S_1^2 - S_2^2$$

число степеней свободы которой равно

$$m_3 = m_1 - m_2 = n - \frac{(k+2)(k+1)}{2} - (n_0 - 1).$$

# РОТАТАБЕЛЬНЫЕ ПЛАНЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Проверяют адекватность по F-критерию

$$F = \frac{S_3^2 / m_3}{S_2^2 / m_2}.$$

Уравнение адекватно, если  $F < F_{\alpha; m_3; m_2}$ .

Если модель второго порядка оказалась неадекватной, следует повторить эксперименты на меньшем интервале варьирования факторов или перенести центр плана в другую точку факторного пространства. В тех случаях, когда адекватность модели по-прежнему не достигается, рекомендуется перейти к планам третьего порядка.

# ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 1. Математическое моделирование металлургических процессов в АСУ ТП / Н.А. Спирин, В.В. Лавров, В.Ю. Рыболовлев, Л.Ю. Гилева, А.В. Краснобаев, В.С. Швыдкий, О.П. Онорин, К.А. Щипанов, А.А. Бурькин; под ред. Н.А. Спирина. – Екатеринбург: ООО «УИПЦ», 2014. – 558 с.**